ICS1113 OPTIMIZACION, 2011-1.
INTERROGACION 2.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda en el cuadernillo que se le ha entregado de tal forma de que las partes queden en hojas separadas. Coloque su **nombre, sección y número de lista (no número de alumno)** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos del puntaje de la prueba, sin derecho alguno a reclamo posterior.** No usar calculadoras programables ni teléfonos celulares. Dispone de 120 minutos.

Parte 1 (30pts).

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$Max: 2x_1 + x_2$$

$$s.a.$$

$$(1)\ x_1 + x_2 \geq 4$$

$$(2)\ -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$(3)\ 0,5x_1 + x_2 \leq 8$$

$$(4)\ x_2 \leq 6$$

$$(5)\ x_1, x_2 \geq 0$$

a) (15pts) Resuelva este problema mediante el algoritmo SIMPLEX de dos fases. Sea explícito en entregar la solución y el valor óptimo. No se permiten argumentos gráficos.

El problema estandarizado queda como:

$$Min\ -2\ x_1 - x_2$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$0.5x_1 + x_2 + x_5 = 8$$
$$x_2 + x_6 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Nota de corrección: Puede ser estandarizado como un problema de maximización.

Luego se debe agregar al menos una variable artificial para comenzar fase I:

$$Min\ y$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + y = 4$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$0.5x_1 + x_2 + x_5 = 8$$
$$x_2 + x_6 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Nota de corrección: Pueden agregarse más variables artificiales, siempre que el óptimo de fase uno logre un vértice factible.

Luego el TABLEAU inicial sería:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	b
1	1	−1	0	0	0	1	4
−1	1	0	1	0	0	0	2
0,5	1	0	0	1	0	0	8
0	1	0	0	0	1	0	6
−2	−1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0

Antes de comenzar se debe pivotear la última fila:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	b
1	1	−1	0	0	0	1	4
−1	1	0	1	0	0	0	2
0,5	1	0	0	1	0	0	8
0	1	0	0	0	1	0	6
−2	−1	0	0	0	0	0	0
−1	−1	1	0	0	0	0	−4

Entra $x_1, sale\ y$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	b
1	1	−1	0	0	0	1	4
0	2	−1	1	0	0	1	6
0	0,5	0,5	0	1	0	−0,5	6
0	1	0	0	0	1	0	6
0	1	−2	0	0	0	2	8
0	0	0	0	0	0	1	0

Todos los costos reducidos no básicos de fase 1 son no negativos, y es variable no básica. Podemos iniciar fase 2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	1	−1	0	0	0	4
0	2	−1	1	0	0	6
0	0,5	0,5	0	1	0	6
0	1	0	0	0	1	6
0	1	−2	0	0	0	8

Entra $x_3, sale\ x_5$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	2	0	0	2	0	16
0	3	0	1	2	0	18
0	1	1	0	2	0	12
0	1	0	0	0	1	6
0	3	0	0	4	0	32

Todos los costos reducidos no básicos de fase 2 no básicos son positivos. Llegamos a la solución óptima y es única.

$$x_1 = 16$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 12$$
$$x_4 = 18$$
$$x_5 = 0$$
$$x_6 = 6$$

El valor de la función objetivo original es 32.

b) (5pts) Indique el intervalo de valores entre los cuales se puede mover ponderador de x_2 en la función objetivo, actualmente en 1, para que la actual solución óptima no cambie.

Nota de corrección: De aquí en adelante está permitido usar argumentos gráficos.
Para que la solución optima no cambie el ponderador de x_2 se debe mover en un rango que mantenga el costo reducido de la variable superior o igual a cero para que $x_2\ no\ entre\ a\ la\ base$.

$$\Delta C_2 + r_2 \geq 0$$
$$\Delta C_2 + 3 \geq 0$$

$$\Delta C_2 \geq -3$$

Esto es válido para el problema equivalente de minimización que planteamos. Para el problema original x_2 se puede mover en el rango $(-\infty, 4]$.

c) (5pts) ¿cuál es el valor del ponderador de x_2 en la función objetivo para que exista solución múltiple y, al mismo tiempo esté activa la restricción número (3)?

Para que exista múltiple solución, el ponderador de x_2 debe tomar un valor tal que el costo reducido asociado a x_2 sea 0. Luego el valor es 4.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	2	0	0	2	0	16
0	3	0	1	2	0	18
0	1	1	0	2	0	12
0	1	0	0	0	1	6
0	0	0	0	4	0	32

Entra $x_2, sale\ x_6$.
El valor del costo reducido asociado a x_5 que es la variable de holgura asociada a la restricción 3 no cambia por lo que x_5 sigue siendo una variable no básica y la restricción esta activa.

d) (5pts) ¿En qué rango de valores puede moverse el lado derecho de la restricción (4), actualmente en 6, para que la estructura de base en el óptimo no cambie? ¿Y para que la solución óptima no cambie?

$$x_B^{nuevo} = x_B^{antiguo} + B^{-1}\begin{matrix}\vdots\\ \Delta b_4 \\ \vdots\end{matrix}$$

$$x_B^{nuevo} = \begin{bmatrix}16\\12\\18\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \Delta b_4\end{bmatrix}$$

$$\Delta b_4 \geq -6$$

Para que la estructura de la base no cambie los valores de la solución básica deben seguir siendo mayores o iguales a cero. Luego el rango de valores es $[0, \infty)$. Si b_4 es negativa luego el dominio es vacio.
Para que la solución óptima no cambie es el mismo rango ya que al modificar el valor de b_4 solo variamos el valor de la holgura x_6 y no alteramos el valor de la función objetivo.

Nota de corrección: Si se considera a la holgura de la restricción como parte de la solución óptima, entonces se puede argumentar que siempre cambiará la solución y se considera correcto.

Parte 2 (20pts).

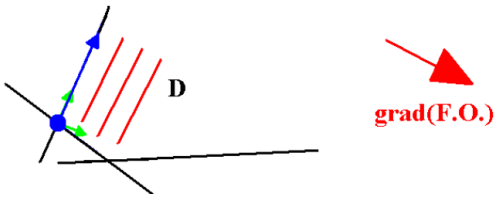
Responda brevemente a cada una de las siguientes afirmaciones. Indique si esta es verdadera o falsa y justifique con mucha claridad su respuesta.

a) **(4pts)** "Si un problema de programación lineal, que minimiza una cierta función objetivo, tiene alguna restricción de la forma $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$, con bi positivo, y si X*, solución óptima del problema, cumple $\sum_j a_{ij} x_j^* = b_i$, entonces, el reducir el valor de bi hace disminuir el valor óptimo alcanzado por el problema".

Falso. Esto es cierto solo en los casos en que no existe solución en un vértice degenerado (donde intercepten más de "n" restricciones, donde n es el número de variables). Si ocurriese lo último, variaciones en restricciones redundantes no afectan al óptimo.

b) **(4pts)** Si un problema de programación lineal tiene infinitas soluciones óptimas, entonces al menos dos de ellas deben corresponder a vértices de la región factible.

Falso. Esto no sucede cuando el dominio es no acotado, pues podría haber solución óptima múltiple en un rayo. La figura siguiente ilustra esta situación:



c) **(4pts)** Sólo bajo circunstancias especiales, como en un vértice degenerado, es posible tener valores negativos al lado derecho del Tableau.

Falso. Esto no es cierto por definición; los valores negativos al lado derecho del tableau son siempre no negativos.

En este caso sólo responda lo que se pregunta:

d) **(8pts)** En clases vimos cómo integrar una nueva variable al problema después de haber obtenido el óptimo, revisando si esta variable mejora la función objetivo. Usando los conceptos de dualidad, diseñe una forma de incluir una restricción al óptimo y revisar su impacto. ¿Cómo podría verificar que esta nueva restricción cambia el valor óptimo?

Podríamos incluir una variable al problema dual de la misma forma que incluimos variables en el análisis post-optimal.Esta variable dual equivaldría a incluir una restricción primal (2pts)

Si el costo reducido dual de esta variable cumple con las condiciones de optimalidad, implica que la holgura primal de la restricción asociada es factible (no negativa) y por ende la restricción es redundante (4pts). Si el costo reducido dual de esta variable no cumple con las condiciones de optimalidad, la holgura primal sería infactible y sacaría al vértice óptimo del dominio. Luego el valor óptimo primal empeoraría. (2pts)

Nota de corrección: Bien argumentado (4pts), concepto correcto con errores leves (3pts), correcto con pequeño error conceptual (2pts), 0 puntos en otro caso

Parte 3 (20pts).

Una fábrica produce *n* diferentes ítems y utiliza para ello *m* materias primas. El ítem *j* necesita una cantidad a_{ij} de la materia prima *i* por unidad de ítem ($i = 1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$). Si se fabrica el ítem *j* sólo puede producirse en las cantidades A_j, B_j *o* C_j, $j = 1,..,n$. El precio del ítem *j* es p_j por unidad y c_j es el costo unitario. Tenga en cuenta que por el sólo hecho de fabricar el ítem *j* se incurre en un costo fijo K_j. En este proceso productivo se usa gas como combustible. Se sabe que el consumo de gas por unidad fabricada del ítem *j* es g_j. Por razones ambientales, el consumo total máximo permitido de gas es *G*. Sin embargo, si la empresa coloca un sistema de filtro, el consumo máximo puede ascender a *H*. El costo de instalar el filtro es *R*. Además, si se coloca ese filtro, entonces el ítem *j* solamente podrá ser fabricado en las cantidades B_j o C_j, $j = 1,..,n$.

Con estos antecedentes construya un modelo que permita determinar cuánto producir de cada ítem y la conveniencia o no de instalar el sistema de filtro, de tal manera que se maximice el beneficio total (diferencia entre ingreso total y costo total de producción y de inversión de filtro).

Antes de empezar, hacemos un registro de los parámetros (opcional)
n = número de ítems j (j=1...n).
m = número de materias primas i (i=1...m).
MP_i = cantidad de materia prima disponible del tipo i
$a_{i,j}$ = cantidad de materia prima i por unidad de ítem j.
A_j, B_j o C_j = cantidades posibles de producción del ítem j.
p_j = precio del ítem j.
c_j = costo del ítem j.
K_j = costo dijo por producir el ítem j.
g_j = consumo de gas por cada una unidad producida del ítem j
G = consumo máximo de gas sin filtro
H = consumo máximo de gas con filtro
R = costo de instalación de filtro

Variables (5 pts x esto):

$$Pa_j = \begin{cases} 0 \text{ si no produce cantidad } A_j \\ 1 \text{ si produce cantidad } A_j \end{cases} \qquad \forall\, j = 1..n$$

$$Pb_j = \begin{cases} 0 \text{ si no produce cantidad } B_j \\ 1 \text{ si produce cantidad } B_j \end{cases} \qquad \forall\, j = 1..n$$

$$Pc_j = \begin{cases} 0 \text{ si no produce cantidad } C_j \\ 1 \text{ si produce cantidad } C_j \end{cases} \qquad \forall\, j = 1..n$$

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ si no instala filtro} \\ 1 \text{ instala filtro} \end{cases}$$

Q_j = cantidad producida del item j (es una variable auxiliar, no es necesaria pero simplifica la notación)

Restricciones (12pts x todas):

1. *El ítem j sólo puede producirse en las cantidades A_j, B_j o C_j (o no producirse):*

$$Pa_j + Pb_j + Pc_j \leq 1 \qquad \forall\, j = 1..n$$

2. *Si se coloca el filtro, entonces el ítem j solamente podrá ser fabricado en las cantidades B_j o C_j ,es decir, no se puede fabricar una cantidad A_j si se instala el filtro (Y=1):*

$$Pa_j + Y \leq 1 \qquad \forall j = 1..n$$

3. *Cantidad producida del ítem j (opcional):*

$$Q_j = Pa_j * A_j + Pb_j * B_j + Pc_j * C_j \qquad \forall j = 1..n$$

4. *El consumo total máximo permitido de gas es G. Sin embargo, si la empresa coloca un sistema de filtro, el consumo máximo permitido puede ascender a H:*

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j * g_j \leq G + Y * (H - G)$$

La cantidad de materia prima disponible del tipo "i" es MP_i :

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j * a_{i,j} \leq MP_i \qquad \forall i=1..m$$

5. Restricciones de conjunto:

$Pa_j, Pb_j, Pc_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1..n$

$Y \in \{0,1\}$

Función objetivo (3pts)

$$\sum_{j=1}^{n} \left[Q_j (p_j - c_j) - (Pa_j + Pb_j + Pc_j) K_j \right] - Y \cdot R$$

NOTA DE CORRECIÓN: Cualquier problema equivalente es válido (que tenga la misma solución óptima y valor). Incluyendo problemas no lineales.

Parte 4 (30pts).

Una determinada fábrica produce 4 tipos distintos de ladrillos de cemento (j=1,2,3,4). El proceso de fabricación está compuesto por 3 etapas (i=1,2,3) (mezclado, vibrado e inspección). Dentro del próximo mes se dispone de 800 horas máquina para mezclado, 1000 para vibrado y 340 horas-hombre para inspección. Para maximizar utilidades se planteó el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} Max\ z &= 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 \leq 800 \\ & 1{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1000 \\ & 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 340 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Donde x_j es la cantidad de ladrillos del tipo *j* a fabricar. Se sabe que la base óptima es $B^* = (x_2, x_1, h_3)$. Donde h_3 es la holgura de la tercera restricción. La inversa de la base es:

$$(B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a esta información responda:

a) (10 pts) ¿Cuál es la solución óptima del dual (no debe escribir el dual)?

Los costos reducidos asociados a holguras y excesos corresponden al valor de las variables en el problema dual, entonces:

$$y^* = c_{B^*}(B^*)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w^* = 6000$$

Así, la solución óptima del dual es:

$y_1 = 5$
$y_2 = 2$
$y_3 = 0$

b) (10 pts) ¿Qué etapas son limitantes y cuáles no? Justifique su respuesta.

Las etapas de mezclado y vibrado son limitantes porque tienen variables duales mayores que 0.
Se puede justificar también con la solución óptima del primal

$$x_B^* = (B^*)^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Reemplazando estos valores en las restricciones tenemos:

$$400 + 2 \times 200 + 0 + 0 = 800$$

$$1,5 \times 400 + 2 \times 200 + 0 + 0 = 1000$$

$$0,5 \times 400 + 0,6 \times 200 + 0 + 0 = 320 \leq 340$$

Vemos que estamos usando todas las horas disponibles de las etapas 1 y 2, mientras que nos sobran horas de la etapa 3, por lo tanto las restricciones 1 y 2 son limitantes (están activas) y la restricción 3 no es limitante.

c) (10 pts) ¿Cuánto está dispuesto a pagar por una hora máquina adicional en cada etapa?

Tenemos que en el óptimo la utilidad es $8 * 400 + 14 * 200 + 0 + 0 = 6000$

Si aumentamos 1 hora maquina en la primera etapa la nueva solución óptima es:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 801 \\ 1000 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201.5 \\ 398 \\ 20.1 \end{pmatrix}$$

Con esta solución la utilidad es $8 * 398 + 14 * 201.5 + 0 + 0 = 6005$, por lo tanto está dispuesto a pagar 5 por una hora adicional en la etapa de mezclado.

Si aumentamos 1 hora maquina en la segunda etapa la nueva solución óptima es:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 1001 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 \\ 402 \\ 19.6 \end{pmatrix}$$

Con esta solución la utilidad es $8 * 402 + 14 * 199 + 0 + 0 = 6002$, por lo tanto está dispuesto a pagar 2 por una hora adicional en la etapa de vibrado.

La tercera etapa son horas hombre, por lo que se está dispuesto a pagar 0.