PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-2
Profesores: M. Klapp, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Tarea 4

Fecha de entrega: Viernes 3 de diciembre - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea. Sin embargo, también es posible hacer la tarea individualmente.
- La entrega de la tarea es online en formato PDF a través de un **Google Form** dispuesto en Canvas. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano. Si es a mano, se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable. El formato de entrega del archivo es **nombre_completo_1 - nombre_completo_2.pdf o nombre_completo_1.pdf**, dependiendo de si hiceron la tarea en pareja o solos (Ej: camila_ignacia_toro_uquillas - pedro_pablo_perez_pereira.pdf o camila_ignacia_toro_uquillas.pdf).

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la tarea para incentivar este formato. También, el ayudante podrá descontar **3 décimas sobre la nota final** si la tarea está ilegible o desordenada de acuerdo a su criterio.
- El plazo de entrega es impostergable. Tarea atrasada se considera **tarea NO entregada**.
- La tarea es en pareja. No se recomienda dividir el trabajo en dos, sino que hacer un trabajo completo en conjunto. Pueden discutir los problemas con los profesores y ayudantes del curso, pero al final cada grupo es responsable de sus resultados y conclusiones. Una actitud deshonesta será sancionada de acuerdo a lo estipulado en el programa de este curso.[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, debe ser envíada a través del foro **Tarea 4** publicado en Canvas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se recomienda hacer las preguntas anticipadamente. El **día de la entrega se dejará de responder consultas**.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. Flujo en Redes (30 puntos)

(a) Considere el problema que enfrenta una empresa que cuenta con n trabajadores y m tareas, con $n > m$. El gerente de operaciones de la empresa sabe que cada trabajador tiene habilidades y preferencias específicas respecto a las tareas que podría realizar. Supongamos que ocupamos esta información para calcular la utilidad (o deseabilidad) d_{ij} de cada asignación para el trabajador i a la tarea j.

(I) (3 puntos) Formule un problema de flujo a costo mínimo que asigne trabajadores a tareas, asegurándose que toda tarea sea realizada exactamente por un único trabajador y que ningún trabajador realice más de una tarea, maximizando la utilidad total obtenida en la asignación realizada.

(II) (2 puntos) Considere la siguiente instancia del problema:

	Trabajador 1	Trabajador 2	Trabajador 3	Trabajador 4
Tarea 1	2	6	1	8
Tarea 2	3	1	4	7

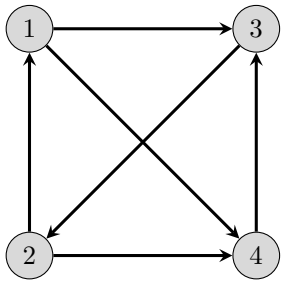
Encuentre "visualmente" una asignación óptima.

(III) (3 puntos) Utilice el criterio de optimalidad del algoritmo de simplex especializado en redes para probar que es la asignación óptima la solución que ha entregado en la parte (II).

(IV) En los siguientes casos, indique qué pasaría con la solución óptima y si se puede generalizar para cualquier caso. Justifique sin necesidad de resolver nuevamente.

1) (2 puntos) Los costos de todos los arcos se multiplican por una constante $k > 0$. ($c_a^{'} = k \cdot c_a$)
2) (2 puntos) Se le suma una constante k a los costos de todos los arcos. ($c_a^{'} = k + c_a$)

(b) (5 puntos) Considere los siguientes 5 problemas de flujo en redes a costo mínimo sobre el mismo grafo G = (N,A) que se muestra a continuación:

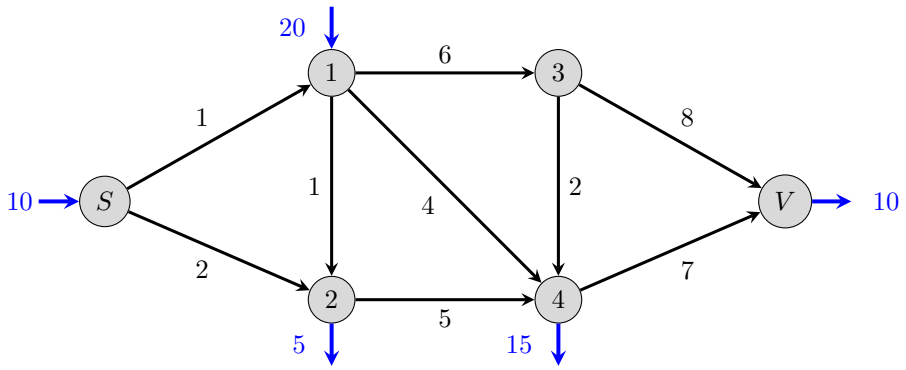


La siguiente tabla muestra los costos de cada arco y las ofertas y demandas de cada nodo:

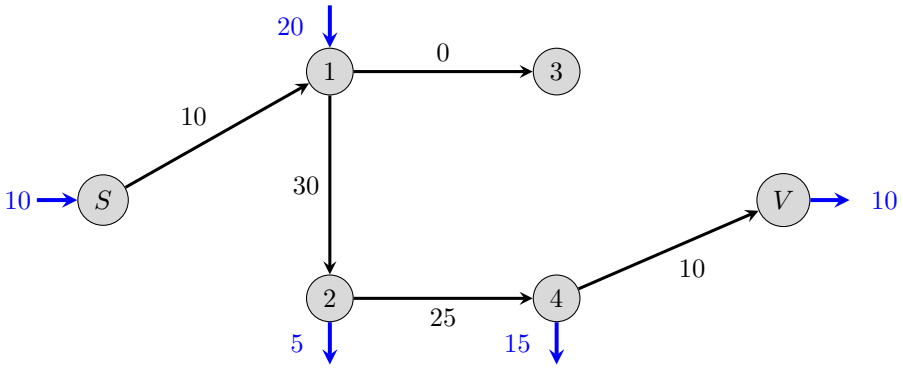
Problema	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{24}	c_{32}	c_{43}	b_1	b_2	b_3	b_4
A	2	- 1	1	3	- 1	2	3	0	- 1	- 2
B	5	2	- 1	3	- 3	1	- 1	2	- 1	0
C	2	- 1	1	2	1	0	1	- 1	1	- 1
D	1	- 1	1	- 1	2	0	- 2	0	1	- 1
E	3	3	0	2	- 2	- 1	1	- 1	0	0

Para cada uno de los 5 problemas, indique si admite solución óptima o no. Justifique su respuesta.

(c) El siguiente grafo muestra las diferentes rutas que existen para llegar de Santiago (S) a Viña del Mar (V). Los nodos 1, 2, 3 y 4 representan pueblos intermedios entre las dos ciudades. En azul, se pueden ver las ofertas y demandas de cada uno de los nodos (ciudades y pueblos) y el valor del arco representa el costo unitario de movilizarse por ahí.



(I) (4 puntos) Determine la solución óptima usando el algoritmo de simplex en redes. Comience desde la solución básica factible que se muestra a continuación:



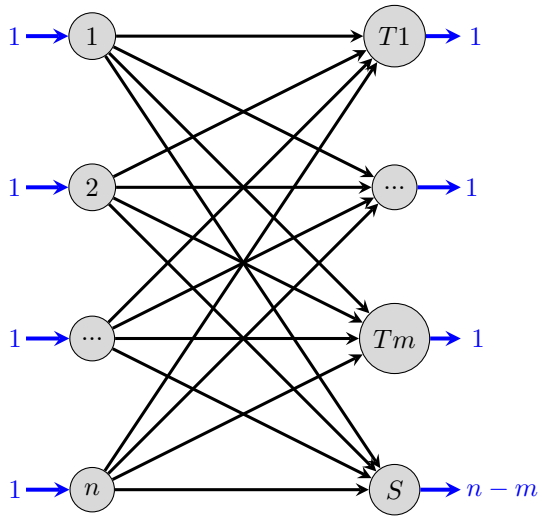
(II) (3 puntos) ¿En qué rango de valores puede estar c_{14} para que el flujo óptimo encontrado en (I) se mantenga?

(III) (3 puntos) Se está considerando agregar un nuevo arco desde 1 a V. ¿Cuál es el mayor valor del costo unitario de este arco para que convenga usarlo?

(IV) (3 puntos) Si ahora le piden encontrar la ruta más corta entre Santiago y Viña del Mar, asumiendo que los costos ahora representan las distancias ¿Cómo modificaría el problema?

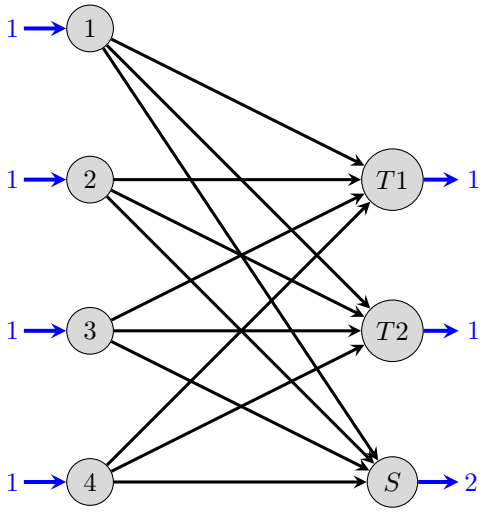
Solución Problema 1.

(a) (I) El grafo que describe la situación es el siguiente:



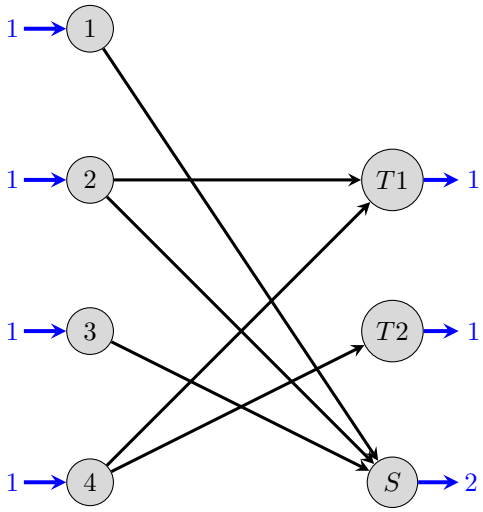
Donde se tiene que c_{ij} es $-d_{ij}$ siempre que $j \in \{T1, ..., Tm\}$ y 0 para $j = S$. La cota inferior es 0 para todo par $(i; j)$.

(II) El grafo que muestra la instancia es:



Es fácilmente observable que la asignación óptima es que la tarea 1 la realice el trabajador 2 y la tarea 2 la realice el trabajador 4.

(III) Para esto, consideremos el árbol básico factible que queda definido por los arcos asociados a las asignaciones de trabajadores a tareas mencionado anteriormente. Estos arcos son (1; S), (2; T1), (3; S) y (4; T2), pues estos están fuera de cota. Para formar el árbol básico factible escogemos un par de arcos de los que están en su cota inferior (todos los restantes lo están) y permiten construir un árbol. Seleccionamos los arcos (2; S) y (4; T1). Es importante destacar que hay más de un árbol factible asociada a la asignación descrita. Con los arcos seleccionados, se tiene el siguiente árbol:



Ahora realizamos el criterio de optimalidad. Para calcular las variables duales tomamos en cuenta que los costos reducidos de las variables básicas deben ser 0.

$$\bar{c}_{1,S} = 0 - \pi_1 + \pi_S = 0$$
$$\bar{c}_{2,T1} = -6 - \pi_2 + \pi_{T1} = 0$$
$$\bar{c}_{2,S} = 0 - \pi_2 + \pi_S = 0$$
$$\bar{c}_{3,S} = 0 - \pi_3 + \pi_S = 0$$
$$\bar{c}_{4,T1} = -8 - \pi_4 + \pi_{T1} = 0$$
$$\bar{c}_{4,T2} = -7 - \pi_4 + \pi_{T2} = 0$$

Fijando $\pi_S = 0$, se tiene que $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = 0$, $\pi_4 = -2$, $\pi_{T1} = 6$ y $\pi_{T2} = 5$. Con estos valores, calculamos los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{1,T1} = -2 - 0 + 6 = 4 > 0$$
$$\bar{c}_{1,T2} = -3 - 0 + 5 = 2 > 0$$
$$\bar{c}_{2,T2} = -1 - 0 + 5 = 4 > 0$$
$$\bar{c}_{3,T1} = -1 - 0 + 6 = 5 > 0$$
$$\bar{c}_{3,T2} = -4 - 0 + 5 = 1 > 0$$
$$\bar{c}_{4,S} = 0 - (-2) + 0 = 2 > 0$$

Como todos los costos son mayores o iguales a 0, estamos en el óptimo.

Si los arcos aleatorios que se incluyeron para formar el árbol son distinto a los seleccionados, el criterio de optimalidad mostraría que no se está en el óptimo. En ese caso se debe verificar que los arcos incluidas efectivamente unen todos los nodos sin formar ciclos y los alumnos pueden explicar la razón por la que no es óptimo (problema degenerado) o resolverlo hasta llegar al óptimo y mostrar que la asignación de trabajadores a tareas es la misma.

(IV) 1) Multiplicar los costos de todos los arcos por una constante $k > 0$ equivale a amplificar por un escalar la función objetivo, por lo que la solución óptima no cambiaría (1 punto). Esto se puede generalizar para cualquier problema de flujo a costo mínimo (1 punto).

2) En el caso de este ejemplo, el sumar una constante k a todos los arcos no afectaría la solución óptima, ya que todas las rutas tienen la misma cantidad de arcos (1 punto). Sin embargo, en

un grafo donde las rutas tienen distinto número de arcos, las rutas con más arcos se ven más penalizadas por la constante que las con menos arcos, por lo que si puede cambiar la solución óptima (1 punto).

(b) A continuación se muestra la solución para cada uno de los 5 subproblemas:

- ◇ A ⟶ Este problema admite solución óptima.
- ◇ B ⟶ Este problema no admite solución óptima dado que es no acotado. Se genera el ciclo negativo 1-4-3-2-1.
- ◇ C ⟶ Este problema admite solución óptima.
- ◇ D ⟶ Este problema no admite solución óptima ya que es infactible. Lo que entra al sistema no es igual a lo que sale del sistema.
- ◇ E ⟶ Este problema no admite solución óptima dado que es no acotado. Se genera el ciclo negativo 2-4-3-2.

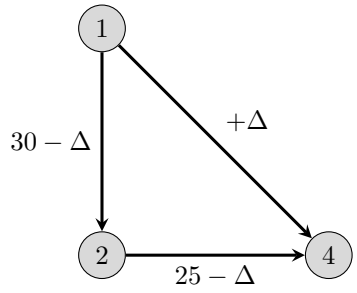
(c) (ı) En primer lugar, realizamos el criterio de optimalidad. Para calcular las variables duales tomamos en cuenta que los costos reducidos de las variables básicas deben ser 0.

$$\overline{c}_{S,1} = 1 - \pi_S + \pi_1 = 0$$
$$\overline{c}_{1,2} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\overline{c}_{1,3} = 6 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\overline{c}_{2,4} = 5 - \pi_2 + \pi_4 = 0$$
$$\overline{c}_{4,V} = 7 - \pi_4 + \pi_V = 0$$

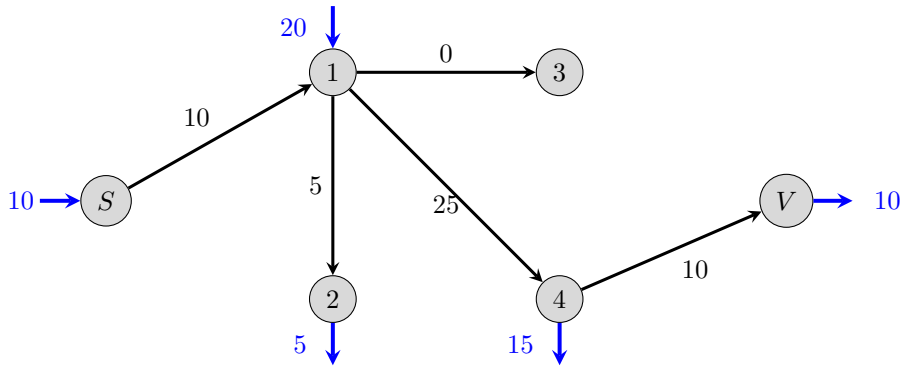
Fijando $\pi_1 = 0$, se tiene que $\pi_2 = -1$, $\pi_3 = -6$, $\pi_4 = -6$, $\pi_S = 1$ y $\pi_V = -13$. Con estos valores, calculamos los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\overline{c}_{S,2} = 2 - 1 + (-1) = 0 \geq 0$$
$$\overline{c}_{1,4} = 4 - 0 + (-6) = -2 < 0$$
$$\overline{c}_{3,4} = 2 - (-6) + (-6) = 2 > 0$$
$$\overline{c}_{3,V} = 8 - (-6) + (-13) = 1 > 0$$

Como no todos los costos son mayores o iguales a 0, no estamos en el óptimo. El arco que debe entrar a la base es el (1, 4). Ahora realizamos el criterio de salida. Para esto notamos que al agregar el arco (1, 4) se forma el siguiente ciclo:



El máximo valor que puede tomar Δ es 25, por lo que el arco que sale de la base es el (2, 4). Así el árbol pasa a ser:



Ahora volvemos a realizar el criterio de optimalidad:

$$\bar{c}_{S,1} = 1 - \pi_S + \pi_1 = 0$$
$$\bar{c}_{1,2} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{1,3} = 6 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{1,4} = 4 - \pi_1 + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{4,V} = 7 - \pi_4 + \pi_V = 0$$

Fijando $\pi_1 = 0$, se tiene que $\pi_2 = -1$, $\pi_3 = -6$, $\pi_4 = -4$, $\pi_S = 1$ y $\pi_V = -11$. Con estos valores, calculamos los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{S,2} = 2 - 1 + (-1) = 0 \geq 0$$
$$\bar{c}_{2,4} = 5 - (-1) + (-4) = 2 > 0$$
$$\bar{c}_{3,4} = 2 - (-6) + (-4) = 4 > 0$$
$$\bar{c}_{3,V} = 8 - (-6) + (-11) = 3 > 0$$

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales a 0, estamos en el óptimo, el cual tiene un costo de 185.

(II) En primer lugar, se debe notar que el arco (1,4) es básico en el óptimo, por lo que el valor de algunas variables duales dependerá de este costo. Es por esto que es necesario evaluar tanto los costos reducidos de las variables básicas como los de las no básicas y verificar con qué valores de c_{14} los costos reducidos siguen siendo todos mayores o iguales a 0.

$$\bar{c}_{S,1} = 1 - \pi_S + \pi_1 = 0$$
$$\bar{c}_{1,2} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{1,3} = 6 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{1,4} = c_{14} - \pi_1 + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{4,V} = 7 - \pi_4 + \pi_V = 0$$

Fijando $\pi_1 = 0$, se tiene que $\pi_2 = -1$, $\pi_3 = -6$, $\pi_4 = -c_{14}$, $\pi_S = 1$ y $\pi_V = -c_{14} - 7$. Con estos valores, calculamos los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{S,2} = 2 - 1 + (-1) = 0 \geq 0$$
$$\bar{c}_{2,4} = 5 - (-1) + (-c_{14}) > 0$$
$$\bar{c}_{3,4} = 2 - (-6) + (-c_{14}) > 0$$

$$\overline{c}_{3,V} = 8 - (-6) + (-c_{14} - 7) > 0$$

Así se obtienen 3 ecuaciones:

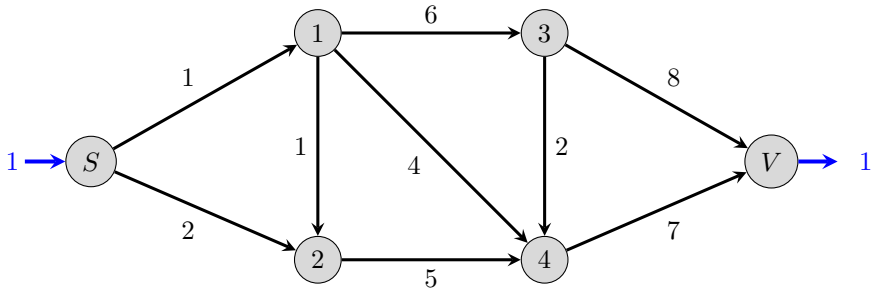
$$6 + (-c_{14}) > 0 \longrightarrow c_{14} < 6$$
$$8 + (-c_{14}) > 0 \longrightarrow c_{14} < 8$$
$$7 + (-c_{14}) > 0 \longrightarrow c_{14} < 7$$

Por lo que para que se mantenga el flujo óptimo, c_{14} debe ser menor a 6.

(III) Para que convenga utilizar el arco incorporado, sus costo reducido debe ser negativo:

$$\overline{c}_{1,V} = c_{1,V} - \pi_1 + \pi_V < 0$$
$$c_{1,V} - 0 + -11 < 0$$
$$c_{1,V} < 11$$

(IV) Para encontrar la ruta más corta, se deben cambiar las ofertas y demandas por una oferta de 1 en el nodo S y una demanda de 1 en el nodo V. Así, el grafo a resolver queda de la siguiente manera:



Problema 2. Programación No Lineal (30 puntos)

(a) (3 puntos) Caracterice as soluciones candidato al óptimo (puntos de gradiente nulo) de la siguiente función. Indique si son mínimos o máximos locales o puntos silla.

$$f(x,y) = (y-1)e^{x^2 y}$$

(b) Se tiene la función $f(x,y) = ax^3 + by^3 - cxy$. Determine cuánto deben valer las constantes a, b y c para que el punto (1,1):

(I) (2 puntos) Sea un punto estacionario (gradiente nulo).

(II) (2 puntos) Sea un punto silla

(III) (2 puntos) Sea un mínimo local

(IV) (2 puntos) Sea el mínimo global

(c) (4 puntos) Cómo se compara la velocidad de convergencia del método del gradiente con la del método de Newton. Explique con precisión por qué las diferencias, si las hubiere.

(d) (3 puntos) Mencione 2 factores que pueden afectar a la tasa de convergencia del método del gradiente. Justifique.

(e) (4 puntos) Considere el siguiente problema de Programación Lineal, donde A es la matriz de restricciones de n variables y m restricciones:

$$\text{mín } c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Muestre que si λ es el vector de los multiplicadores de Lagrange del problema, entonces $-\lambda$ es una solución factible y óptima para el problema dual.

(f) Considere el siguiente problema de optimización no lineal y el punto $x = (0,1)$:

$$\text{mín } -4x_1 + x_2$$
$$(1-x_1)^5 + -x_2 = 0$$
$$\frac{x_1^2}{8} + x_2 = 1$$

(I) (2 puntos) Verifique la regularidad del punto $x = (0,1)$.

(II) (4 puntos) Escriba el gradiente de la función objetivo en el punto $x = (0,1)$ como combinación lineal del gradiente de las restricciones en ese punto.

(III) (2 puntos) Concluya que el punto $x = (0,1)$ es solución óptima.

Solución Problema 2.

(a) En primer lugar, calculamos el gradiente de $f(x,y)$:

$$\frac{df}{dx} = 2xy(y-1)e^{x^2 y}$$

$$\frac{df}{dy} = (1 + x^2(y-1))e^{x^2 y}$$

Luego, analizamos que $\frac{df}{dx}$ es igual a 0, en los puntos del tipo $\{(0,y),(x,0),(x,1)\}$.

Por otro lado, $\frac{df}{dy}$ es igual a 0, en los puntos del tipo $(x, \frac{x^2-1}{x^2})$.

Tomando en cuenta ambas condiciones, los puntos críticos de f son $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-1, 0)$.

Ahora que tenemos los puntos críticos o candidatos al óptimo, analizamos el hessiano para saber que tipo de puntos son. El hessiano de $f(x, y)$ es el siguiente:

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} 2(y-1)y(2x^2y+1)e^{x^2y} & 2(2y-1+x^2y^2x^2y)xe^{x^2y} \\ 2(2y-1+x^2y^2x^2y)xe^{x^2y} & x^2(x^2y-x^2+2)e^{x^2y} \end{bmatrix}$$

Luego, evaluamos el Hessiano en P_1 y P_2:

$$H(f(P_1)) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(f(P_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En ambos casos el primer subdeterminante es 0 y el segundo es -4. Finalmente P_1 y P_2 son puntos silla.

(b) En primer lugar, calculamos el gradiente de $f(x, y)$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3ax^2 - cy \\ 3by^2 - cx \end{bmatrix}$$

Evaluamos el gradiente en el punto (1,1):

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 3a - c \\ 3b - c \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el Hessiano de $f(x, y)$:

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} 6ax & -c \\ -c & 6b \end{bmatrix}$$

Evaluamos el Hessiano en el punto (1,1):

$$H(f(1,1)) = \begin{bmatrix} 6a & -c \\ -c & 6b \end{bmatrix}$$

Teniendo esto claro, pasamos a resolver los casos:

(I) Punto estacionario: En este caso vemos las condiciones para que el gradiente sea nulo.

$$3a - c = 0 \longrightarrow 3a = c$$
$$3b - c = 0 \longrightarrow 3b = c$$
$$a = b = \frac{c}{3}$$

(II) Punto silla: Se deben cumplir las condiciones de gradiente nulo y que el Hessiano no sea ni semi definido positivo, definido positivo, semi definido negativo o definido negativo.

Primero, tomaremos las condiciones del gradiente nulo ($a = b = \frac{c}{3}$) y las reemplazaremos en el Hessiano dejando todo en función de a:

$$H(f(1,1)) = \begin{bmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{bmatrix}$$

Así, se tiene que:

$$\textbf{Primer subdeterminante} = 6a$$

$$\textbf{Segundo subdeterminante} = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2$$

Como se puede ver el segundo subdeterminante siempre es mayor o igual a 0, por lo que no hay valor de a que provoque que (1,1) sea un punto silla.

(III) Mínimo local: Se deben cumplir las condiciones de gradiente nulo y que el Hessiano evaluado en el punto sea semi definido positivo o definido positivo. Esto implica que los subdeterminantes deben ser mayores o iguales a 0.

$$\textbf{Primer subdeterminante} = 6a \geq 0$$

$$\textbf{Segundo subdeterminante} = 36ab - c^2 \geq 0$$

Tomando además las condiciones del gradiente nulo, implica que:

$$a = b = \frac{c}{3}$$

$$a \geq 0$$

(IV) Mínimo global: No podemos asegurar que el punto es mínimo global, ya que el Hessiano depende de las variables.

(c) En cuanto al número de iteraciones, el método de Newton es más rápido porque su convergencia es cuadrática, comparada con la del método del gradiente cuya convergencia es lineal. En cuanto al cálculo necesario en cada iteración, Newton es más caro por iteración, pues se debe calcular el Hessiano de la función objetivo y su inversa.Luego en el global del tiempo, por lo general Newton converge en menos tiempo, pero a ciencia cierta es indeterminado cuál método converge primero.

(d) Por un lado depende fuertemente del gradiente de la función objetivo en el punto de partida. Mientras este gradiente apunte más cerca del mínimo local, menos iteraciones se necesitarán.

Por otro lado la curvatura de las curvas de nivel juegan un rol fundamental. Mientras más se parezcan a una circunferencia, en la que el gradiente siempre apunta al mínimo local, más rápida será la convergencia.(1,5 puntos por cada factor mencionado).

(e) En primer lugar formamos el Lagrangeano:

$$L(x, \lambda) = c^T x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i^T x - b_i)$$

Como el problema tiene restricciones de no negatividad las condiciones de KKT establecen que:

$$\frac{dL}{dx_j} = c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq 0$$

$$x_j (c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}) = 0$$

Luego, formamos el problema dual:

$$\max b^T y$$
$$A^T y \leq c$$

Definamos $y_i = -\lambda_i$. De las condiciones KKT podemos ver de inmediato que:

$$c_j \geq \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \Leftrightarrow A^T y \leq c$$

Es decir, y es solución factible del dual.

Por otro lado, a partir de las condiciones de holgura complementaria vemos de inmediato que:

$$x_j c_j = \sum_{i=1}^{m} x_j(-\lambda_i) a_{ij} \quad \forall j = 1, ..., n$$
$$x_j c_j = \sum_{i=1}^{m} x_j(y_i) a_{ij} \quad \forall j = 1, ..., n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j(y_i) a_{ij}$$
$$c^T x = y^T A x = y^T b$$

Es decir, la función objetivo del dual, evaluada en y, es igual al valor óptimo del primal. Luego, el vector $y = -\lambda$ es solución óptima del dual.

(f) (I) En primer lugar, recordamos que un punto regular es aquel en el que los gradientes de sus restricciones activas son LI. Al reemplazar el punto en las restricciones, nos damos cuenta que ambas están activas, por lo que construimos el Jacobiano y lo evaluamos en el punto (0,1):

$$J(f(x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} -5(1-x_1)^4 & -1 \\ \frac{x_1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$J(f(0,1)) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que el Jacobiano es LI, por lo que el punto (0,1) es regular.

(II) Se deben encontrar los escalares λ_i tales que:

$$-\nabla f = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i$$

En primer lugar, construimos el Lagrangeano y luego lo derivamos respecto a las variables y multiplicadores de lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -4x_1 + x_2 + \lambda_1((1-x_1)^5 - x_2) + \lambda_2(\frac{x_1^2}{8} + x_2 - 1)$$

$$\frac{dL}{dx_1} = -4 - 5\lambda_1(1-x_1)^4 + \lambda_2 \frac{x_1}{4} = 0$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = (1 - x_1)^5 - x_2 = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = \frac{x_1^2}{8} + x_2 - 1 = 0$$

Para el punto (0,1), quedan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$-4 - 5\lambda_1 = 0$$

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, queda que:

$$\lambda_1 = \frac{-4}{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{-9}{5}$$

(III) De los puntos anteriores, sabemos que $x = (0, 1)$ es un punto crítico y regular, ya que cumple las condiciones de KKT. Además, al evaluar el Jacobiano, se ve que es de rango completo, por lo que no existen puntos singulares. Por otro lado, sabemos que $x = (0, 1)$ es un mínimo local ya que cumple que existe un vector λ tal que:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i(x^*)$$

Además, se ve que la F.O es lineal y por lo tanto convexa y que el único punto factible del dominio es $x = (0, 1)$ por lo que debe ser el óptimo.