PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: G.Angulo - P.Carrillo - A.Cataldo
R.Cuadrado - S.Encina
JT.Marquinez - F.Palominos

Interrogación 1

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Usando que $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ para $a, b > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, muestre por definición que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{|x|}$ es convexa.

Solución:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{|\lambda x + (1-\lambda)y|} \leq e^{\lambda|x| + (1-\lambda)|y|}$$
$$= (e^{|x|})^\lambda (e^{|y|})^{(1-\lambda)} \leq \lambda e^{|x|} + (1-\lambda)e^{|y|} = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(b) (**3 puntos**) Usando que $(a-b)^2 \geq 0$, muestre que el conjunto $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : \ 1 \leq xy\}$ es convexo.

Solución: Basta mostrar que $h(x) := 1/x$ es convexa sobre $x \in (0, \infty)$, pues C es precisamente el epígrafo de h. Para ello, hay que mostrar que para $x, y > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene

$$\frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda \frac{1}{x} + (1-\lambda)\frac{1}{y},$$

o equivalentemente, ver que

$$xy \leq xy[\lambda^2 + (1-\lambda)^2] + \lambda(1-\lambda)[x^2 + y^2].$$

Lo anterior es directo al notar que $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

También se puede mostrar por definición de conjunto convexo, lo cual es análogo a lo anterior.

(c) (**3 puntos**) Sea $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $v(c) := \text{máx}\{c^\top x : \ x \in D\}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y no vacío.

(i) (**1 punto**) Muestre que v está bien definida.
Solución: Como $g_c(x) := c^\top x$ es continua y D es compacto no vacío, por Bolzano-Weierstrass, $v(c)$ es finito para todo $c \in \mathbb{R}^n$, es decir, v está bien definida.

(ii) (**2 puntos**) Muestre que v es convexa.
Solución: Como $h_x(c) := c^\top x$ es convexa y $v(c) = \text{máx}\{h_x(c) : \ x \in D\}$, tenemos que v es convexa pues es el máximo de funciones convexas. También se puede ver por definición.

(d) (**6 puntos**) Sea (P) $\text{mín}\{g(x) : \ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n\}$. Muestre o refute las siguientes afirmaciones:

(i) (**2 puntos**) Si g es continua, D es acotado y (P) tiene valor óptimo finito, entonces (P) tiene solución óptima.

Solución: Falso, basta con $g(x) = x$ y $D = (0, 1)$.

(ii) (**2 puntos**) Si g es continua y convexa, D es convexo y cerrado, y (P) tiene valor óptimo finito, entonces (P) tiene solución óptima.

Solución: Falso, basta con $g(x) = e^x$ y $D = \mathbb{R}$.

(iii) (**2 puntos**) Si g es continua y estrictamente convexa, y D es convexo y acotado, entonces (P) tiene solución única.

Solución: Falso, basta $g(x) = x^2$ y $D = (0, 1)$.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**9 puntos**) Considere el siguiente modelo de optimización:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \{(a_j x_j + b_j y_j + c_j z_j)\, p_j - (x_j + y_j + z_j)\, k_j - Rw\}$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} \{(a_j x_j + b_j y_j + c_j z_j)\, h_j\} \leq G + (H - G)\, w \quad (1)$$

$$x_j\,(1 - w) + x_j \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

$$x_j, y_j, z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

$$w \in \{0, 1\}$$

Considere que a_j, b_j, c_j, p_j, k_j, h_j, con $j = 1, \ldots, n$, y $R > 0$, G y H, tal que $H > G$, son parámetros.

(i) (**2 puntos**) ¿Qué representa la variable w? ¿Cuál es su rol en las restricciones y/o función objetivo?

Solución: La variable w representa una variable binaria que permite que la restricción (1) tenga dos posibles cotas, y en el caso de la función objetivo, puede hacer que su valor disminuya en R unidades. En el caso que $w = 0$, la restricción queda acotada por G y la función objetivo no se ve disminuida en R unidades. En caso que $w = 1$, la restricción se acota por H y el valor de la función objetivo disminuye en R unidades.

(ii) (**2 puntos**) ¿Qué representa la función objetivo? ¿Qué busca determinar?

Solución: La función objetivo busca maximizar la posibilidad de realizar o no las actividades a_j, b_j, c_j con un beneficio de p_j y un costo de k_j, pudiendo existir un costo adicional de R.

(iii) (**3 puntos**) Explique qué significa cada una de las restricciones (1) y (2).

Solución: La restricción (1) considera una cota asociada a un recurso, la cual puede estar definida por G o por H (dependiendo del valor de la variable w). Bajo este escenario, busca determinar la combinación de a_j, b_j, c_j con un uso de recurso de h_j de tal forma que se cumpla la cota (H o G)

La restricción (2) permite "anclar" el valor de al valor de w. Si w vale 0, es factible que la variable x_j valga 0 o 1, en caso contrario, obliga a que la variable x_j sea igual a 0.

(iv) (**2 puntos**) ¿Qué sucede si el lado derecho de la restricción (2) cambia de 1 a 2?

Solución: Si esto sucede, sin importar el valor que tome w, permite que la variable x_j pueda tomar valores 0 o 1.

(b) (**6 puntos**) Usted conoce las siguientes variables binarias:

x_i^t: que toma valor 1 si el paciente $i \in I$ será operado el día $t \in T$, y 0 en cualquier otro caso.

y_j^t: que toma valor 1 si el médico $j \in J$ opera el día $t \in T$, y 0 en cualquier otro caso.

Con la información anterior, y solo usando estas variables, construya matemáticamente las restricciones (de forma lineal) que se indican a continuación:

(i) (**2 puntos**) Se debe garantizar que si al menos un paciente es operado el día t, $\forall t \in T$, entonces ese día al menos un médico debe operar.

Solución: en este caso se deben construir las siguientes restricciones (aunque podrían no colocar la primera de ellas),

$$\sum_{j \in J} y_j^t \leq \sum_{i \in I} x_i^t \quad \forall t \in T.$$

$$x_i^t \leq \sum_{j \in J} y_j^t \quad \forall i \in I, t \in T.$$

(ii) (**2 puntos**) Se sabe que el médico j puede realizar a lo más Q_j operaciones un día cualquiera. Cómo se asegura que cada día opere a lo más un médico y que dicho médico pueda realizar todas las operaciones programadas ese día.

Solución: en este caso se deben construir las siguientes restricciones,

$$\sum_{j \in J} y_j^t = 1 \quad \forall t \in T.$$

$$\sum_{i \in I} x_i^t \leq \sum_{j \in J} Q_j y_j^t \quad \forall t \in T.$$

(iii) (**2 puntos**) Se desea garantizar que si un médico opera alguno de los $|T|$ días, no debe operar menos de R días.

Solución: en este caso se deben construir las siguientes restricciones,

$$R y_j^t \leq \sum_{\theta \in T} y_j^\theta \quad \forall j \in J, t \in T.$$

Pregunta 3 (15 puntos)

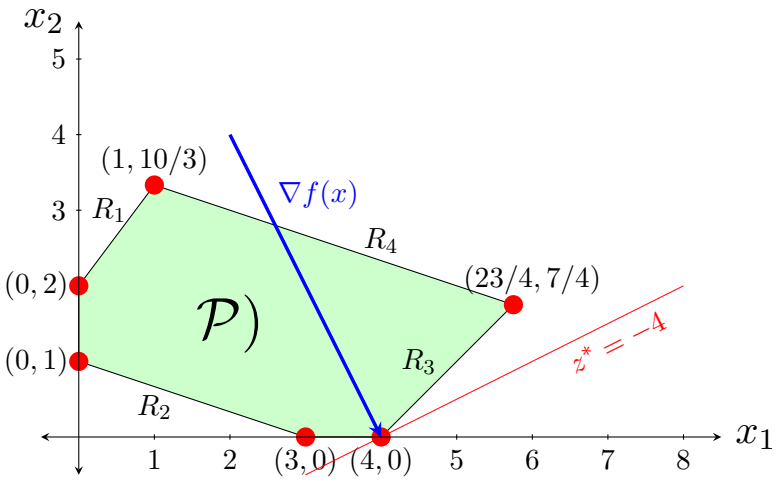
(a) (**8 puntos**) Se tienen los siguientes modelos de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{lrl} \text{mín} & -x_1 + 2x_2 & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array} \qquad Q) \quad \begin{array}{lrl} \text{mín} & -x_1 + 2x_2 & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Resuelva las siguiente preguntas en el contexto del método gráfico.

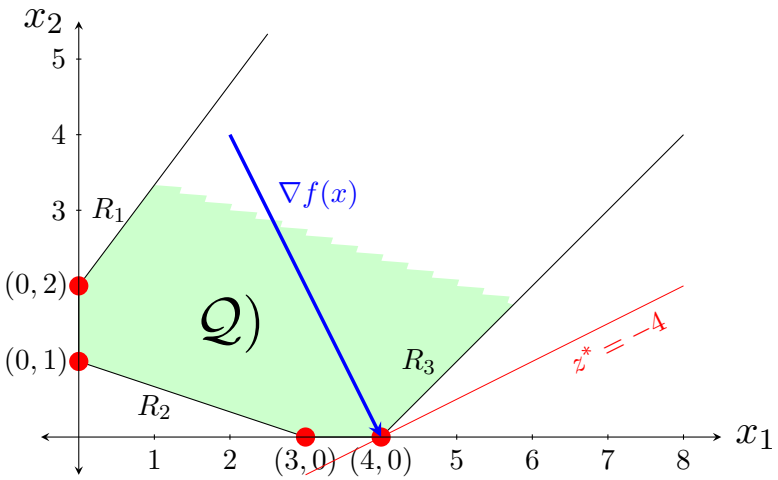
(i) (**3 puntos**) Resuelva los problemas P) y Q) de forma gráfica y en gráficos separados. En ellos, indique claramente la región factible y sus vértices. Además, identifique la solución óptima y su valor, y cuáles son las restricciones activas en el óptimo.

Solución: Al resolver mediante el método gráfico obtenemos lo siguiente:



Para P) obtenemos los vértices $(4,0), (3,0), (0,1), (0,2), (1,10/3)$ y $(21/4, 7/4)$; siendo (4,0) el óptimo del problema P) con un valor de $z = -4$ y donde está activa la restricción (3) y la asociada a la naturaleza de la variable x_2.

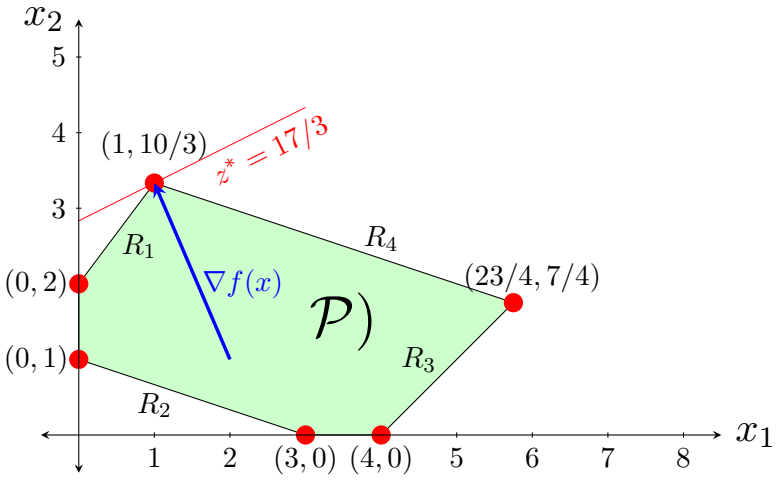
Para Q) los resultados son practicamente equivalentes, esto a pesar de que la región factible es no acotada. La diferencia son los vértices,que serían $(4,0), (3,0), (0,1)$ y $(0,2)$.



(ii) (**2 puntos**) Si la función objetivo del problema P) fuera ahora de maximización, ¿cuál es la solución óptima? Caracterice claramente en forma gráfica la respuesta (Haga un gráfico adicional para este caso).

Solución:

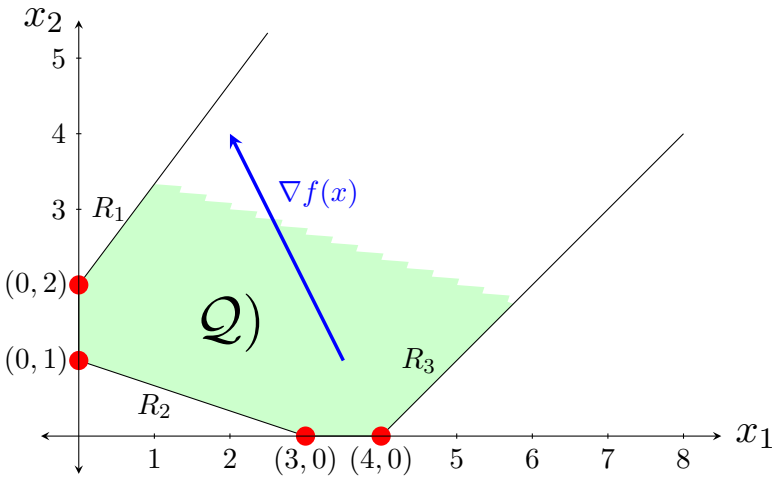
Al realizar el cambio indicado, la región factible y los vértices no cambian, sino que solo en «como mejora la función objetivo» y con este cambio en el nuevo gráfico podemos observar que el nuevo óptimo es el vértice $(1, 10/3)$ y que el valor de la función objetivo sería de $z = 17/3$.



(iii) (**2 puntos**) Si la función objetivo del problema Q) fuera ahora de maximización, ¿cuál es la solución óptima? Caracterice claramente en forma gráfica la respuesta (Haga un gráfico adicional para este caso).

Solución:

Al realizar el cambio indicado, la región factible y los vértices no cambian, sino que solo en «como mejora la función objetivo» y con este cambio en el nuevo gráfico podemos observar que estamos frente a un problema no acotado y por ende no existe solución óptima.



(iv) (**1 punto**) Indique el rango en que puede modificarse el escalar que acompaña a la variable x_2 en la función objetivo del problema Q) de manera que la solución obtenida en (i) no cambie.

Solución: Para que cambie la solución obtenida en (a) para el problema Q), debería la función objetivo al menos igualar una de las pendientes de las restricciones activas y como solo cambiamos el escalar asociado a la variable x_2, solo sería posible igualar la pendiente de la restricción (3). Por lo que el rango en que no cambia la solución es $]1, \infty[$ para dicho escalar.

(v) (**1 punto**) Indique el rango en que puede modificarse el escalar del lado derecho de la restricción (1) del problema Q) de manera que la solución obtenida en (i) no cambie.

Solución: Para que la restricción (1) defina el óptimo del problema Q), esta debe ser una restricción activa y para que cambiando el escalar del lado derecho suceda esto; reemplazamos el óptimo en la restricción a evaluar y dejamos el escalar como incognita:

$$-4 \times 4 + 3 \times 0 \leq b \Rightarrow b \geq -16$$

Luego si decrece más este escalar, el óptimo cambiaría, por lo que el rango en que no cambia la solución es $[-16, \infty[$ para dicho escalar.

(vi) (**2 puntos**) Considere el problema R) dado por

$$R) \quad \begin{array}{lrl} \text{máx} & \frac{c}{e^{-x_1+2x_2}} + 8c & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & |x_1 + 3x_2| \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

donde $c > 0$ es un parámetro dado. Muestre que la solución óptima de R) coincide con la obtenida para P) en (i).

Solución: Dado que $8c$ es una constante aditiva, la podemos sacar de la función objetivo. Además, como $x_1, x_2 \geq 0$, tenemos $|x_1 + 3x_2| = x_1 + 3x_2$, lo que nos lleva a:

$$R_1) \quad \begin{array}{lrl} \text{máx} & \frac{c}{e^{-x_1+2x_2}} & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

De hecho, como $c > 0$, la podemos remover del numerador:

$$R_2) \quad \begin{array}{lrl} \text{máx} & \frac{1}{e^{-x_1+2x_2}} & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

Como el denominador es positivo, podemos tomar su recíproco y pasa a minimización:

$$R_3) \quad \begin{array}{lrl} \text{mín} & e^{-x_1+2x_2} & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

Como la función exponencial es creciente, llegamos a

$$R_4) \quad \begin{array}{lrl} \text{mín} & -x_1 + 2x_2 & \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 & (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

Luego, R) y P) son equivalentes, y por lo tanto se tiene lo deseado.

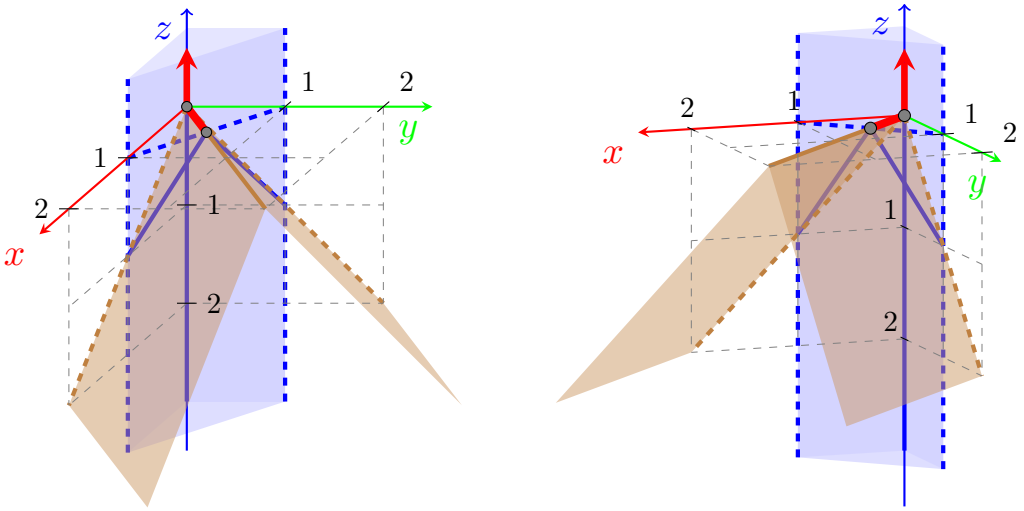
(b) (**4 puntos**) Considere el problema NL) dado por

$$\begin{array}{rll} & \text{máx} & \text{mín}\{x-y, y-x\} \\ NL) & s.a. & x+y \leq 1 \\ & & x, y \geq 0. \end{array}$$

(i) (**2 puntos**) Convierta el problema anterior a uno lineal equivalente.
Solución: Notar que la función objetivo se puede reemplazar por máx z, donde z cumple $z \leq x-y$ y $z \leq y-x$, es decir

$$\begin{array}{rll} & \text{máx} & z \\ & s.a. & x+y \leq 1 \\ L) & & z \leq x-y \\ & & z \leq y-x \\ & & x, y \geq 0. \end{array}$$

(ii) (**2 puntos**) Resuelva gráficamente el problema resultante en (i).
Solución: El gráfico resultante queda en 3 dimensiones. Los grafos a continuación representan la situación, en que las líneas punteadas presentan la intersección entre cada restricción y los planos principales (planos xy, xz e yz), las líneas completas presentan intersección entre un par de planos, el vector rojo presenta el vector gradiente del problema, y el segmento rojo el segmento solución. Cabe mencionar que la restricción de la cara azul apunta hacia atrás (x e y negativos), y ambas caras cafés apuntan hacia abajo (z negativos).



Así, la solución quedará dada por la expresión a continuación, generando un valor óptimo de $v(L) = v(NL) = 0$:

$$S = \left\{ x : x = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 4 (15 puntos)

Los profesores también han sucumbido ante el juego PokémonGo. Juntos han enlistado en un conjunto I a los $|I|$ Pokémones de las comunas cercanas al campus, según los radares analizados. La

ambición del juego entra en acción, y entre ellos ha comenzado una competencia para determinar quién se convierte primero en un maestro Pokémon (considerando los Pokémones cercanos al campus).

Claramente, el hecho de que un profesor esté más lejos de eso que otro, afectará en su humor. Ustedes no quieren que eso pase y, para ello, desean sugerirles a los profesores cómo distribuirse los distintos Pokémones con tal de que ninguna sección "salga perdiendo". De esta manera, plantean el problema de dividir los Pokémones en 7 grupos (un grupo para cada uno de los 7 profesores) para que ellos vayan en busca de atrapar solamente a los correspondientes a su lista.

Ustedes conocen la lista de completa I de Pokémones, y asocian una utilidad de u_i al hecho de atrapar el Pokémon $i \in I$. Por otro lado, dadas las características de la aplicación para atrapar a los Pokémones, los distintos profesores se deben trasladar físicamente por las comunas, lo que genera cierta des-utilidad asociada al tiempo invertido en ello. Así, ustedes también conocen la des-utilidad que genera moverse desde la ubicación de un Pokémon $i \in I$ a la de otro Pokémon $j \in I$, la que denotan como $d_{ij} = d_{ji}$. Además, se considera la des-utilidad de moverse desde la universidad (denotada s) a un Pokémon $i \in I$, denotada como $d_{si} = d_{is}$. Tanto las utilidades y des-utilidades no varían de profesor en profesor. Asuma que no existen los tramos $a \to a, \forall a \in I \cup \{s\}$, que si a un profesor le corresponde el Pokémon $i \in I$, entonces es seguro que lo atrapará, y que $\sum_{i \in I \cup \{s\}} \sum_{j \in I \cup \{s\}} d_{ij} < \sum_{i \in I} u_i$.

Así, su deber es determinar la forma de dividir los Pokémones entre los profesores e identificar cuál es la ruta que debe seguir cada profesor para atrapar todos los Pokémones asociados a su lista (por determinar), de modo que se maximice el beneficio conjunto (de todos los profesores). Para ello, considere que cada profesor sólo puede salir y volver a la Universidad una vez, para que así pueda seguir con sus deberes académicos, y que a cada profesor se le asignarán al menos 2 Pokémones. Sin embargo, para asegurarse que ninguna sección "salga más perjudicada" ante el humor de su profesor, usted quiere asegurarse de que aquél profesor que obtiene la menor utilidad entre todos no tenga menos que el 70 % de la utilidad del profesor que más utilidad logró.

(a) (3 puntos) ¿A qué tipo de problema podría asociarse el actual?

(b) (12 puntos) Desarrolle un modelo de programación lineal entera que le sirva para determinar la situación anterior. Para ello, identifique claramente las variables, restricciones y función objetivo del modelo. Si utiliza algún conjunto o índice no definido en el enunciado, explicite su definición.

Solución Pregunta 4

a) El problema que buscaría resolver es básicamente un problema que buscaría maximizar la utilidad de 7 Problemas del Vendedor Viajero en conjunto.

b) Dado que es necesario conocer qué Pokémon se asocia a qué profesor, además del orden en que cada uno visita a los Pokémones de sus listas, el modelo sería:

VARIABLES

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor } k = 1, \ldots, 7 \text{ viajará desde el Pokémon } i \in I \cup \{s\} \text{ (o desde la Universidad), inmediatamente hacia el Pokémon } j \in I \cup \{s\} \text{ (o hacia la Universidad).} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$y_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor } k = 1, \ldots, 7 \text{ atrapará al Pokémon } i \in I. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Función Objetivo

$$\text{máx} \quad \sum_{k=1}^{7} \left(\sum_{i \in I} u_i y_i^k - \sum_{i \in I \cup \{s\}} \sum_{j \in I \cup \{s\}} x_{ij}^k d_{ij} \right)$$

Restricciones

R1) Cada Pokémon debe ser atrapado por un sólo profesor. Para ello, un profesor debe salir de su ubicación 1 sola vez.

$$\sum_{k=1}^{7} y_i^k = 1 \qquad \forall i \in I$$

R2) En cada ubicación de Pokémon, hay una sola llegada a esa ubicación.

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{ij}^k = 1 \qquad \forall j \in I$$

R3) En cada ubicación de Pokémon, hay una sola salida de esa ubicación.

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{ji}^k = 1 \qquad \forall j \in I$$

R4) Todos los profesores salen y llegan a la Universidad. En otras palabras, hay 7 salidas y entradas desde la Universidad.

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{is}^k = 7$$

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{si}^k = 7$$

R5) El profesor que entra o sale de la ubicación de un Pokémon debe ser el que lo tiene en su lista. Así, no puede ni llegar ni salir a su ubicación si no se le fue asignado.

$$x_{ij}^k \leq y_i^k \qquad \forall i, j \in I : j \neq i \qquad \forall k = 1, \ldots, 7$$

$$x_{ji}^k \leq y_i^k \qquad \forall i, j \in I : j \neq i \qquad \forall k = 1, \ldots, 7$$

R6) Evitar que un profesor arme sub-tours dentro de sus Pokémones asignados. Se busca que esta restricción se cumpla si un subconjunto U de Pokémones es un **subconjunto** que abarca sólo Pokémones **en su asignación** (esto logrado en el término que multiplica el M grande). U se define como cualquier subconjunto de Pokémones.

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in U} x_{ij}^k \leq |U| - 1 + M \left(|U| + 1 - \sum_{i \in U} y_i^k - y_j^k \right) \quad \forall U : 2 \leq |U| \leq |I| - 2 \quad \forall j \in I \backslash U \quad M \gg 0$$

R7) Balanceo del nivel de beneficio entre distintos profesores.

$$\frac{7}{10} \left(\sum_{i \in I} u_i y_i^k - \sum_{i \in I \cup \{s\}} \sum_{j \in I \cup \{s\}} x_{ij}^k d_{ij} \right) \leq \sum_{i \in I} u_i y_i^{\widehat{k}} - \sum_{i \in I \cup \{s\}} \sum_{j \in I \cup \{s\}} x_{ij}^{\widehat{k}} d_{ij} \qquad \forall k, \widehat{k} = 1, \ldots, 7$$

R8) Al menos 2 Pokémones por profesor.

$$\sum_{i \in I} y_i^k \geq 2 \qquad \forall k = 1, \ldots, 7$$

R9) Naturaleza de las variables

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in I \cup \{s\} \qquad \forall k = 1, \ldots, 7$$
$$y_i^k \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \qquad \forall k = 1, \ldots, 7$$