PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez - J. González

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 23 de mayo.

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 23 de mayo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (13 puntos)

a) (2 puntos) Suponga que Pedro y Pablo van a jugar el juego de las estrategias. Este es un juego de apuestas que consiste en varias etapas en las que cada jugador puede elegir qué estrategia jugarle al contrincante. Dependiendo qué estrategia elige cada uno, las ganancias de cada etapa serán variables. Pedro tiene N estrategias para jugar y Pablo M. Si en una etapa Pedro juega la estrategia i y Pablo la j, las ganancias (o pérdidas) para Pedro serán p_{ij} (si $p_{ij} < 0$ la ganancia será para Pablo). Pedro quiere determinar con qué probabilidad jugar la estrategia i. Entonces, asumiendo que Pedro es averso al riesgo el problema que debe resolver para determinar la probabilidad de jugar cada estrategia es:

$$P) \qquad \text{máx} \quad \left(\min_{j=1,\dots,M} \left\{ \sum_{i=1}^{N} x_i p_{ij} \right\} \right)$$

$$s.a.$$
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} x_i &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponiendo que el comportamiento de Pablo es igual al de Pedro, demuestre formalmente que su problema es el dual del problema de Pedro.

b) (4 puntos) Considere los siguientes problemas de optimización:

$$P1) \qquad \text{máx} \quad c^T x$$

$$s.a.$$
$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$P2) \qquad \text{mín} \quad c^T x$$

$$s.a.$$
$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

con $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}, c \in \mathbb{R}_+^n$ y $b \in \mathbb{R}_+^m$. Usando argumentos de dualidad, demuestre que al menos uno de los dos problemas es infactible.

c) (7 puntos) Considere el siguiente problema de maximización de ganancias de una fábrica:

$$P) \qquad \text{máx} \quad -x_1 - 2x_2 + 3z_1 - 3I + 4(I + x_2)$$

$$s.a.$$
$$\begin{aligned} I + z_1 - x_1 &= 0 && (1) \\ x_1 - z_1 &\geq 0 && (2) \\ z_1 &\leq 10 && (3) \\ I + x_2 &\leq 20 && (4) \\ x_1 + 2x_2 - I &\geq 20 && (5) \\ x, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Siendo z el vector de venta en cada período, x el de producción e I el de inventario del período 1 al 2. Nótese que z_2 no es necesario, pues será igual al inventario más lo que se produce en 2, sin embargo, sí tiene un beneficio equivalente a 4 unidades. La primera restricción es de continuidad, la segunda es que no se venda más de lo que se produce, la tercera y cuarta que no se venda más que la demanda y la quinta es una restricción del directorio de la fábrica.

i) (2 puntos) Formule el problema dual de P)

ii) (1 punto) Sabiendo que P) es factible y que en su óptimo la restricción del directorio es innecesaria, determine mediante D) (sin resolver el problema) si el negocio para la fábrica es rentable, siendo D) el problema dual de P).

iii) (2 puntos) Con respecto al óptimo de P), se sabe que no guarda inventario del período 1 al período 2, y además se sabe que si la demanda del período 2 aumenta en una cantidad δ marginal, entonces el beneficio para la fábrica será de 2δ. En base a la información recién entregada y a la entregada en *ii*), reconstruya la solución óptima de P) y D).

iv) (2 puntos) Suponga que ahora existe la posibilidad de producir más unidades en cada período a un costo de μ, con la condición de que estas unidades extra que se producen, sean la misma cantidad en ambos períodos. ¿Cuánto es lo mínimo que puede valer μ sin que cambie la solución encontrada en *iii*)?

Solución Problema 1.

a) En primer lugar, considerando que el comportamiendo de Pablo es igual al del Pedro, su problema es el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \textit{Pablo)} & \max\limits_{y} \left\{ \min\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j r_{ij} \right\} & \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 & \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

con $r_{ij} = -p_{ij}$, porque si Pedro hace la estrategia i y Pablo la j, entonces la ganancia por esa jugada para Pedro será la pérdida para Pablo.

Luego, se debe demostrar que *Pablo*) es el dual de P). Encontrando el equivalente lineal de P):

$$\begin{array}{rcl} & P) \quad \max \mu & \\ s.a. & \sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \geq \mu, \forall j = 1, \ldots, n & \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Dualizándolo:

$$\begin{array}{rcl} & D) \quad \min \eta & \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} \pi_j p_{ij} + \eta \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m & \\ & \sum_{j=1}^{n} -\pi_j = 1 & \\ & \pi \leq 0 & \end{array}$$

Tranformándolo con $\pi' = -\pi$:

$$\begin{array}{rcl} & D) \quad \min \eta & \\ s.a. & \eta \geq \sum_{j=1}^{n} \pi'_j p_{ij}, \forall i = 1, \ldots, m & \\ & \sum_{j=1}^{n} \pi'_j = 1 & \\ & \pi' \geq 0 & \end{array}$$

Finalmente, tomando $p_{ij} = -r_{ij}$ D) puede escribirse como:

$$\textit{D)} \qquad \max_{\pi} \left\{ \min_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} \pi_j r_{ij} \right\}$$

$$\begin{array}{lrcl} s.a. & \sum_{j=1}^{n} \pi_j & = & 1 \\ & \pi & \geq & 0 \end{array}$$

En que D) es exactamente *Pablo*) con $\pi = y$, y se demuestra lo pedido.

b) La infactibilidad de $P2$) es trivial, sin embargo, se piden argumentos basados en dualidad, por lo que se considerará la mitad del puntaje a demostraciones del tipo: $P2$) es infactible, pues $A, c, b > 0, x \leq 0$. Luego, $Ax \leq 0 \ngeq b$ y se demuestra lo pedido.

Cualquier demostración (correcta) que use argumentos de dualidad será considerada buena. En particular, esta es una posibilidad:

Considere las siguiente desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{máx}\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \text{mín}\{b^T y | A^T y \geq c, y \geq 0\} && (1) \\ &\leq \text{máx}\{b^T y | A^T y \geq c, y \geq 0\} && (2) \\ &\leq \text{mín}\{c^T x | Ax \geq b, x \leq 0\} && (3) \end{aligned}$$

en que el primer problema equivale a $P1$) y el cuarto problema equivale a $P2$). La primera desigualdad se cumple por teorema débil de dualidad, la segunda se cumple pro definición y la tercera por teorema débil de dualidad. Estas desigualdades son válidas, mientras alguno de los problemas intermedios no sean infactibles o no acotados.

Suponga que $P1$) es factible (de otra forma, la demostración es trivial). De esta forma, el problema $P1$) tiene dominio acotado, pues $A, c, b, x \geq 0$ y, por lo tanto, tiene solución óptima con valor no negativo. Note que es imposible que $x^* = 0$, porque esto significa $b^T y^* = 0 \leftrightarrow A^T y = 0 \ngeq c$.

Luego, su dual es factible y por teorema fuerte de dualidad, $b^t y^* = c^T x^* > 0$, siendo x^*, y^* soluciones óptimas del primal y el dual, respectivamente. Además, se tiene que $A^T y^* > 0$, pues y^* es factible. Finalmente, por teorema visto en clases:

$$\text{Si existe } h : A^T h \geq 0, c^T h > 0 \text{ entonces } \text{máx}\{b^T y | A^T y \geq c, y \geq 0\} \text{ es no acotado.}$$

Tomando $y^* = h$, se tiene que el problema de (2) es no acotado, y por lo tanto, $P2$) es infactible.

c) *i*)

$$D) \qquad \text{mín} \quad 10y_3 + 20y_4 + 20y_5$$

$$\begin{array}{lrcl} s.a. & & & \\ & -y_1 + y_2 + y_5 & \geq & -1 \\ & y_4 + 2y_5 & \geq & 2 \\ & y_1 - y_2 + y_3 & \geq & 3 \\ & y_1 + y_4 - y_5 & = & 1 \\ & y_2, y_5 & \leq & 0 \\ & y_3, y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

ii) Por enunciado, se sabe que la restricción de la empresa es innecesaria, es decir, está inactiva y por THC $y_5 = 0$, con lo que el valor óptimo de D) es necesariamente mayor o igual a 0 (ya que $y_3, y_4 \geq 0$). Finalmente, por teorema débil de dualidad el negocio de la fábrica es rentable porque el valor óptimo de su negocio es al menos mayor o igual a 0.

iii) Del enunciado se sabe que $y_4 = 2$, por lo tanto, $y_1 = -1$ (usando que $y_5 = 0$). Luego, se tienen las siguiente inecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} y_2 & \geq & -2 \\ -y_2 + y_3 & \geq & 4 \\ y_2 & \leq & 0 \\ y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Asumiendo que la solución que se busca es una base, entonces existen 2 soluciones posibles: $(y_2, y_3) = (0, 4)$, o, $(y_2, y_3) = (-2, 2)$. Reemplazando estas dos soluciones en la función objetivo de D), es fácil ver que la solución óptima de este problema es con $y_3 = 2$ y será $y = (-1, -2, 2, 2, 0)$. De esto, por THC y por $I = 0$, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} z_1 - x_1 & = & 0 \\ x_1 - z_1 & = & 0 \\ z_1 & = & 10 \\ x_2 & = & 20 \\ x_1 + 2x_2 & \geq & 20 \\ x, z & \geq & 0 \end{array}$$

Finalmente, se llega a que la solución óptima de P) es: $(x_1, x_2, z_1, I) = (10, 20, 10, 0)$.

iv) Se le puede agregar a P) una variable u que represente la cantidad de unidades extra producidas:

$$P) \qquad \text{máx} \quad -x_1 - 2x_2 + 3z_1 - 3I + 4(I + x_2) - 2\mu u$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcll} I + z_1 - x_1 - u & = & 0 & (1) \\ x_1 + u - z_1 & \geq & 0 & (2) \\ z_1 & \leq & 10 & (3) \\ I + x_2 + u & \leq & 20 & (4) \\ x_1 + 2x_2 - I & \geq & 20 & (5) \\ x, z, u & \geq & 0 & \end{array}$$

La restricción equivalente a la variable u en el dual será: $-y_1 + y_2 + y_4 \geq -2\mu$. Reemplazando en el óptimo obtenido $-y_1 + y_2 + y_4 = 1 \geq -2\mu$, entonces si $\mu > -\frac{1}{2}$ no habrá cambio en la solución óptima del primal.

Problema 2. (14 puntos)

Alejandra se ha hecho muy famosa con su venta de alfajores gourmet. Sin embargo, últimamente no ha podido vender todo lo que le gustaría porque está muy ocupada con sus ramos de la universidad. Generalmente, sus alfajores tienen mucho éxito en fechas importantes como Navidad, el Día de los Enamorados y otras celebraciones, ya que los consumidores le compran alfajores para regalar. Es por esto que ha decidido realizar una venta especial para el Día de la Madre.

El objetivo de Alejandra es obtener las mayores ganancias que pueda con los 40 alfajores que alcanzó a hacer debido a su escaso tiempo libre. Los alfajores no se venden de forma individual, sino que en cajas. Alejandra puede armar dos tipos de cajas, una es de 10 alfajores y en la otra de 7 alfajores. Estas cajas se venden en \$17.000 y \$12.000 respectivamente, y Alejandra solo dispone de material para armar a lo más 5 cajas, sin importar el tipo.

a) (2 puntos) Construya un modelo de programación lineal entera que le permita a Alejandra maximizar sus ingresos por la venta de alfajores. Escriba la relajación lineal del problema y resuélvala.

b) (2 puntos) Utilice la siguiente regla tipo *Greedy* para encontrar una solución al problema entero; se debe elegir primero la variable de más peso en la función objetivo, considerando los pesos como los costos asociados a las variables. Obtenga también una solución por redondeo simple de la solución relajada.

c) (3 puntos) Resuelva el problema entero mediante el algoritmo Branch & Bound. En cada iteración señale:

- ◇ Subproblema utilizado.
- ◇ Valor de las variables y función objetivo en el óptimo encontrado.
- ◇ Valor del incumbente.

Identifique las ramas que se podan e indique por qué. En caso de tener más de una variable fraccionaria, priorice aquella asociada a la venta de cajas de 10 alfajores, y comience resolviendo siempre los subproblemas provenientes de restricciones de menor o igual. En su respuesta debe incluir el árbol asociado.

d) (1 punto) Compare la solución obtenida a partir de Branch & Bound con las que obtuvo en la parte *b*).

e) (2 punto) Realice un gráfico del problema. Encuentre dos cortes de Gomory válidos y grafíquelos.

f) (2 puntos) Analice si los siguientes planos cortantes son válidos para el problema:

i) $y \geq -\frac{3}{80}x + \frac{12}{25}$
ii) $x \leq \frac{10}{3}$

Donde x es la variable asociada a las cajas de 10 unidades e y es la variable asociada a las cajas de 7 unidades.

g) (2 puntos) ¿Es posible generar planos cortantes válidos (distintos a los de *e*) y *f*))? Explique.

Solución Problema 2.

a) Sea

x: número de cajas de 10 alfajores
y: número de cajas de 7 alfajores

El problema de optimización que debe resolver Alejandra es:

$$P) \qquad \text{máx} \quad \$17.000x + \$12.000y$$

$$s.a. \quad \begin{array}{rcl} 10x + 7y & \leq & 40 \\ x + y & \leq & 5 \\ x, y & \in & \mathbb{Z}_0^+ \end{array}$$

La relajación lineal de este problema entero corresponde a

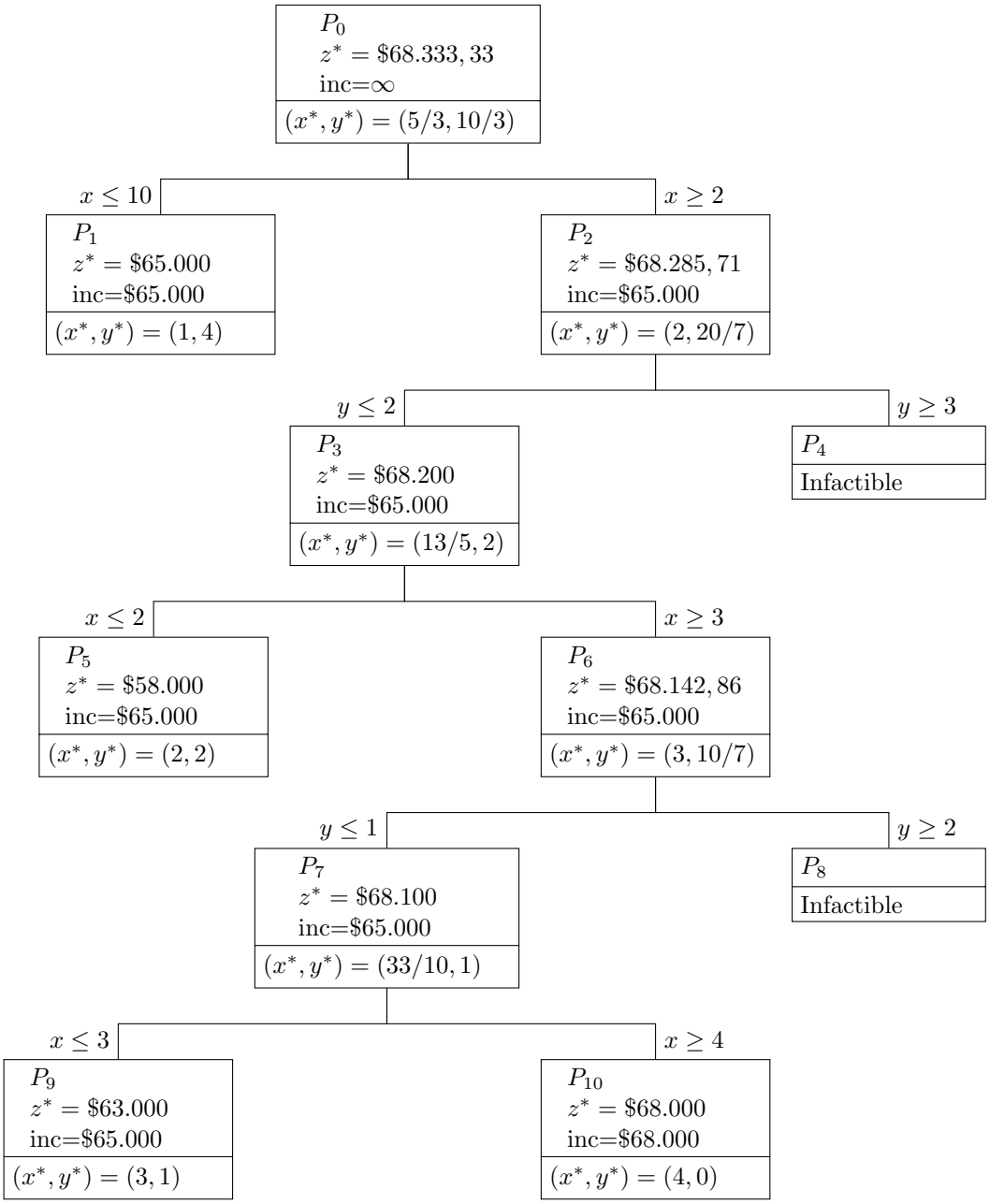
$$PR) \qquad \text{máx} \quad \$17.000x + \$12.000y$$

$$s.a. \quad \begin{array}{rcl} 10x + 7y & \leq & 40 \\ x + y & \leq & 5 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo la relajación lineal, obtenemos que $(x, y) = (5/3, 10/3)$ y $z = 205.000/3$

b) De acuerdo al método de *Greedy*, se obtiene que la solución al problema entero es $(x, y) = (4, 0)$. Utilizando redondeo simple de la solución obtenida al problema relajado, se obtiene: $(x, y) = (2, 3)$

c) El árbol de B&B quedará:



En cada nodo se especifica el incumbente hasta ese momento y la restricción que se agrega para formar cada subproblema. El subproblema P_1 no se sigue ramificando dado que se alcanza una solución entera, cuyo valor óptimo corresponderá al primer incumbente. Se ramifica P_2 ya que su valor óptimo es mayor al incumbente y no es entero. El nodo P_4 se poda ya que el dominio se vuelve infactible al agregar la restricción $y \geq 3$. El nodo P_5 se poda dado que se alcanza una solución entera con valor óptimo menor al incumbente. El nodo correspondiente al subproblema P_8 también se poda ya que es infactible. P_9 entrega una solución entera, sin embargo, su valor objetivo es menor al valor del incumbente, por lo que se poda. Finalmente, se obtiene la solución óptima a partir del subproblema P_10, con valor óptimo $z^* = \$68.000$ y variables óptimas $(x^*, y^*) = (4, 0)$.

d) La solución obtenida mediante la regla tipo *Greedy* corresponde a un valor objetivo de $z = \$68.000$, que en este caso se corresponde con la solución óptima obtenida mediante el algoritmo Branch & Bound. En el caso de la solución obtenida por redondeo simple de la relajación lineal del problema, si bien se obtiene un mayor valor objetivo que mediante B&B, correspondiente a $z = \$70.000$, el punto asociado a esta solución no se encuentra dentro del espacio factible de P).

e) Para realizar cortes de Gomory, escribimos el problema relajado en forma estándar

$$
\begin{aligned}
PR) \qquad & \text{máx} \quad \$17.000x + \$12.000y \\
s.a. \quad & \\
& 10x + 7y + h_1 = 40 \\
& x + y + h_2 = 5 \\
& x, y, h_1, h_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Los cortes de Gomory están dados por la expresión

$$\sum_{j \in NB} (\bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor)(x_R)_j \geq (\bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor)$$

Luego, se pueden realizar los siguientes cortes

$$\left(\frac{1}{3} - \lfloor \frac{1}{3} \rfloor\right) h_1 + \left(-\frac{7}{3} - \lfloor -\frac{7}{3} \rfloor\right) h_2 \geq \frac{5}{3} - \lfloor \frac{5}{3} \rfloor$$

$$\left(-\frac{1}{3} - \lfloor -\frac{1}{3} \rfloor\right) h_1 + \left(\frac{10}{3} - \lfloor \frac{10}{3} \rfloor\right) h_2 \geq \frac{10}{3} - \lfloor \frac{10}{3} \rfloor$$

Resolviendo y reemplazando las variables de holgura, se obtienen las desigualdades

$$4x + 3y \leq 16$$

$$7x + 5y \leq 28$$

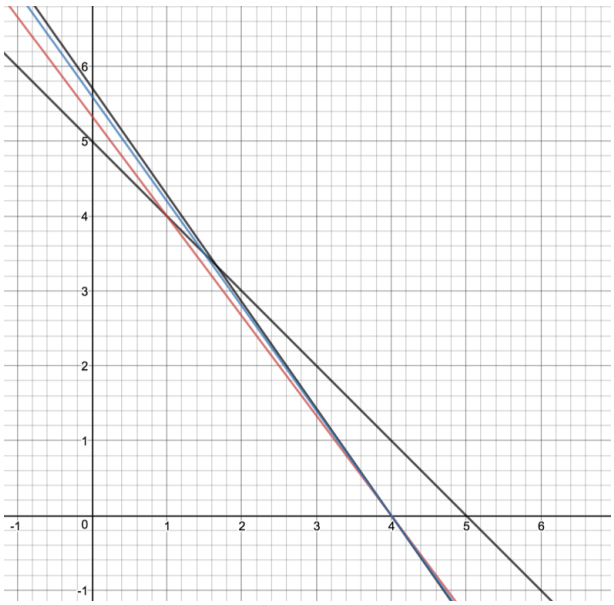


Figura 1: Gráfico P) con Cortes de Gomory

En el gráfico, las líneas negras representan las restricciones del problema. La línea de color rojo es el primer corte de Gomory y la línea color azul el segundo. Se puede ver que los cortes de Gomory no cortar ninguna solución entera del espacio factible de P).

f) Se grafican los planos cortantes i) y ii) para analizar si estos son válidos para P)

Nuevamente en el gráfico las líneas negras corresponden a las restricciones de P), que delimitan el espacio factible del problema. La línea verde corresponde al plano cortante i). Se puede ver que este no es válido puesto que corta soluciones enteras del espacio factible, dejando fuera a los puntos

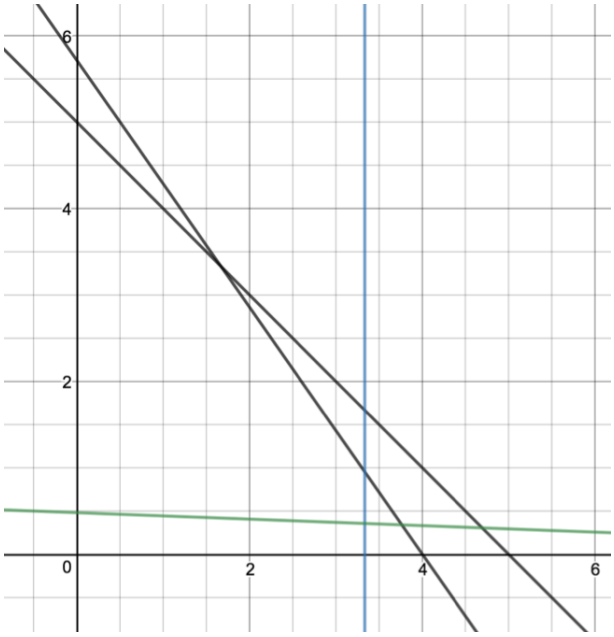


Figura 2: Gráfico P) planos cortantes

$(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)$ y $(4,0)$. La línea azul representa al plano ii), este tampoco corresponde a un corte válido, ya que corta a la solución entera $(4,0)$, que además, es la solución óptima del problema.

g) Dado que el espacio factible está compuesto por 3 puntos extremos enteros, es difícil encontrar planos cortantes que sean válidos. Sin embargo, algún plano cortante ubicado entre los cortes de Gomory encontrados en e) puede servir. Por ejemplo, el siguiente plano cortante se ilustra en la Figura 3

$$y \leq -\frac{5.5}{4} + 5.5$$

En el gráfico, las líneas azules corresponden a los cortes de Gomory y la línea anaranjada corresponde al plano cortante válido encontrado. Se puede concluir, que existirán infinitos planos cortantes válidos para cortar el espacio factible de P) sin dejar fuera soluciones enteras.

Problema 3. (15 puntos)

a) (12 puntos) Determine si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifique rigurosamente:

- i) (2 puntos) La relajación lineal de un problema binario siempre será igual a su envoltura convexa.
- ii) (2 puntos) Suponga que es posible enumerar el dominio de un problema lineal entero en K soluciones distintas. Entonces, si se aplicara el método de Branch & Bound sobre este problema, la máxima cantidad de subproblemas que habrá que resolver estará acotada por K.
- iii) (2 puntos) Suponga un problema de optimización lineal mixto (con variables enteras y variables continuas), en el cual se sabe que su relajación lineal es igual a la envoltura convexa del mismo. Entonces, si se aplica Branch & Bound sobre este problema, se llegará a la solución óptima en la resolución del primer subproblema.
- iv) (2 puntos) Suponga que P) es un problema de optimización lineal entero y D) es el dual de su relajación lineal. Si a D) se le agregara la restricción de integralidad a cada una de sus variables, entonces el valor óptimo de este problema sería igual al valor óptimo de P).
- v) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{mín} \quad c^T x$$

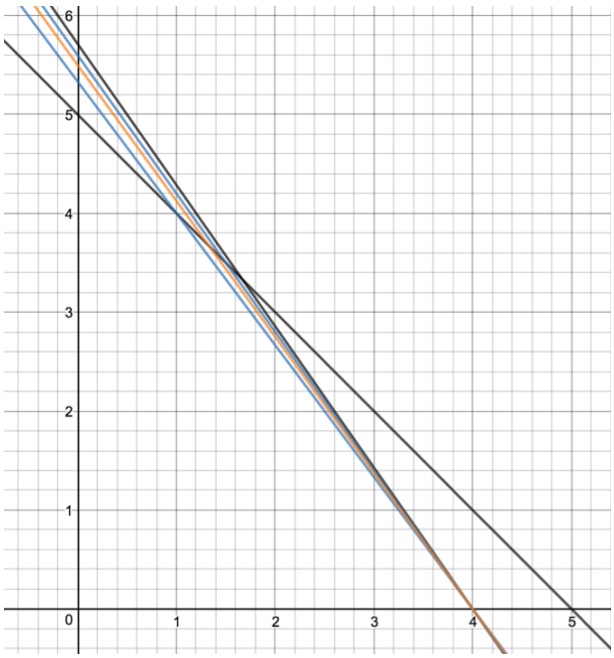


Figura 3: Gráfico P) plano cortante válido

$$\begin{array}{rcl} s.a. & & \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

con dominio no vacío, valor óptimo acotado y sin vértices sobredeterminados. Sea D) el problema dual de P). Entonces, la solución de las variables duales que resuelve las ecuaciones de holgura complementaria para cada vértice de P), define bases para D).

vi) (2 puntos) Si un problema de optimización lineal continuo P) tiene dominio infactible, entonces su problema dual tiene valor óptimo no acotado.

b) (3 puntos) Considere un problema de optimización lineal continuo P) con dominio no vacío. Demuestre matemáticamente que si para todo vértice factible de P), las soluciones de las variables duales que resuelven las ecuaciones de holgura complementaria son infactibles en el problema dual, entonces el óptimo de P) es no acotado.
Nota: Se espera que la demostración sea matemática, es decir, que haya manejo de ecuaciones. No se aceptarán demostraciones con sólo palabras.

Solución Problema 3.

a) *i*) Esta afirmación es falsa. Basta tomar el siguiente contraejemplo:

$$P) \qquad \text{máx} \quad c_1x + c_2y$$

$$\begin{array}{rcl} s.a. & & \\ x + y & \leq & \frac{1}{2} \\ x, y & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

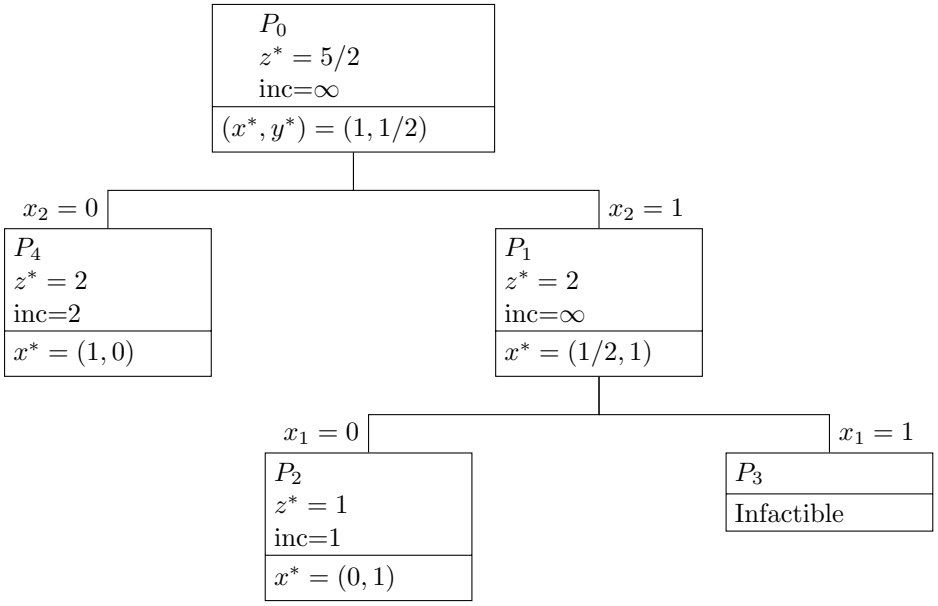
El origen es el único punto perteneciente a la envoltura convexa, sin embargo, el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sí pertenece a la relajación lineal.

ii) Esta afirmación es falsa. Se puede tomar el siguiente contraejemplo.

$$P) \qquad \text{máx} \quad 2x + y$$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.a. & & & \\
 & y + x & \leq & \frac{3}{2} \\
 & x, y & \in & \mathbf{0}, \mathbf{1}
\end{array}
$$

El árbol de B&B quedará:



Las soluciones se pueden enumerar en $K = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ con $|K| = 3$, pero se resolvieron 4 problemas para el B&B y se demuestra lo pedido.

iii) Esta afirmación es verdadera. La envoltura convexa se define como el poliedro cuyos vértices son soluciones pertenecientes al dominio, y que además contiene a todos las soluciones factibles del dominio. Luego, considerando que la relajación lineal es igual a la envoltura convexa, si se resuelve el problema relajado la solución óptima de este necesariamente pertenecerá el dominio (porque el problema es lineal y la solución óptima será un vértice de la relajación lineal), por lo que al aplicar B&B se llegará al óptimo del problema original en la resolución del primer subproblema.

iv) Esta afirmación es falsa. Sea PL) la relajación lineal de P), DE) el problema entero de D) y $v(\cdot)$ el valor óptimo de un problema dado. Supongamos que P) es de minimización, entonces se cumple:

$$v(P) \geq v(PL) \geq v(D) \geq v(DE)$$

Luego, basta encontrar cualquier problema que implique desigualdad estricta para alguna de las relaciones anteriores.

v) Esta afirmación es verdadera. La formulación del dual es la siguiente:

$$
\begin{array}{lrcl}
D) & \text{máx} & b^T y & \\
s.a. & & & \\
 & A^T y & \leq & c \\
 & y & \leq & 0
\end{array}
$$

y las ecuaciones de HC:

$$x_i^T (c - A_i^T y) = 0 \forall i = 1, \ldots, n; y_j^T (b - A_j x) = 0, \forall j = 1, \ldots, m$$

Suponga que $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Nótese que la condición para definir una base (o vértice) en el dual es que las cantidad de restricciones inactivas más la cantidad de variables negativas sea menor o igual a m.

Sea i la cantidad de variables distintas de 0 en un vértice cualquiera del primal y j la cantidad de restricciones inactivas. Como se está en un vértice no sobredeterminado, necesariamente $j + i = n$.

Las j restricciones inactivas, implican j variables duales igual a 0, y las i variables positivas implican i restricciones activas en el dual. La cantidad de restricciones más variables en el dual es igual a $m+n$, luego la cantidad de restricciones inactivas más la cantidad de variables negativas, es a lo más $m+n-n=m$, con lo que se demuestra que las variables duales que satisfacen las ecuaciones de HC para un vértice del primal, definen una base para el dual.

vi) Esta afirmación es falsa. Considere el siguiente problema y su dual:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & 2x_1 + x_2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 & \geq 2 \\ & x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & \geq 0 \\ & x_2 & \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} D) & \text{máx} & 2y_1 + y_2 \\ s.a. & & \\ & y_1 + y_2 & \geq 2 \\ & y_1 + y_2 & \leq 1 \\ & y_1 & \leq 0 \\ & y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Se puede demostrar trivialmente que ni P) ni D) son facribles, con lo que se cumple lo pedido.

b) Lo pedido, es equivalente a demostrar que si P) tiene valor óptimo acotado, entonces existe al menos una solución factible en el dual que cumple las ecuaciones de Holgura Complementaria para algún vértice factible del primal.

Entonces, considere un problema de optimización P) en su forma estándar con B su base óptima, x^* su solución óptima, y x_B^* el vector óptimo correspondiente a las variables básica. Las ecuaciones de holgura complementaria para P) serán:

$$x^T(c - A^T y) = 0$$

Luego, tomando el vector $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ y planteando la ecuación de HC para x^*:

$$x^{*T}(c - A^T\pi) = x^{*T}\left(c - A^T {B^{-1}}^T c_B\right) = c^T x^* - (B^{-1}Ax^*)^T c_B = c_B^T x_B^* - c_B^T x_B^* = 0$$

En el penúltimo paso se uso el hecho de que $B^{-1}Ax = x_B$ y que $c^T x = c_B^T x_B$. Ambos se deducen del hecho que las variable no básicas son igual a 0. Ahora, basta demostrar que π pertenece al dual para comprobar lo pedido.

Por condición de optimalidad de PL, se tiene que $c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0$. Luego,

$$c^T - c_B^T B^{-1} A = c^T - A^T\pi \geq 0 \Longrightarrow A^T\pi \leq c$$

que es precisamente el dominio del problema dual, y se demuestra que π es un vector factible en el problema dual, y que además cumple las ecuaciones de HC para un vértice factible del primal (x^*). Con esto, se demuestra que si P) es acotado, entonces siempre existe al menos una solución factible del dual que cumple las ecuaciones de HC para el vértice óptimo del primal. Finalmente, se corrobora lo pedido.

Problema 4. (18 puntos)

a) (10 puntos) Suponga que usted es el gerente general de la nueva aerolínea Low Cost SuperJET y se le presenta el siguiente problema. Actualmente, posee una flota de N aviones, cada uno con capacidad K, y un conjunto C de ciudades dentro de las que opera. Suponga que existen rutas abiertas para cada

par de ciudades (i, j) con $i, j \in C : i \neq j$. Por otro lado, la demanda para cada ruta (i, j) en la hora t de despegue será de d_{ij}^t. Al igual que el resto de las aerolíneas Low Cost, SuperJET no opera con escalas, es decir, un avión no puede subir a una persona que quiera viajar de i a j, si es que pasa entre medio de i y j por otra ciudad k. Considere que los aviones pueden moverse entre ciudades de 2 formas; relocalización sin pasajeros y operando rutas con pasajeros. El tiempo de viaje entre cada par de ciudades (i, j) depende de si el avión está cargado con pasajeros o no. Este valor será en el primer caso de t_{ij}^1 horas y en el segundo caso de t_{ij}^2 horas. La aerolínea trabaja en tiempos discretos, por lo que puede asumir que ambos t_{ij} son enteros, y que una vez que el avión llega puede descargar y cargar pasajeros, y despegar inmediatamente. Finalmente, a usted se le pide maximizar las ganancias, sabiendo que la tarifa que cobra por pasajero que viaja en la ruta (i, j) a la hora t es de c_{ij}^t.

El directorio le permite completa flexibilidad respecto a la flota de aviones, es decir, puede comprar más a un costo de F cada uno, o puede no utilizar los que quiera, pagando un costo de P por cada uno de los aviones que no utilice. La única restricción que se le pone, es que todos los aviones deben comenzar y terminar el día en la ciudad s. Asuma que en la operación se utilizan las 24 horas del día, es decir, a las 0 y a las 24 horas TODOS los aviones deben estar en s.

Considere que la demanda no necesariamente debe ser satisfecha, de hecho, en caso de que ningún avión despegue en la ruta (i, j) dentro de la hora t $(t \leq T - 1)$, una fracción b_{ij}^t de la demanda se reabsorberá en la demanda de la misma ruta en la hora de despegue $t+1$. Cabe destacar que la demanda reabsorbida no es acumulativa, es decir, en el mismo caso, si ningún avión realiza la ruta (i, j) en la hora de despegue $t + 1$, sólo se podrá reabsorber $d_{ij}^{t+1} b_{ij}^{t+1}$ en $t + 2$ y no $d_{ij}^{t+1} b_{ij}^{t+1} + b_{ij}^t d_{ij}^t$. Además, cabe destacar que en el caso de que haya pasajeros no puedan realizar la ruta por falta de capacidad en el avión, pero sí hay un avión que la realice, entonces no habrá ninguna reabsorción de los pasajeros en otro horario. Por otro lado, de forma independiente a la reabsorción en la hora siguiente, existe otra fracción de pasajeros $g_{ij}^{j'}$ que son reabsorbidos por la demanda de la ruta (i, j') con hora de despegue t en caso de que ningún avión opere la ruta (i, j) con despegue en t.

Por ejemplo, si ningún avión opera la ruta (i, j) en la hora t (hora de despegue), entonces la demanda de la ruta (i, j) en la hora $t + 1$ será $d_{ij}^{t+1} + d_{ij}^t b_{ij}^t$. Además, la demanda en la ruta (i, j') con hora de despegue t será $d_{ij'}^t + d_{ij}^t g_{ij}^{j'}$

Basándose en la información anterior, formule un modelo de programación lineal que resuelva el problema de qué rutas operar y cómo asignar los aviones por ruta. Asuma que los únicos costos que debe considerar son los de compra y no utilización de aviones, mientras que el único beneficio es por tarifa pagada por pasajero.

b) (8 puntos) Para responder las siguientes preguntas, debe leer el paper "Mixed integer programming based heuristics for the Patient Admission Scheduling problem" subido en la página del curso[3]

i) (2 puntos) Explique cuál es el problema central que enfrentan y resuelven los autores del paper.

ii) (2 puntos) Explique en qué consiste y cómo es utilizada en la resolución del problema la Heurística F&R.

iii) (2 puntos) Explique en qué consiste y cómo es utilizada en la resolución del problema la Heurística F&O.

iv) (2 puntos) ¿Cómo se realiza el proceso de descomposición para el ejemplo utilizado en el paper?

Solución Problema 4.

a) Conjuntos:

$$N = \{1, \ldots, N\}\text{: Conjunto de los N aviones originales}$$

$$R = \{(i, j) : i, j \in N\}\text{: Conjunto de las rutas que sirve la aerolínea}$$

[3]Turhan, A. M., and Bilgen, B. (2017). Mixed integer programming based heuristics for the Patient Admission Scheduling problem. Computers & Operations Research, 80, 38-49.

Nótese que para el caso en que $i = j$, la ruta representa que el avión no se movió de la ciudad i.

Parámetros:

$$t_{ii}^1 = t_{ii}^2 = 1\text{: Tiempo auxiliar para representar que un avión no se movió de ciudad}$$

Variables de decisión:

$$x_{ij}^{ntl} = \begin{cases} 1 & \text{Si el avión } n \text{ opera la ruta } (i,j) \text{ con hora de despegue } t \text{ de la forma } l \text{ (siendo } n \text{ de los aviones originales)} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^t = \begin{cases} 1 & \text{Si algún avión opera la ruta } (i,j) \text{ con hora de despegue } t \text{ con transporte de pasajeros} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij}^{tl} = \text{Cantidad de aviones comprados que operan la ruta } (i,j) \text{ con hora de despegue } t \text{ de la forma } l.$$

$$z^n = \begin{cases} 1 & \text{Si el avión } n \text{ es utilizado por pasajeros (con } n \in N) \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_{ij}^t = \text{Cantidad de pasajeros transportados en la ruta } (i,j) \text{ con hora de despegue } t.$$

$$\omega = \text{Cantidad de aviones que se compran.}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{23} \sum_{r \in R: i \neq j} \alpha_r^t c_r^t - P \sum_{n \in N} z^n - F\omega$$

s.a.

(1) Ecuación de continuidad (o de inventario):

$$\sum_{l \in \{1,2\}} \sum_{i \in C: t_{ij}^l \leq t} \left(y_{ij}^{(t-t_{ij}^l)l} + \sum_{n \in N} x_{ij}^{n(t-t_{ij}^l)l} \right) = \sum_{l \in \{1,2\}} \sum_{i \in C} \left(y_{ji}^{tl} + \sum_{n \in N} x_{ji}^{ntl} \right) \quad \forall j \in C, \forall t \in \{1, \ldots, 23\}$$

(2) Una ruta sólo se opera si algún avión la sirve:

$$\delta_r^t \leq y_r^{t1} + \sum_{n \in N} x_r^{nt1} \qquad \forall r \in R, t = 0, \ldots, 23$$

$$M\delta_r^t \geq y_r^{t1} + \sum_{n \in N} x_r^{nt1} \qquad \forall r \in R, t = 0, \ldots, 23$$

Siendo M un número muy grande

(3) Cantidad de aviones comprados:

$$\sum_{r \in R} (y_r^{0,1} + y_r^{0,2}) = \omega$$

(4) Los pasajeros transportados deben ser menor a la demanda:

$$\alpha_{ij}^t \leq d_{ij}^t + (1 - \delta_{ij}^{t-1}) d_{ij}^{t-1} b_{ij}^{t-1} + \sum_{k \in C : k \neq i} (1 - \delta_{ik}^t) d_{ik}^t g_{ij}^t \qquad \forall (i,j) \in R, \forall t = 2, \ldots, 23$$

$$\alpha_{ij}^0 \leq d_{ij}^0 + \sum_{k \in C : k \neq i} (1 - \delta_{ik}^0) d_{ik}^0 g_{ij}^0 \qquad \forall (i,j) \in R$$

(5) Los pasajeros transportados deben ser menor a la capacidad de asientos disponibles:

$$\alpha_r^t \leq K \left(\sum_{n \in N} x_r^{nt1} + y_r^{t1} \right) \qquad \forall r \in R, \forall t = 1, \ldots, 23$$

(6) Definición de un avión no utilizado:

$$z_n \leq \sum_{t=0}^{23} \sum_{r \in R} (x_r^(nt1) K \qquad \forall n \in N$$

(7) Todos los aviones parten en s:

$$\sum_{r \in R : s \neq i} \sum_{n \in N} (x_r^{n,0,1} + x_r^{n,0,2}) + y_r^{0,1} + y_r^{0,2} = 0$$

(8) Todos los aviones terminan en s:

$$\sum_{l \in \{1,2\}} \sum_{i \in C} \left(y_{ij}^{(t - t_{ij}^l) l} + \sum_{n \in N} x_{ij}^{n(t - t_{ij}^l) l} \right) = 0 \qquad \forall j \in C : j \neq s$$

(9) Naturaleza de las variables:

$$x, \delta, z \in \{0, 1\}$$
$$y, \alpha, \omega \in \mathbb{Z}_0$$

b) *i*) El problema presentado por los autores consiste en obtener un calendario de admisión para pacientes "electivos" (que no son de urgencia). Esto consiste en una asignación de cama intrahospitalaria para toda su estadía, teniendo en consideración aspectos médicos y preferencias de los pacientes.

ii) La Heurística F&R consiste en optimizar desde un intervalo de tiempo hasta el intervalo final a programar. Por ejemplo, si se tienen 7 días y se ha dividido el intervalo en días, estando en el día 4 se optimiza desde el 4 al 7 (todo junto), considerando que las decisiones del intervalo 4 (en el que se está parado) deben tomar valor entero, mientras que las de los intervalos 5 a 7 pueden tomar valores continuos (recordar que se está asignado cama a un paciente, así que la decisión es binaria). Una vez optimizado el problema que considera t=4 hasta 7, se fijan solo las decisiones del intervalo 4 (que son binarias), y se avanza un intervalo y se resuelve el nuevo problema (desde 5 a 7 ahora).

iii) La Heurística F&O toma como base la solución factible obtenida mediante F&R (que es un calendario de admisión de pacientes). Sobre ella, se para en un intervalo de tiempo (partiendo en t=1) y optimiza ese intervalo dejando fijas las decisiones de las demás decisiones. El resultado de esta optimización se compara con el valor actual de la mejor solución que se tenga, y si es mejor lo reemplaza, sino se mantiene el actual. Se repite el método para cada intervalo.

iv) La descomposición consiste en dividir el horizonte te programación en intervalos de tiempo (por ejemplo, una semana en 7 días o un mes en 15 pares de días). Además, se deben categorizar los pacientes según un ranking de pacientes, de manera de asignar antes a aquellos pacientes con menos ranking.