PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez - J. González

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 23 de marzo.

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y es decisión de cada grupo si escribir las respuestas en computador o a mano, mientras **sea legible cada respuesta y el documento esté ordenado**. En cada hoja se debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de respuesta de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega la esta tarea vence impostergablemente el día viernes 23 de marzo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 del día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo que les será asignado.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (18 puntos)

a) (8 puntos) Un campo del norte llamado *Tambito*, se dedica a la cosecha y exportación de frutas. Este campo dispone de un cierto número de parcelas que deben ser cosechadas. Para llevar adelante esta cosecha el campo recurre a personal temporero, al cual se le debe pagar un sueldo de α pesos semanales por trabajador. Además, existe un costo por búsqueda de β pesos por cada trabajador que empieza a trabajar en el *Tambito* al principio de la semana (i.e. que no estaba trabajando en el campo en la semana anterior), y un costo de indemnización de γ pesos por cada trabajador despedido al final de la semana. El *Tambito* quiere planifcar sus actividades para el futuro, pero no sabe como proseguir por falta de experiencia.

Coincidentemente, se enteraron que el magnánimo campo *Tambo Real*, que es similar al *Tambito* en frutas y parcelas plantadas, pero a mayor escala, ha desarrollado un modelo de optimización que les dice exactamente cómo proceder, razón por la cual los dueños del *Tambito* deciden robarle una copia de este modelo. Lamentablemente, durante el robo se perdió toda la información que explicaba el modelo (nadie entiende por qué), y tuvieron que llamarlo a usted para que les ayude a descifrarlo.

Es así como lo que se obtuvo del modelo es lo que se indica a continuación:

Parámetros:
d_t : Demanda por fruta en la semana t, $t = 1, \ldots, T$
a_i : Cantidad de fruta que puede sacar semanalmente un trabajador de la parcela i (es distinto según las parcelas por razones de la topografía y accesibilidad de los lugares), $i = 1, \ldots, N$

Variables de decisión:
x_{it} : Cantidad de trabajadores asignados a la parcela i en la semana t, con $t = 1, \ldots, T$, $i = 1, \ldots, N$.

Modelo:

$$P) \qquad \text{mín} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \alpha x_{it} + \sum_{t=2}^{T} \beta y_t^+ + \sum_{t=2}^{T} \gamma y_t^-$$

$$\begin{aligned}
s.a. \qquad & \sum_{t=1}^{T} x_{it} a_i \leq S_i && ,\forall i \in \{1, \ldots, N\} \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{it} a_i \geq d_t && ,\forall t \in \{1, \ldots, T\} \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{it} \leq C_t && ,\forall t \in \{1, \ldots, T\} \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{it} - \sum_{i=1}^{N} x_{it-1} = y_t^+ - y_t^- && ,\forall t \in \{2, \ldots, T\} \\
& y_t^+, y_t^- \in \mathbb{Z}_0^+ && ,\forall t \in \{1, \ldots, T\}
\end{aligned}$$

Explique rigurosamente qué es lo que hace el modelo, el objetivo de cada restricción y la interpretación de los parámetros (S_i y C_t) y variables (y_t^+ e y_t^-) faltantes. Considere que el modelo se desarrolló para N parcelas y un horizonte de tiempo de T semanas.

b) (10 puntos) Para responder las siguientes preguntas, debe leer el paper "An integer programming approach to curriculum-based examination timetabling" subido en la página del curso[3] : (2 ptos c/u)

[3]Cataldo, A., Ferrer, J., Miranda, J., Rey, P., & Sauré, A. (2016). An integer programming approach to curriculum-based examination timetabling. Annals Of Operations Research, 258(2), 369-393. http://dx.doi.org/10.1007/s10479-016-2321-2

i) ¿Por qué los autores dividen el problema en 3 subproblemas?

ii) ¿Qué problema se busca resolver al construir cluster y patrones? ¿Cuál es la idea detrás del uso de ambos (cluster y patrones) en conjuntos?

iii) Describa detalladamente lo que se busca lograr con la definición de las funciones objetivos de los modelos CB-ETTP-C Ay CB-ETTP-RA.

iv) ¿Cómo describiría los indicadores CD y CP? ¿Para qué sirven?

v) Explique claramente como se resuelve el problema completo en el proceso de 4 etapas propuesto por los autores.

Solución Problema 1.

a) El objetivo del modelo es planificar la cantidad de temporeros que se deben contratar y despedir por semana, de manera que la cosecha de la temporada sea óptima. En otras palabras, minimizar los costos de personal involucrados y satisfacer toda la demanda generada.

F.O. : Minimiza los costos en relación a los sueldos, contratación y despido de los trabajadores de la cosecha.

Parámetros:

S_i : Cantidad de fruta disponible en la parcela i en toda la temporada, $\forall i = 1, \ldots, N$

C_t : Cantidad máxima de trabajadores que pueden ser usados en cosecha de fruta en la semana t, $\forall t = 1, \ldots, T$

Variables:

y_t^+ : Trabajadores contratados al inicio de la semana t, con $t = 1, \ldots, T$

y_t^- : Trabajadores despedidos al inicio de la semana t, con $t = 1, \ldots, T$

Restricciones:

(1) : La cantidad de fruta cosechada por parcela en la temporada no puede superar la cantidad de fruta disponible en cada parcela

(2) : Se debe satisfacer la demanda semanal de fruta

(3) : No se puede superar la cantidad máxima de trabajadores a contratar cada semana

(4) : La diferencia de trabajadores entre dos semanas consecutivas debe ser igual al número de trabajadores contratados menos el número de trabajadores despedidos (Ecuación de Continuidad)

(5) : La cantidad de trabajadores es un número entero.

b) Las respuestas a las preguntas del paper son:

i) Los autores dividen el problema en tres subproblemas porque la simétria que presenta el problema y la dimensionalidad de las instancias impide resolver el problema de manera exacta considerando todas las decisiones de manera simultánea.

ii) El problema que se busca resolver al construir cluster y patrones es de la simetría que pueden presentar diferentes soluciones.

Específicamente, si tenemos una solución con el examen álgebra en el lunes a primera hora y de cálculo el miércoles a primera hora (cursos con misma cantidad de alumnos y mismas relaciones en la malla curricular) es absolutamente similar a la que programa cálculo el lunes a primera hora y álgebra el miércoles a primera hora. Eso se llama simetría.

Los patrones buscan entregar soluciones completas a la asignación de salas, excluyendo soluciones que no son factibles y aquellas que están claramente dominadas por otra. Por ejemplo, si un curso requiere 100 asientos y tengo salas grandes de 80 y chicas de 40 asientos, la solución que asigna dos salas chicas a ese examen no es factible (no es un patrón entonces), y la solución con 4 salas chicas asignadas también se excluye pues es dominada por aquella que solamente asigna 3 salas chicas.

iii) La definición de la función objetivo del modelo CV-ETTP-CA busca reducir la cantidad de cursos que tienen una asignación saturada de salas. Una asignación saturada de salas es aquella en la que la cantidad de asientos totales asignados al curso está muy apretada respecto a la cantidad de alumnos que se espera inscriban el curso. Entonces, específicamente la función fue construida de manera que el primer término es una penalización asociada con el módulo más saturado, mientras que el segundo término corresponde al número total de cursos con asignación saturada. Es importante destacar que el factor $|C|$ (en el primer término) garantiza que el primer término es al que se da más importancia en el proceso de decisión (se puede pensar como un problema de dos funciones objetivos encadenadas).

La definición de la función objetivo del modelo CV-ETTP-RA busca reducir la distancia entre las diferentes salas asignadas a un curso. El primer término asegura que el curso que tendrá la peor asignación de salas (que estén más alejadas entre sí), tendrá la mejor asignación posible. El segundo término corresponde al total de las máximas distancia entre las salas asignadas a cada curso. Es importante destacar que el factor $|C|$ (en el primer término) garantiza que el primer término es al que se da más importancia en el proceso de decisión (se puede pensar como un problema de dos funciones objetivos encadenadas).

iv) El indicador CD calcular el porcentaje de conflictos que presenta la programación realizada entre el total de conflictos que podría presentar. En este sentido, es una medida que indic qué tanto se pudo evitar conflictos con la solución presentada. Así resulta natural definir el indicador CP que indica –para una instancia– la probabilidad de tener al menos un conflicto en la solución.

Dicho lo anterior, estos indicadores sirven para conocer qué tan difícil es la instancia con la que se trabajará, y de esta manera tener al menos una idea preliminar sobre cómo se debería ver la solución que se obtendrá.

v) El proceso de 4 etapas consiste en tomar los datos y construir los cluster y patrones corrspondientes a la instancia en cuestión. Construidos estos dos elementos, en la siguiente etapa se considera resolver un problema que no incluye la asignación de las salas ni la especificación de los cursos a los módulos días. Teniendo la solución sobre que cluster (conjuntos de cursos) son asignados a cada módulo horario, en la tercera etapa se procede a fijar cursos específicos en cada módulo día (y entonces, alguno de los cursos del cluster asignado a un módulo día será asignado específicamente a ese módulo día). Finalmente, con la asignación de cursos específicos a módulo días, se procede a realizar la asignación de salas a cada examen/curso. Con esto, se garantiza que se han programado todos los examenes de los cursos de manera de respectar la cantidad de asientos/salas disponibles, y teniendo en cuenta las consideraciones de malla curricular.

Problema 2. (14 puntos)

a) (11 puntos) Suponga que existiera un ramo de muchos alumnos en la carrera de ingeniería, y que la ayudante de este curso encargada de organizar los grupos de tareas y proyectos necesite ayuda para saber cómo asignarlos óptimamente (este es un caso completamente hipotético). Considere que hay A alumnos en el curso que se deben distribuir en G grupos de L alumnos cada uno. Cada par de alumnos $(i, j) : i < j$ ha denotado cierta afinidad por estar en el mismo grupo denotada como a_{ij}. Fnalmente, usted se compadece de la ayudante y construye el siguiente modelo de optimización lineal binario para determinar la agrupación de los alumnos dentro de los G grupos, tal que entregan la máxima afinidad:

Variables de decisión:

$$\alpha_{ig} = \begin{cases} 1 & \text{Si el alumno } i \text{ se asigna al grupo } g, \forall i \in \{1, \ldots, A\}, g \in \{1, \ldots, G\}. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\beta_{ijg} = \begin{cases} 1 & \text{Si los alumnos } i,j \text{ son asignado al mismo grupo } g, \forall i,j \in \{1,\ldots,A\} : i < j, g \in \{1,\ldots,G\}. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$P) \qquad \max \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{A-1} \sum_{j=i+1}^{A} a_{ij}\beta_{ijg}$$

$$\begin{aligned} s.a. \qquad & \beta_{ijg} \geq \alpha_{ig} + \alpha_{jg} - 1, \forall i,j \in \{1,\ldots,A\} : i < j, \forall g \in \{1,\ldots,G\} \\ & \sum_{g=1}^{G} \alpha_{ig} = 1, \forall i \in \{1,\ldots,A\} \\ & \sum_{i=1}^{A} \alpha_{ig} \leq L, \forall g \in \{1,\ldots,G\} \\ & \alpha_{ig} \in \{0,1\}, \forall i \in \{1,\ldots,A\}, \forall g \in \{1,\ldots,G\} \\ & \beta_{ijg} \in \{0,1\}, \forall i,j \in \{1,\ldots,A\} : i < j, \forall g \in \{1,\ldots,G\} \end{aligned}$$

i) (1 punto) ¿Es correcto el modelo?. En caso de no serlo, ¿qué restricción(es) le agregaría para completarlo?

Suponga ahora que para cada alumnos i se conoce el año que está cursando E_i. Asumiendo que el modelo anterior está completo, agregue la(s) restricción(es) que se necesite(n) para cumplir cada una de las siguientes condiciones que imponen los profesores:

ii) (2 puntos) En un mismo grupo no deben haber alumnos con más de D años de diferencia entre sí

iii) (2 puntos) Sea N el subconjunto de alumnos que están cursando quinto o mayores. Estos tienen que asignarse todos juntos en los mismos grupos (no necesariamente todos en un sólo grupo), sin alumnos de años menores.

iv) (2 puntos) Cada alumno i tiene un conjunto B_i de alumnos que deben estar necesariamente en su mismo grupo.

v) (2 puntos) Para facilitar el proceso de adaptación de los alumnos de primer año se les hizo elegir a cada uno un alumno del curso menor de quinto año (y que no sea de primer año) que sea su tutor. Cada alumno de primer año debe estar en el grupo con su tutor, y para esto, se cuenta con un conjunto R de pares (tutor, alumno de primer año).

vi) (2 puntos) Sean H y M los conjuntos de hombres y mujeres, respectivamente, entre segundo y cuarto año que están en el curso. Para incentivar (de cierta forma) la heterogeneidad de los grupos, en estos no puede haber más de un $p\,\%$ (con $50 \leq p \leq 100$) de alumnos (entre segundo y cuarto año) que sean del mismo género.

Asuma que ninguna de estas restriciones llevará a infactibilidad en el modelo y considere que cada nueva restricción es independiente de todas las demás restricciones.

b) (3 puntos) La empresa en que usted trabaja debe definir las dimensiones de una caja de cartón de 1 metro cúbico de volumen, de modo que su costo sea mínimo. Para eso, usted usará el siguiente diseño básico:

El costo de cada cm^2 de cartón es c y el costo de cada cm lineal de pegamento es p. Considere que al pegar dos aristas no se necesita pestaña, y que se debe aplicar el pegamento en ambos lados. La empresa le pone como restricción que la diagonal de la caja no sea más del doble que ningún lado de esta misma, y que además el costo por pegamento sea menor al costo por cartón.

Basánsose en la infromación entregada, modele el problema de definir las dimensiones de la caja como un modelo de optimización.

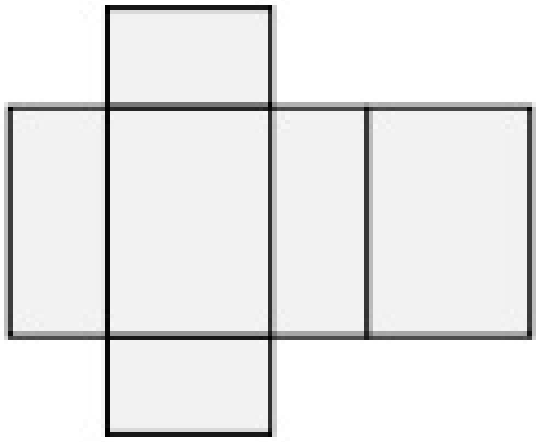


Figura 1: Diseño Caja

Solución Problema 2.

a) *i)* El modelo está incorrecto por dos razones. La primera es que los grupos deben ser de exactamente L personas, y no de L o menos como se plantea en la restricción. La segunda razón es que está incompleto, pues falta una restricción que fuerce a β_{ijg} ser 0 en caso de que α_{ig} o α_{jg} sean 0. La restricción es:

$$\beta_{ijg} \leq \alpha_{ig}, \forall i, j \in \{1, \ldots, A\}, g \in \{1, \ldots, G\}$$

ii)

$$\beta_{ijg} = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, A\}, g \in \{1, \ldots, G\} : i < j, |E_i - E_j| > D$$

iii)

$$\beta_{ijg} = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, A\}, g \in \{1, \ldots, G\} : i < j, (i \in N, j \notin N) \vee (i \notin N, j \in N)$$

iv)

$$\sum_{g=1}^{G} \beta_{ijg} = 1, \forall i, j \in \{1, \ldots, A\} : i < j, j \in B_i \vee i \in B_j$$

v)

$$\sum_{g=1}^{G} \beta_{ijg} = 1, \forall i, j \in \{1, \ldots, A\} : i < j, (i, j) \in R \vee (j, i) \in B_j$$

vi)

$$\sum_{i \in H} \alpha_{ig} \leq \frac{p}{100} \sum_{j \in H \cup M} \alpha_{jg}, \forall g \in \{1, \ldots, G\}$$

$$\sum_{i \in M} \alpha_{ig} \leq \frac{p}{100} \sum_{j \in H \cup M} \alpha_{jg}, \forall g \in \{1, \ldots, G\}$$

b) Haciendo el siguiente esquema de la caja, el modelo será:

$$P) \qquad \text{mín}(4x + 8y + 2z)p + (2xy + 2yz + +2xz)c$$

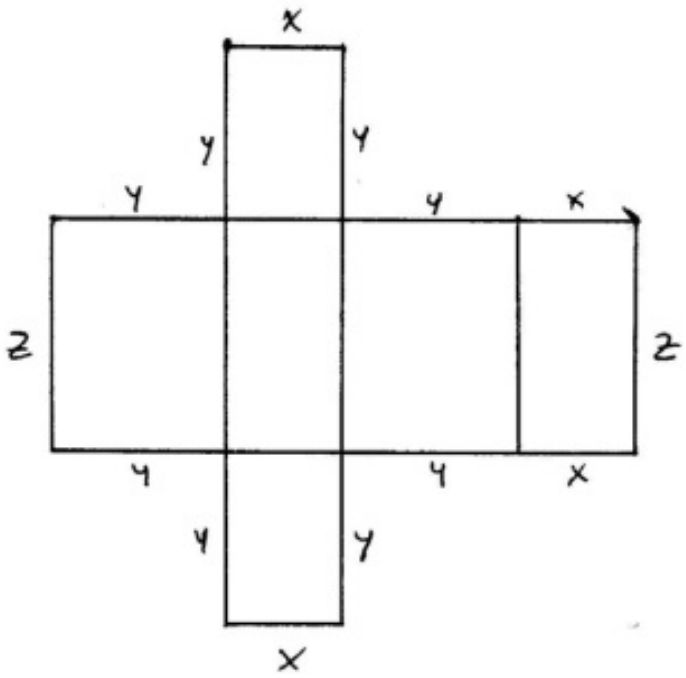


Figura 2: Esquema Caja

$$
\begin{array}{lccc}
s.a. & xyz & = & 10^6 \\
& 4x^2 & \geq & x^2+y^2+z^2 \\
& 4y^2 & \geq & x^2+y^2+z^2 \\
& 4z^2 & \geq & x^2+y^2+z^2 \\
& (4x+8y+2z)p & \leq & (2xy+2yz++2xz)c \\
& x,y,z & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema 3. (13 puntos)

Joaquín, un afanado estudiante de ingeniería, ha decidido que se merece un descanso, por lo que se propuso organizar un paseo a *Fantasilandia* el próximo sábado y quiere planificar la visita con anticipación, de manera de maximizar su felicidad. Para esto, Joaquín debe elegir previamente todos los juegos a los que se subirá y su respectivo orden (puede subirse a un mismo juego cuántas veces quiera). Por otro lado, también tiene que decidir si invita a su novia para que lo acompañe o a un grupo de amigos. Asuma que Joaquín no irá sólo en ningún caso y que la novia no le permitirá invitarla a ella y al grupo de amigos al mismo tiempo.

Existe un conjunto J de juegos a los que Joaquín puede subirse, y la felicidad que le da subirse a cada juego j, con $j \in J$, es a_j^1 si va con su novia y a_j^2 si va con un grupo de amigos. Dentro del conjunto J de juegos existe un subconjunto $C \subset J$ de juego acuáticos, en que la diversión disminuirá a la mitad si es que la temperatura baja los T_3 grados (esto ocurre sólo si en el momento de subirse al juego la temperatura está por dabajo T_3, no durante el juego). El tiempo que le toma subirse a cada juego j es de t_j horas, fijo e independiente de la compañía con la que vaya. Asuma que estos tiempos incluyen tiempos de fila y de traslado, es decir, no deben considerarse más tiempos intermedios entre juegos.

Para aprovechar al máximo su visita, Joaquín se puso como restricción visitar exactamente P juegos, y creó además un subconjunto $D \in J$ de juegos en los que para cada juego d, con $d \in D$, sólo se subirá si es que hay menos de n_d personas dentro de *Fantasilandia* (sin contar a Joaquín ni a sus acompañantes).

Joaquín llamó a *Fantasilandia* y le dijeron que el sábado habrán con seguridad N_1 personas a la hora de apertura (sin contarlo a él ni a sus acompañantes), las cuales disminuirán linealmente hasta llegar a N_2 en la hora de cierre. Además, vio en las noticias que a la hora de apertura harán $T_1 \geq T_3$ grados, los cuales también disminuirán linealmente hasta llegar a los $T_2 \leq T_3$ grados en la hora de cierre.

Plantee un modelo de programación lineal que maximice la felicidad de Joaquín, asumiendo que *Fantasilandia* estará abierto 10 horas el sábado y que él llegará a la hora de apertura.

Solución Problema 3.

Variables de decisión:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{Si el k-ésimo juego al que se sube Joaquín es el juego } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$u_k = \text{Tiempo en que Joaquín se sube al k-ésimo juego.}$$

$$x_{kj} = \text{Felicidad obtenida por Joaquín del juego } j \text{ en el k-ésimo juego que se sube.}$$

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{Si se alcanzan los } T_3 \text{ grados entre el k-ésimo y el k+1-ésimo juego} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{Si va a } \textit{Fantasilandia} \text{ con su novia} \\ 0 & \text{Si va con un grupo de amigos} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Max \sum_{k \in P} \sum_{j \in J} x_{kj}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

(1) Sólo se sube a un juego en k-ésimo lugar:

$$\sum_{j \in J} \delta_{kj} = 1 \qquad \forall k \in \{1, \ldots, P\}$$

(2) Construcción de u_k:

$$u_1 = 0$$

$$u_P + \sum_{j=1}^{j=J} t_j \delta_{Pj} \leq 10$$

$$u_k = u_{k-1} + \sum_{j=1}^{j=J} t_j \delta_{(k-1)j} \qquad \forall k \in \{2, \ldots, P\}$$

(3) Mínimo de personas para subirse a un juego:

$$\delta_{kd} \leq 2 - \frac{N_1 - \frac{u_k}{10}(N_1 - N_2)}{n_d} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, P\}, \forall d \in D$$

(4) Construcción de x_k:

$$\begin{aligned}
x_{kj} &\leq \omega a_j^1 + (1-\omega) a_j^2 && \forall k \in \{1, \ldots, P\}, \forall j \in J \\
x_{kj} &\leq M \delta_{kj} && \forall k \in \{1, \ldots, P\}, \forall j \in J \\
x_{kj} &\leq 0.5 \left(\omega a_j^1 + (1-\omega) a_j^2\right) + M \sum_{k'=1}^{k'=k-1} z_{k'} && \forall k \in \{2, \ldots, P\}, \forall j \in J
\end{aligned}$$

(5) Construcción de z_k:

$$\begin{aligned}
z_k &\leq 2 - \frac{T_1 - \frac{u_{k+1}}{10}(T_1 - T_2)}{T_3} && \forall k \in \{1, \ldots, P-1\} \\
z_k &\leq \frac{T_1 - \frac{u_k}{10}(T_1 - T_2)}{T_3} && \forall k \in \{1, \ldots, P-1\} \\
\sum_{k=1}^{k=P} z_k &= 1
\end{aligned}$$

(6) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned}
\delta_{kj} &\in \{0, 1\} && \forall k \in \{1, \ldots, P\}, \forall j \in J \\
z_k &\in \{0, 1\} && \forall k \in \{1, \ldots, P\} \\
\omega &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Problema 4. (15 puntos)

Un *gamer* (jugador de videojuegos) profesional quiere practicar para el próximo campeonato de videojuegos. La particularidad de este campeonato es que le puede tocar jugar cualquier juego dentro de un conjunto J, por lo que debe planificar una intensa maratón de distintos juegos para su entrenamiento. Cada juego j tiene E_j etapas, y la etapa e, con $e = 1, \ldots, E_j$, sabe con seguridad que demorará T_j^e minutos en completarla, con $j \in J$.
Para perfeccionar esta maratón, el *gamer* se puso las siguientes restricciones: Los juegos del campeonato no son juegos tradicionales, por lo que el *gamer* no tiene ninguno en su casa y deberá ir a comprarlos a la *gamershop*. Comprar el juego j con todas sus etapas cuesta C_j pesos, mientras que comprar cada etapa del juego j por separado vale c_j pesos, con $j \in J$. (Asuma que $C_j < E_j c_j$).

- ◇ Todas las etapas que juegue, debe completarlas
- ◇ Por su sanidad mental y corporal, se propuso no jugar más de D minutos en total.
- ◇ Si es que el juego j forma parte de la maratón, entonces se deben jugar al menos h_j etapas de ese juego, con $j \in J$
- ◇ Obviamente, las etapas son progresivas, es decir, si jugo la etapa c de un juego, entonces ya debe haber jugado necesariamente las etapas $1, \ldots, c-1$

- ◇ Para jugar los juegos equitativamente, el tiempo que dedique al que más tiempo juegue debe ser menos del doble del tiempo que dedica al que menos tiempo juegue. (Nótese que esto es sólo para los juegos que sí decida jugar)
- ◇ Para ayudarle a decidir hasta que etapa jugar de cada juego, la última etapa que juega del juego j debe ser más corta que la etapa anterior del juego j, con $j \in J$. (A menos que decida jugar una sóla etapa del juego j)

i) (10 puntos) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que permita a este *gamer* planificar la maratón de videojuegos de manera de maximizar su duración, sin que este gaste más de K pesos. Considere que las etapas de un mismo juego no deben ser necesariamente consecutivas, es decir, puede jugar etapas del mismo juego intercaladas entre etapas de juegos distinto (manteniendo las restricciones mencionadas)

Ahora, el *gamer* se enteró que cada juego requiere cierto tiempo de instalación, y que este tiempo depende del juego que haya jugado justo antes. Por ejemplo, si está jugando el juego j_1 y quiere jugar j_2, entonces el tiempo de instalación del juego j_2 será de $I_{j_1 j_2}$ minutos. Asuma que el primer juego instalado tiene tiempo 0 de instalación. Dado lo anterior, el *gamer* ha decidido que todas las etapas que juegue de un mismo juego lo hará de forma consecutiva.

ii) (5 puntos) Incorpore esta nueva información al modelo de la parte *i*) de manera que el tiempo total de instalación no sea mayor de H minutos. Considere que el tiempo de instalación sí es parte del tiempo total de la maratón.

Solución Problema 4.

i) Variables de decisión:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el } \textit{gamer} \text{ juega el juego } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_j^e = \begin{cases} 1 & \text{Si juega la etapa } e \text{ del juego } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{Si compra todas las etapas del juego } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$h_j = \text{Costo variable si el } \textit{gamer} \text{ no arrienda todos los capítulos de } j$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_{j \in J} \sum_{e=1}^{E_j} T_j^e y_j^e$$

s.a.

(1) La maratón debe durar menos de D minutos:

$$\sum_{j \in J} \sum_{e=1}^{E_j} T_j^e y_j^e \leq D$$

(2) Las etapas son progresivas:

$$y_j^{e+1} \leq y_j^e \qquad \forall j \in J, \forall e \in \{1, \ldots, E_j - 1\}$$

(4) Debe jugar los juegos equitativamente:

$$2\left(\sum_{e=1}^{E_j} T_j^e y_j^e\right) + M(1 - x_j) \geq \sum_{e=1}^{E_{j'}} T_{j'}^e y_{j'}^e \qquad \forall j, j' \in J : j \neq j'$$

(5) Definición de x_j:

$$y_j^1 \leq M x_j \qquad \forall j \in J$$

(6) La última etapa jugada debe ser más corta que la penúltima:

$$\begin{aligned} y_j^{e-1} T_j^{e-1} &\geq y_j^e T_j^e - y_j^{e+1} M && \forall j \in J, \forall e \in \{2, \ldots, E_j - 1\} \\ y_j^{E_j - 1} T_j^{E_j - 1} &\geq y_j^{E_j} T_j^{E_j} && \forall j \in J \end{aligned}$$

(7) Definición de h_j y z_j:

$$\begin{aligned} h_j &\geq \left(\sum_{e=1}^{E_j} c_j^e y_j^e\right) - M z_j && \forall j \in J \\ h_j &\leq M(1 - z_j) && \forall j \in J \end{aligned}$$

(8) No puede gastar más de K pesos:

$$\sum_{j \in J} (C_j z_j + h_j) \leq K$$

(9) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} x_j &\in \{0, 1\} && \forall j \in J \\ z_j &\in \{0, 1\} && \forall j \in J \\ y_j^e &\in \{0, 1\} && \forall j \in J, \forall e \in \{1, \ldots, E_j\} \\ h_j &\geq 0 && \forall j \in J \end{aligned}$$

ii) Nueva variable:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el juego } j \text{ se juega inmediatamente después del juego } i. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Nuevas Restricciones:

(11) El tiempo de instalación no puede ser mayor a H minutos:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J: i \neq j} I_{ij} \beta_{ij} \leq H$$

(12) Si un juego se juega, entonces debe tener a lo más un antecesor:

$$\sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ij} \leq x_j \qquad \forall j \in J$$

(13) Si un juego se juega, entonces debe tener a lo más un predecesor:

$$\sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ji} \leq x_j \qquad \forall j \in J$$

(13) La cantidad total de juego antecesores/predecesores se relaciona con el total de juegos jugados:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ij} = \left(\sum_{j \in J} x_j - 1 \right)$$

(14) Naturaleza de la variable:

$$\beta_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J, \forall i \in J : i \neq j$$