PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2012
Profesores: J. Vera, C. Prieto, M. Klapp
J.C. Muñoz, A. Cataldo

Pauta Interrogación 3

Duración: 2 horas con 30 minutos.

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & (x-1)^2+(y-2)^2 \\ s.a. & (x-1)^2-5y=0 \\ & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{array}$$

Sustituyendo directamente la restricción en la función objetivo y **eliminando la variable x** obtenemos un problema de optimización no restringido. ¿Es la solución del problema no restringido la solución del problema original? Justifique su respuesta.

Respuesta: De la restricción se tiene que $(x-1)^2=5y$. Reemplazando en la función objetivo queda el siguiente problema irrestricto:

$$\begin{array}{ll} \min & 5y+(y-2)^2 \\ & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{array}$$

cuya solución es $y^*=\frac{-1}{2}$. Sin embargo, esa solución no puede ser solución del problema original pues se tendría que $(x-1)^2=\frac{-5}{2}$, lo que no es posible.

b) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema unidimensional acotado:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x+\frac{192}{x} \\ s.a. & -8\leq x\leq 9 \end{array}$$

Encuentre todos sus puntos críticos, caracterice cada uno de éstos indicando las condiciones necesarias de primer y segundo orden, y realice un análisis concluyente acerca de la existencia de un mínimo global para este problema.

Respuesta: Los puntos críticos son los extremos, y entonces $x^1=-8$ y $x^2=9$, y los puntos estacionarios, que se obtienen de:

$$\nabla f(x)=3-\frac{192}{x^2}=0\mapsto x^3=8 \text{ y } x^4=-8$$

Entonces, existen tres puntos críticos: $x^1=-8$, $x^2=9$ y $x^3=8$.

La primera derivada para $x^1=-8$ es $3-\frac{192}{64}=0$. Se revisa la condición necesaria de segundo orden. En este caso:

$$\nabla^2 f(x)=\frac{192}{2x^3}\mapsto f(x)=\frac{192}{2\cdot -8^3}<0$$

por lo tanto, $x^3 = -8$ cumple la condición necesaria de segundo orden, y entonces es máximo local.

La primera derivada para $x^2 = 9$ es $3 - \frac{192}{81} > 0$. Luego el borde derecho no se acepta como mínimo local.

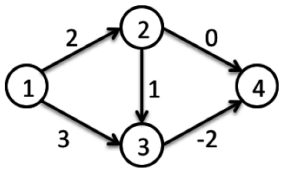
Para el punto interior $x^3 = 8$ se revisa la condición necesaria de segundo orden. En este caso:

$$\nabla^2 f(x) = \frac{192}{2x^3} \mapsto f(x) = \frac{192}{2 \cdot 8^3} > 0$$

por lo tanto, $x^3 = 8$ cumple la condición necesaria de segundo orden, y entonces es mínimo local.

En cuanto a la optimalidad global, claramente el problema no tiene solución pues la función $3x + \frac{192}{x}$ se indefine en $x = 0$, tendiendo a infinito negativo si x se aproxima a 0 por la izquierda.

c) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de ruta mínima desde el nodo 1 al nodo 4, representado por el grafo de la siguiente figura, que detalla los costos sobre los arcos:



Aplique el algoritmo de Dijkstra al problema planteado. Compruebe por inspección visual que la solución encontrada no es la solución óptima. ¿A qué se debe esto? ¿El algoritmo Simplex especializado en redes tendrá el mismo problema? Justifique su respuesta.

RESPUESTA: La aplicación del algoritmo de Dijkstra lleva a la siguiente ruta óptima: 1-2-4, que posee un costo de 2 unidades. Visualmente, se puede apreciar que la solución óptima es a costo 1, a por la ruta 1-3-4. El error se debe a la presencia de costos negativos en uno de los arcos, lo que entrega la posibilidad de reducir el costo de la ruta cuando se agregue aquel arco. El algoritmo de Dijkstra considera una vez cerrado un nodo, no es posible encontrar una ruta futura distinta a la actual que mejore su costo. Simplex en redes no tiene este problema pues no asume un orden de optimización, siendo un algoritmo que pasa por alto el problema mencionado de costos negativos.

d) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\vec{x}) \\ s.a. & g(\vec{x}) = a \end{array}$$

¿Cómo emplearía algún método numérico irrestricto en varias variables (de los vistos en clases) para encontrar candidatos a óptimo de este problema? Suponga que en $g(\vec{x})$ no se pueden despejar explícitamente algunas variables en función de las otras. Justifique su respuesta.

RESPUESTA: Se puede formular el Lagrangeano y utilizar el método de Newton o Gradiente para encontrar $\nabla L = \nabla f(\vec{x}) + (a - g(\vec{x})) = 0$.

e) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización no lineal con una restricción:

$$\min \quad f(x, y) = -\int_x^y \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt$$

$$\text{s.a.} \quad y - x - c = 0$$

donde c es una constante. Sin reemplazar explícitamente la restricción en la función objetivo, utilice la técnica de los multiplicadores de Lagrange para determinar candidatos a óptimo para el problema planteado.

RESPUESTA: El lagrangeano queda:

$$L(x, y, \lambda) = -\int_x^y \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt + \lambda(y - x - c)$$

luego se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x} = e^{-x} - e^{-2x} - \lambda = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -e^{-y} + e^{-2y} + \lambda = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x - c = 0 & (3) \end{array}$$

de donde se obtiene que $x = \ln\left(\frac{1-e^{-2c}}{1-e^{-c}}\right)$ e $y = \ln\left(\frac{1-e^{-2c}}{1-e^{-c}}\right) + c$

Bono (4 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 4 puntos.

f) Considere la siguiente función definida en n variables, $n \geq 2$:

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\right)^2$$

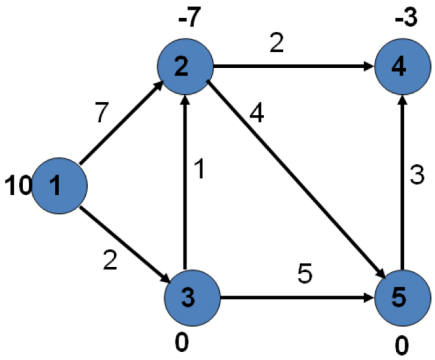
donde $u_j \neq 0, \forall j$. Muestre que esta función es convexa pero no puede ser estrictamente convexa.

RESPUESTA: Esto se sigue de calcular el Hessiano de f el cual es igual a uu^T. Esto significa que la matriz Hessiana es semidefinida positiva pero tiene rango igual a 1. En una función cuadrática esto implica que la función es "plana" en varias de las dimensiones y cuadrática estricta en sólo una. De ese modo, no puede ser estrictamente convexa.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Considere la red de la figura, correspondiente a un problema de flujo a costo mínimo:



En la figura se indican en los nodos el valor de las ofertas (> 0) y demandas (< 0) y los costos unitarios de flujo por los arcos. Considere la siguiente solución factible: $x_{13} = 10$, $x_{32} = 7$, $x_{35} = 3$ y $x_{54} = 3$ flujos nulos para los demás arcos.

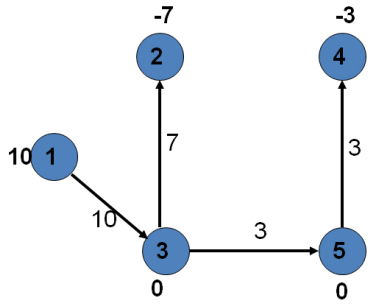
a) (**4 puntos**) Determine si la solución entregada es óptima, y en caso de no serlo, haga las iteraciones necesarias del algoritmo Simplex especializado a redes indicando con precisión sus cálculos, para llegar al óptimo. ¿Es única la solución óptima? Justifique su respuesta.

b) (**3 puntos**) Si calculó correctamente la solución de a), el arco $(1, 2)$ no lleva flujo en la solución óptima. ¿En cuánto debe disminuir el costo de ese arco para que se haga atractivo utilizarlo? Justifique su resultado.

c) (**3 puntos**) Suponga ahora que se hace un cambio en la estructura de la red y se agrega un nuevo arco $(3, 4)$ con un costo unitario igual a 3. ¿Produce algún cambio en la solución y en su unicidad la introducción de este nuevo arco? Justifique su resultado empleando solamente condiciones de optimalidad.

Solución:

a) La siguiente figura muestra la base inicial factible. Nótese que tres arcos llevan flujo, la solución debe completarse para que sea un árbol generador de la red, así que es degenerada:



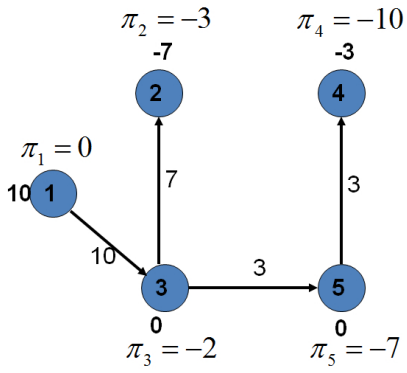
Ahora debemos calcular las variables duales para posteriormente calcular los costos reducidos. Las variables duales se obtienen de las ecuaciones

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (\pi_i - \pi_j) = 0, \forall (i, j) \text{ básico}$$

Esto lleva al sistema:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= c_{13} - (\pi_1 - \pi_3) = 2 - (\pi_1 - \pi_3) = 0 \\
\bar{c}_{32} &= c_{32} - (\pi_3 - \pi_2) = 1 - (\pi_3 - \pi_2) = 0 \\
\bar{c}_{35} &= c_{35} - (\pi_3 - \pi_5) = 5 - (\pi_3 - \pi_5) = 0 \\
\bar{c}_{54} &= c_{54} - (\pi_5 - \pi_4) = 3 - (\pi_5 - \pi_4) = 0
\end{aligned}$$

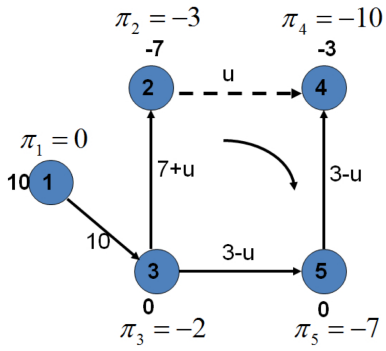
Fijando el valor de $\pi_1 = 0$ se obtienen los valores indicados en la siguiente figura:



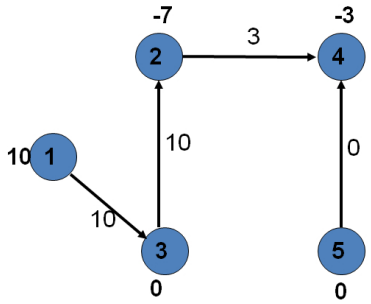
Ahora hay que calcular los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{12} = c_{12} - (\pi_1 - \pi_2) = 4$$
$$\bar{c}_{24} = c_{24} - (\pi_2 - \pi_4) = -5$$
$$\bar{c}_{25} = c_{25} - (\pi_2 - \pi_5) = 0$$

La condición de optimalidad es que los costos reducidos sean ≥ 0. Podemos ver que no estamos aún en el óptimo y el arco $(2, 4)$ debe entrar a la base. La siguiente figura muestra el circuito que se forma y el aumento de flujo en el circuito.



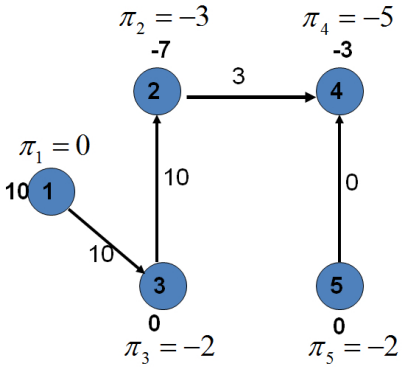
Podemos ver que dos arcos alcanzan flujo nulo simultáneamente. Elegimos el $(3, 5)$ para salir de la base (esto es arbitrario, podría haber sido el otro). La figura muestra la nueva base:



Ahora hay que calcular las nuevas variables duales, de la misma forma que en la iteración anterior.

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - (\pi_1 - \pi_3) = 2 - (\pi_1 - \pi_3) = 0$$
$$\bar{c}_{32} = c_{32} - (\pi_3 - \pi_2) = 1 - (\pi_3 - \pi_2) = 0$$
$$\bar{c}_{24} = c_{24} - (\pi_2 - \pi_4) = 2 - (\pi_2 - \pi_4) = 0$$
$$\bar{c}_{54} = c_{54} - (\pi_5 - \pi_4) = 3 - (\pi_5 - \pi_4) = 0$$

Fijando el valor de $\pi_1 = 0$ se obtienen los valores indicados en la siguiente figura:



Ahora hay que calcular los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{12} = c_{12} - (\pi_1 - \pi_2) = 4$$
$$\bar{c}_{35} = c_{24} - (\pi_3 - \pi_5) = 5$$
$$\bar{c}_{25} = c_{25} - (\pi_2 - \pi_5) = 5$$

Podemos ver que ahora sí se cumple la condición de optimalidad y, por lo tanto, esta es la solución óptima. Como los costos reducidos no básicos son estrictamente positivos, deducimos que la solución es única.

b) Se debe aplicar el análisis de sensibilidad básico de Programación Lineal. El costo debe disminuir en una cantidad igual al costo reducido en el óptimo, es decir, debiese disminuir en más de 4 unidades.

c) Vamos a considerar el nuevo arco $(3, 4)$. Este puede entrar al problema con flujo nulo. Hay que evaluar el costo reducido de ese nuevo arco (hacer el *pricing*). Usando la solución óptima anterior, vemos que el costo reducido es:

$$\bar{c}_{34} = c_{34} - (\pi_3 - \pi_4) = 3 - (-2 - 5) = 0$$

Es decir, este arco no altera la solución (si el costo fuera < 0 definitivamente podemos mejorar), pero genera que el problema tenga múltiples soluciones.

Parte B (10 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + x_2 \\ s.a. & (1 - x_1)^3 - x_2 = 0 \\ & \frac{x_1^2}{4} + x_2 = 1 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^* = (0, 1)$

a) (**2 puntos**) Verifique la regularidad del punto óptimo.

b) (**3 puntos**) Escriba el gradiente de la función objetivo en el punto óptimo como combinación lineal del gradiente de las restricciones en ese punto.

c) (**2 puntos**) Indique, sin resolver nuevamente, cuál sería aproximadamente el valor óptimo del problema si el lado derecho de la segunda restricción cambia de 1 a 1,5.

d) (**3 puntos**) Verifique si el punto óptimo satisface la condición necesaria de segundo orden. ¿Qué puede decir al respecto?

Solución:

a) (**2 puntos**) Se tiene:

$$J(h) = \begin{pmatrix} -3(1-x_1)^2 & -1 \\ \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

que evaluada en el punto queda:

$$J(h)(0,1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango máximo, luego $x^* = (0,1)^T$ es punto regular.

b) (**3 puntos**) Se deben encontrar escalares λ_i tales que $\nabla f = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i$.

Para determinar estos escalares construimos el lagrangeano, que queda:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -2x_1 + x_2 + \lambda_1 \left(-(1-x_1)^3 + x_2\right) + \lambda_2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4} - x_2\right)$$

de donde se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= -2 + 3\lambda_1 (1-x_1)^2 - \tfrac{\lambda_2 x_1}{2} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= -(1-x_1)^3 + x_2 = 0 \quad (3) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= 1 - \tfrac{x_1^2}{4} - x_2 = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Para $x^* = (0,1)$ se tiene:

$$-2 + 3\lambda_1 = 0 \quad (1)$$

$$1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

luego, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ y $\lambda_2 = \frac{5}{3}$, con lo que se tiene que:

$$\nabla f(0,1) = \frac{2}{3}\nabla g_1(0,1) + \frac{5}{3}\nabla g_2(0,1)$$

$$(-2,1) = \frac{2}{3}(-3,-1) + \frac{5}{3}(0,1)$$

c) (**2 puntos**) El valor nuevo óptimo aproximado sería $v = 1 + 0{,}5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{11}{6}$.

d) (**3 puntos**) Para ello calculamos todas las segundas derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} &= -6\lambda_1 (1 - x_1) - \frac{\lambda_2}{2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 x_1} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 x_1} &= 0
\end{aligned}$$

Evaluamos el hessiano del lagrangeano en la solución obtenida, obteniéndose:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}\left(0, 1, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{29}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos ver que el hessiano es semidefinido negativo, luego, se tiene que la solución obtenida debería ser máximo local, pero se dice en el enunciado que corresponde a la solución óptima de un problema de minización. Si se suman directamente las dos restricciones de igualdad se obtiene $(1-x_1)^3 + \frac{x_1^2}{4} = 1$, que es una ecuación cúbica, las que poseen 3 soluciones. Como el método nos entregó una de estas soluciones, las otras dos deben ser complejas. En consecuencia, el punto es la única solución real del problema, y entonces el punto es máximo y mínimo a la vez.

Pregunta 3 (20 puntos)

En la comuna de Bicilandia se ha dispuesto un exitoso programa de préstamo de bicicletas para fomentar su uso y combatir la congestión vehicular. Las bicicletas que se facilitan son de dos tipos: pisteras y de montaña. Los usuarios de las bicicletas deben recogerlas y retornarlas en uno de los n puntos que se han dispuesto para ello, sin que necesariamente deban regresarlas al lugar donde las recogieron. Los puntos están localizados en intersecciones de la ciudad. Al principio de cada día cada sitio i debe contar con p_i bicicletas pisteras y m_i bicicletas de montaña. Sin embargo, al final del día las bicicletas pueden quedar dispuestas en cantidades muy distintas por sitio a las que se requieren a la mañana siguiente. Esto exige desplazar algunas de ellas durante la noche de modo de retomar las cantidades con que debe comenzar el día en cada sitio. Suponga que al final del día cada sitio i tiene un descalce de dp_i bicicletas pisteras y dm_i bicicletas de montaña (que son positivos si sobran bicicletas y negativos si faltan respecto del número que se requiere para la mañana siguiente). Asuma que la suma de dp_i para todo i es cero, al igual que para dm_i. Considere que para llevar bicicletas de un sitio de exceso a uno de deficit se debe pasar por nodos (o intersecciones) en los cuales no hay sitios de arriendo.

Suponga que usted está a cargo de ordenar las bicicletas durante la noche. Para eso cuenta con un mapa de la comuna y conoce el costo que le significa recorrer cada arco de la red por bicicleta transportada, que corresponde a c_{ij} para el desplazamiento entre la intersección (o nodo) i y la intersección j. Cada arco de la red queda definido por dos intersecciones adyacentes. Considere que el costo de moverse por la comuna sin mover bicicletas es despreciable.

Suponga que durante el período en que usted debe mover las bicicletas, los dos puentes levadizos de la comuna están bastante congestionados (pasan embarcaciones fluviales bajo ellos) por lo que se le exige controlar el movimiento de bicicletas por los puentes. Para ello se le exige no pasar por cada puente j más que q_j bicicletas en total (en ambos sentidos).Suponga que el puente j queda definido en su red como el arco (a_j, b_j), para $j = 1, 2$.

a) (**10 puntos**) Formule un modelo de optimización que indique cómo mover las bicicletas a través de la red de calles, desde los puntos de exceso a los puntos de deficit de bicicletas, de modo de minimizar el costo total de transporte.

b) (**10 puntos**) La autoridad decide que la restricción de flujo máximo por puente no es suficiente por lo que decide tarificar el uso de los puentes. La tarifa a pagar en cada puente tiene dos partes. La primera parte consiste en que cada día se debe pagar Z_j si se decide usar el puente j para mover bicicletas en dicho día, independiente del número de bicicletas que se muevan (se paga Z_j sólo si se usa el puente para mover bicicletas). Adicionalmente se le exige pagar una tarifa, T_j, por cada bicicleta que pasa por uno de los puentes. Esta tarifa crece con el número de bicicletas a mover de acuerdo a la siguiente función $T_j = \alpha_j + \beta_j f_j$. En que α_j y β_j son parámetros conocidos, mientras f_j corresponde al número de bicicletas totales que se transportan por el puente j. Indique cómo cambia su modelo de la parte a) bajo este nuevo escenario.

Solución:

a) (**10 puntos**) La red tiene un conjunto de intersecciones o nodos que denominamos N (algunos de ellos corresponden a los sitios) y un conjunto de calles o arcos que denominamos A. Se usarán los siguientes subíndices:

l: se usará para denotar los dos tipos de bicicletas, $l \in \{$ 1 = pistera, 2 = montaña$\}$.

m: se usará para denotar los dos puentes.

i, j, k: se usarán para denotar los nodos.

Se define la siguiente variable.

Variables

x_{ij}^l: número de bicicletas tipo l que se mueven en el arco (i, j).

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar el costo de transporte de ambos tipos de bicicletas.

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{l=1}^{2} c_{ij} \cdot x_{ij}^l$$

Restricciones

R1) Conservación de flujo en cada uno de los N nodos de la red para las bicicletas pisteras.

$$\sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^1 - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^1 = dp_i \quad \forall\, i \in N.$$

R2) Conservación de flujo en cada uno de los N nodos de la red para las bicicletas de montaña.

$$\sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^2 - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^2 = dm_i \quad \forall\, i \in N.$$

R3) Respetar la capacidad de cada puente.

$$\sum_{l=1}^{2} x^l_{a_m,b_m} + \sum_{l=1}^{2} x^l_{b_m,a_m} \leq q_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

o

$$\sum_{l=1}^{2} x^l_{a_m,b_m} \leq q_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

$$\sum_{l=1}^{2} x^l_{b_m,a_m} \leq q_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

R4) Naturaleza de las variables.

$x^l_{ij} \in Z_0^+$, para todo arco $(i,j) \in A$ y tipo de bicicleta $l \in \{1,2\}$.

b) (**10 puntos**) Se define la siguiente variable.

Variables

$$y_m\text{: } \begin{cases} 1 & \text{si el puente } m \text{ se usará.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función objetivo La función objetivo se debe modificar, quedando:

$$\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{l=1}^{2} c_{ij} \cdot x^l_{ij} + \sum_{m=1}^{2} Z_m y_m + \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_m + \beta_m \sum_{l=1}^{2} x^l_{a_m b_m} + \beta_m \sum_{l=1}^{2} x^l_{b_m a_m} \right) \left(\sum_{l=1}^{2} x^l_{a_m b_m} + \sum_{l=1}^{2} x^l_{b_m a_m} \right)$$

R5N) Carga fija de cada puente.

$$\sum_{l=1}^{2} x^l_{a_m b_m} + \sum_{l=1}^{2} x^l_{b_m a_m} \leq M y_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

con $M >>> 0$ (M puede ser igual a q_m).

R4N) Naturaleza de las variables.

$y_m \in \{0,1\}$, para todo puente $m \in \{1,2\}$.