PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Tarea 3

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (8 puntos) La empresa Trenes del Poniente debe diseñar el convoy que utilizará para los envíos de la distribuidora Kimikal al puerto. Estos consisten en dos tipos de envío de productos de acuerdo a su presentación: *granel* y *envasada* (en sacos). Se deben transportar diariamente carga *granel* por un peso total de 240 toneladas y que requiere 225 metros cúbicos de volumen y 550 sacos de carga *envasada*.

La empresa dispone de dos tipos de vagones para montar el convoy: *estándar* y *pesado*. Un vagón de tipo *estándar* tiene capacidad para transportar hasta 20 toneladas de *graneles* que no superen los 30 metros cúbicos, mientras que cada vagón *pesado* puede transportar hasta 30 toneladas de *graneles* con un volumen máximo de 15 metros cúbicos. Todos los vagones tienen un compartimiento separado con capacidad para 50 sacos de carga *envasada*.

Se ha estimado que cada vagón *estándar* tiene un costo de 4 millones de pesos, mientras que cada vagón *pesado*, tiene un costo de 5 millones de pesos durante la duración del contrato. Para la determinación del tren de menor costo se ha planteado el siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 20x_1 + 30x_2 \geq 240 \\ & 30x_1 + 15x_2 \geq 225 \\ & 50x_1 + 50x_2 \geq 550 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(P)}$$

donde x_1 representa la cantidad de vagones *estándar* usados, x_2 es la cantidad de vagones *pesado* usados, y las tres restricciones corresponden al cumplimiento de los requerimientos: peso de la carga de *graneles*, volumen de la carga de *graneles* y número de sacos de *envasados*, respectivamente. Se ha asumido que, para el análisis a realizar, las cantidades de vagones de cada tipo pueden ser fraccionarias.

(i) Resuelva gráficamente el modelo (P). ¿Cuál es la configuración de vagones óptima?, ¿cuál es el valor de la función objetivo?

(ii) Aplique el criterio de optimalidad del método simplex para verificar que la solución propuesta en el punto anterior es óptima.

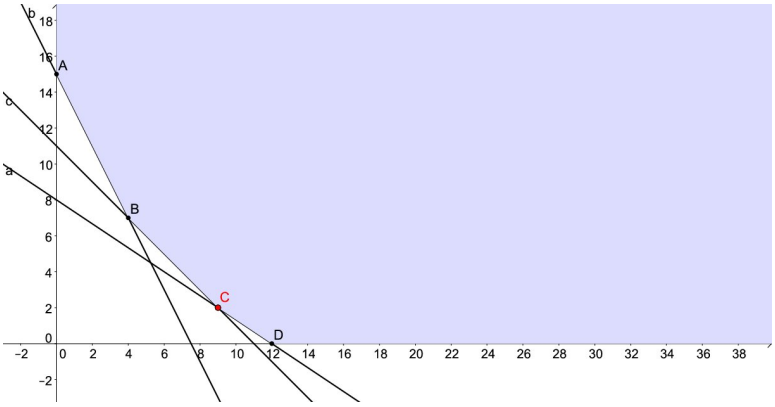
(iii) Plantee el problema dual de (P) y encuentre la solución del problema dual planteado utilizando el teorema de holguras complementarias. Argumente en base al resultado obtenido que la solución de (i) es solución óptima del problema planteado.

(iv) ¿Cuál es el máximo número de sacos de producto *envasado* que se puede requerir transportar sin que se modifique la configuración óptima del convoy?

(v) ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar el costo de los vagones *estándar* para que la configuración óptima considere **únicamente el uso de vagones de tipo *pesado***?

Respuesta:

(i) En la figura se muestra en azul el conjunto factible del problema (P). Si bien el conjunto factible no está acotado, el problema tiene solución. La solución óptima corresponde al punto C ya que: los valores de la función objetivo en los vértices del conjunto factible son: $z(A) = z(0, 15) = 75$, $z(B) = z(4, 7) = 51$, $z(C) = z(9, 2) = 46$ y $z(D) = (12, 0) = 48$.



(ii) Para esto, escribimos el problema en la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 20x_1 + 30x_2 - x_3 \qquad\quad = 240 \\ & 30x_1 + 15x_2 \quad - x4 \quad\; = 225 \\ & 50x_1 + 50x_2 \qquad - x5 = 550 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \tag{P}$$

La solución encontrada en el punto anterior $x_1 = 9$ y $x_2 = 2$, se completa con $x_4 = 75$ y $x_3 = x_5 = 0$. Por lo tanto, la base correspondiente está formada por x_1, x_2 y x_4.

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 30 & 15 & -1 \\ 50 & 50 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 3/50 \\ 1/10 & 0 & -1/25 \\ -3/2 & -1 & 6/5 \end{bmatrix}.$$

Entonces, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} \bar{c_R}^\top &= c_R^\top - c_B^\top B^{-1} R \\ &= (0,0) - (4,5,0) \begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 3/50 \\ 1/10 & 0 & -1/25 \\ -3/2 & -1 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -(4,5,0) \begin{bmatrix} 1/10 & -3/50 \\ -1/10 & 1/25 \\ 3/2 & -6/5 \end{bmatrix} \\ &= -\left(\frac{4}{10} - \frac{5}{10}, -\frac{12}{50} + \frac{10}{50} \right) \\ &= \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{25} \right) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Como ambos son mayores o iguales a cero, probamos que la solución es óptima.

(iii) El problema dual de (P) es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 240y_1 + 225y_2 + 550y_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 20y_1 + 30y_2 + 50y_3 \leq 4 \\ & 30y_1 + 15y_2 + 50y_3 \leq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Hay, al menos, dos formas de resolver este dual.

Usando el Teorema de holguras complementarias:

Como en la solución encontrada en el punto (i) ambas variables son positivas en el óptimo, entonces ambas restricciones del dual son activas en el óptimo. Si además consideramos que la segunda restricción del primal no es activa en el óptimo, entonces $y_2 = 2$ y las otras variables deben satisfacer:

$$\begin{aligned} 20y_1 + 50y_3 &= 4 \\ 30y_1 + 50y_3 &= 5\,, \end{aligned}$$

por lo que $y_1 = 1/10$, $y_3 = 1/25$.

A partir de la base óptima:

Usando la base óptima encontrada en la parte (ii):

$$y^{*\top} = c_B^\top B^{-1} = (4,5,0) \begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 3/50 \\ 1/10 & 0 & -1/25 \\ -3/2 & -1 & 6/5 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{25}\right).$$

(iv) Esto corresponde a analizar cuál es el máximo valor que puede tomar el coeficiente del lado derecho de la tercera restricción. Analicemos cuál es el máximo valor que puede tomar para que la base se mantenga factible:

$$\begin{aligned} 0 \geq B^{-1}b &= \begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 3/50 \\ 1/10 & 0 & -1/25 \\ -3/2 & -1 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240 \\ 225 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -24 + \frac{3b_3}{50} \\ 24 - \frac{b_3}{25} \\ -585 + \frac{6b_3}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, b_3 debe satisfacer

$$\begin{aligned} -24 + \frac{3b_3}{50} \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad -1200 + 3b_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 \geq 400 \\ 24 - \frac{b_3}{25} \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 600 - b_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 \leq 600 \\ -585 + \frac{6b_3}{5} \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad -2925 + 6b_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 \geq \frac{2925}{6} \end{aligned}$$

De acuerdo a estas condiciones, la mayor cantidad de sacos que se podría transportar sin cambiar la configuración óptima es 600.

(v) Observemos que la base que nos están pidiendo analizar no es la encontrada en (i). Nos interesa ahora la base que corresponde al punto A en la figura: x_2, x_3, x_5:

$$B = \begin{bmatrix} 30 & -1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 10/3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Queremos analizar el menor valor que puede tomar c_1 para que esta base sea óptima. Para obtener

condiciones sobre este parámetro, aplicamos las condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned}
0 \leq \bar{c_R}^\top &= c_R^\top - c_B^\top B^{-1} R \\
&= (c_1, 0) - (5, 0, 0) \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 10/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 30 & -1 \\ 50 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (c_1, 0) - (5, 0, 0) \begin{bmatrix} 2 & -1/15 \\ 40 & -2 \\ 50 & -10/3 \end{bmatrix} \\
&= (c_1, 0) - (10, -1/3) \\
&= \left(c_1 - 10, \frac{1}{3} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo mínimo para que deje de ser conveniente incluir vagones de tipo estándar es de 10 millones de pesos.

(b) (7 puntos) Aprovechando la oportunidad de los primeros días fríos de este invierno, un distribuidor de gas envasado ha decidido ofrecer "paquetes de oferta" por varios balones a los clientes institucionales de su zona. En este sentido, a lanzado a la venta sus promociones *súper65* y *extra170* que consisten en las siguientes combinaciones de balones:

- ◇ *Súper65*: un balón de 5kg, un balón de 15kg y un cilindro de 45kg.
- ◇ *Extra170*: un balón de 5kg, dos balones de 15kg y tres cilindros de 45kg.

El distribuidor ha dispuesto que se utilizarán a lo más, 40 balones de 5kg, 50 balones de 15kg y 66 cilindros de 45kg para estas promociones. De acuerdo al precio que ha fijado para las promociones, el beneficio por cada *súper65* es de 10 mil pesos y por cada promoción *extra170* el beneficio es de 24 mil pesos.

Para determinar cuántas de cada tipo debe ofrecer de manera de maximizar el beneficio obtenido, se planteó el siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 10x_1 + 24x_2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_1 + \ x_2 \leq 40 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 50 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 66 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{P}$$

Resolviendo este modelo, se determinó que en la producción óptima (que corresponde a una solución básica factible de (P) se ofrece una cantidad positiva de ambos tipos de promoción y se obtiene un beneficio total de 564 miles de pesos.

Ahora, el responsable de las promociones está analizando la posibilidad de destinar más balones y cilindros y desea ver cuál es el valor marginal de éstos cuando se usan para las promociones. Para esto, debe resolver el problema dual del modelo (P).

(i) Plantee este problema dual.

(ii) Encuentre una solución óptima del problema dual planteado en el punto anterior.

Como parte del estudio, se quiere determinar las cantidades apropiadas de balones y cilindros destinar a las promociones de acuerdo a las necesidades comerciales.

(iii) ¿Hasta qué cantidad podría disminuir la disponibilidad de balones de 15kg para que la combinación de promociones obtenida con el modelo (P) se mantenga óptima?

Finalmente, se está considerando también la posibilidad de modificar los precios que se fijaron para las promociones. Esto tiene impacto directo en los beneficios obtenidos ya que, como no se modifican los costos, los cambios que se produzcan en los precios se trasladan automáticamente a los beneficios. En estas condiciones, es entonces equivalente analizar directamente variaciones en los beneficios por promoción.

(iv) En particular, se está analizando aumentar el beneficio obtenido con la promoción *extra170*. ¿Cuál es el máximo valor que este beneficio puede tener para que la combinación de promociones que se ha determinado siga siendo la óptima?

RESPUESTA:

(i) El problema dual queda:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 40y_1 + 50y_2 + 66y_3 \\ \text{s.a.} & \\ & y_1 + \ y_2 + \ y_3 \geq 10 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 24 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \tag{D}$$

(ii) Como en la solución óptima del problema (P), ambas variables son positivas sabemos, por el teorema de holguras complementarias, que las dos restricciones del dual son activas (son satisfechas como igualdades). Además, considerando que conocemos el valor óptimo de la función objetivo, sabemos que el óptimo del problema dual debe satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 10 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 24 \\ 40y_1 + 50y_2 + 66y_3 &= 564 \end{aligned}$$

que tiene como solución: $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 4$.

(iii) Escribimos la forma estándar del problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -10x_1 - 24x_2 & \\ \text{s.a.} & & \\ & x_1 + \ x_2 + x_3 & = 40 \\ & x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 50 \\ & x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_5 & = 66 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 & \end{array} \tag{P}$$

Del enunciado sabemos que $x_1, x_2 > 0$ y del punto anterior, vemos que las dos últimas restricciones son activas y entonces $x_4 = x_5 = 0$. Por lo tanto, la base está formada por x_1, x_2 y x_3.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

que tiene como inversa:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que esta base siga siendo óptima modificando un lado derecho, basta con verificar que sigue siendo factible:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= B^{-1}b \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ b_2 \\ 66 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3b_2 - 132 \\ -b_2 + 66 \\ 106 - 2b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esto quiere decir, que b_2 debe satisfacer las desigualdades:

$$\begin{aligned} 3b_2 - 132 &\geq 0 \\ -b_2 + 66 &\geq 0 \\ 106 - 2b_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} b_2 &\geq 44 \\ b_2 &\leq 66 \\ b_2 &\leq 53\,. \end{aligned}$$

Como nos interesa saber el mínimo valor posible para b_2 basta con mirar la primera condición que dice: $b_2 \geq 44$.

(iv) Aquí, lo que debemos mantener es que los costos reducidos de las variables no básicas permanezcan mayores o iguales a cero (llamamos c_2 al beneficio por la promoción *extra170*, entonces en la función objetivo de la forma estándar aparece el término $-c_2 x_2$):

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{c}_R^\top &= c_R^\top - c_B^\top B^{-1} R \\ &= (0,0) - (-10, -c_2, 0) \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -(-10, -c_2, 0) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (30 - c_2, -20 + c_2)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente c_2 debe satisfacer las desigualdades $20 \leq c_2 \leq 30$. Por lo tanto, el beneficio por la promoción *extra170* puede ser aumentado hasta 30 mil pesos.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Considere el siguiente problema de Programación Entera:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 15x_1 + 10x_2 \\ s.a. & 15x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ & 10x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

Resuelva este problema usando el algoritmo de Ramificación y Acotamiento, resolviendo los problemas en forma gráfica y dibujando las distintas regiones factibles de los problemas de los nodos. En cada iteración debe reportar el valor del incumbente. Además, cada vez que pode debe indicar claramente la razón por la que se puede podar.

RESPUESTA:
Se debe partir por resolver la relajación lineal del problema, que denotaremos por el nodo P_0 del árbol de exploración.

Su solución óptima es $x^{*T} = [1{,}5, 1{,}5]$, y objetivo $z_0^* = 37{,}5$. Su espacio factible se muestra en celeste en la Figura 1, indicando el vértice óptimo mediante un punto rojo.

Luego, se puede ramificar en ambas variables, ya que ambas tienen coordenadas fraccionarias. Aún no se cuenta con un valor para el incumbente, es decir, $\overline{z} = +\infty$. Veamos ambos casos.

Ramificando primero por x_1

En este caso, se generan dos nodos, P_1 y P_2, que respectivamente son la relajación lineal del problema, más las restricciones $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$, respectivamente.

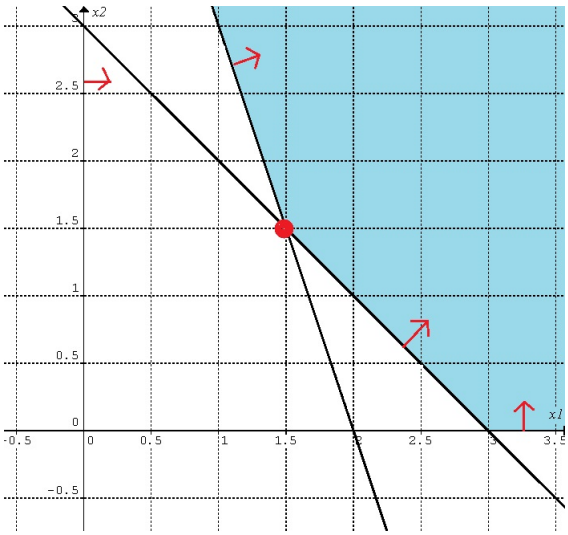


Figura 1: Espacio factible y solución óptima de la relajación lineal del problema, el subproblema P_0.

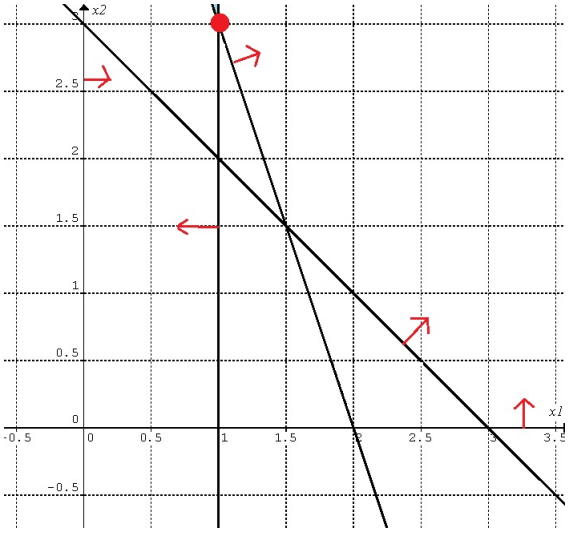


Figura 2: Espacio factible y solución óptima del subproblema P_1, cuando se ramifica primero en x_1.

Al resolver P_1, se obtiene la solución $x^T = [1, 3]$ con $z = 45$. El nodo se poda por ser una solución entera factible. Esto se muestra en la Figura 2. Además ahora $\overline{z} = 45$.

Luego, se resuelve P_2, que tiene solución óptima $x^T = [2, 1]$ con $z = 40$. El nodo se poda por ser una solución entera factible. Esto se muestra en la Figura 3. Además ahora $\overline{z} = 40$.

Ya que no quedan nodos por explorar el algoritmo se detiene, y la solución óptima entera es el incumbente, es decir, $x^{*T} = [2, 1]$, con $z^* = 40$.

El árbol de exploración se presenta en la Figura 4.

Ramificando primero por x_2

En este caso, se generan dos nodos, P_1 y P_2, que respectivamente son la relajación lineal del problema, más las restricciones $x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$, respectivamente.

Al resolver P_1, se obtiene la solución $x^T = [2, 1]$ con $z = 40$. El nodo se poda por ser una solución entera factible. Esto se muestra en la Figura 5. Además ahora $\overline{z} = 40$.

Luego, se resuelve P_2, que tiene solución óptima $x^T = \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ con $z = 40$. Esto se muestra en la Figura 6. El nodo se poda por cota, ya que no se podrán encontrar soluciones mejores que el incumbente actual.

Ya que no quedan nodos por explorar el algoritmo se detiene, y la solución óptima entera es el incumbente, es decir, $x^{*T} = [2, 1]$, con $z^* = 40$.

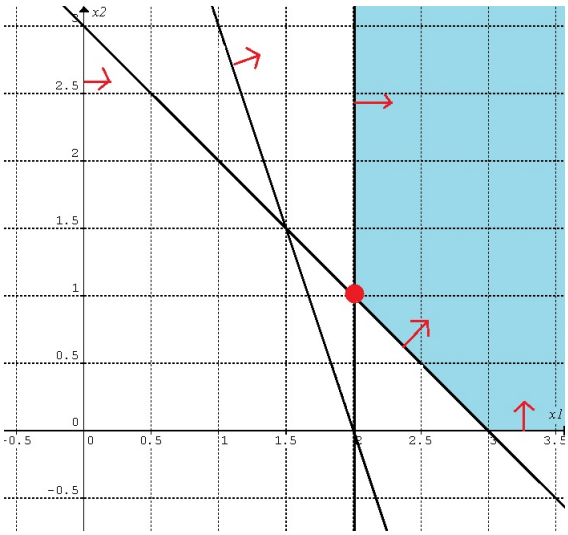


Figura 3: Espacio factible y solución óptima del subproblema P_2, cuando se ramifica primero en x_1.

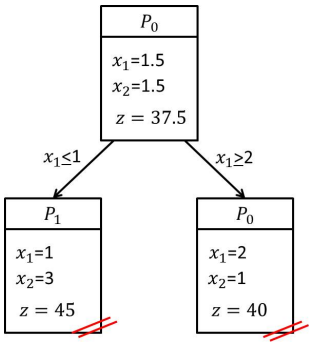


Figura 4: Árbol de exploración resultante, al ramificar primero en x_1 y resolviendo primero la rama izquierda de cada ramificación.

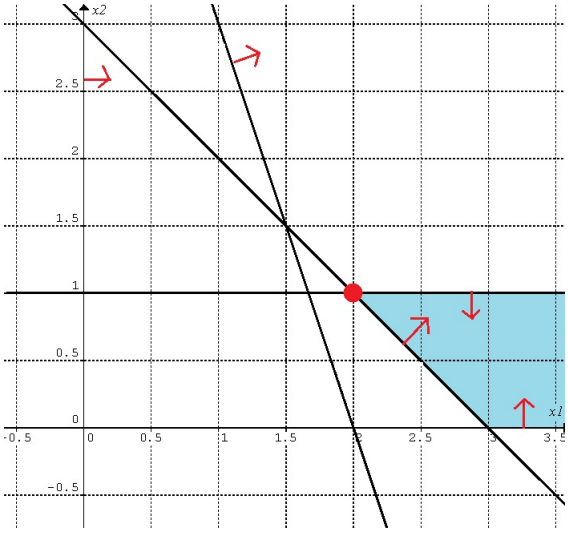


Figura 5: Espacio factible y solución óptima del subproblema P_1, cuando se ramifica primero en x_2.

El árbol de exploración se presenta en la Figura 7.

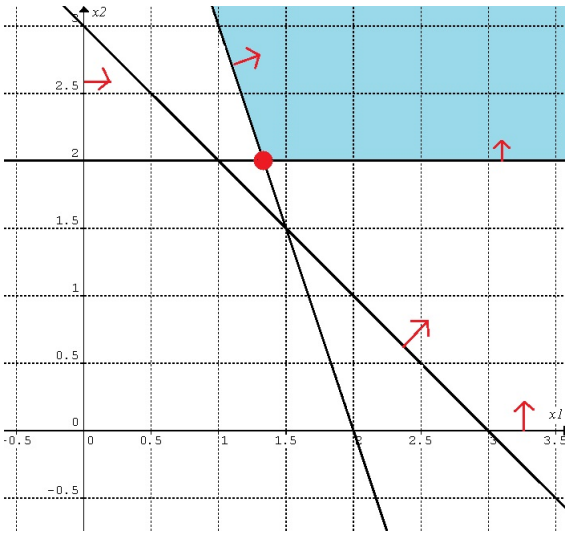


Figura 6: Espacio factible y solución óptima del subproblema P_2, cuando se ramifica primero en x_2.

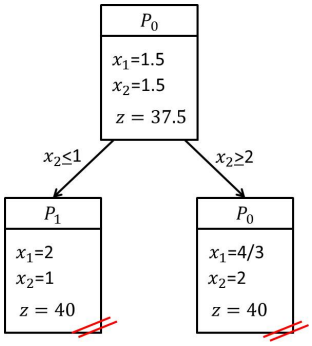


Figura 7: Árbol de exploración resultante, al ramificar primero en x_2 y resolviendo primero la rama izquierda de cada ramificación.

(b) (5 puntos) Considere el siguiente problema de programación entera general (no es 0-1):

$$PE) \quad \begin{array}{lll} \text{máx} & 21x_1 + 11x_2 & \\ s.a. & 7x_1 + 4x_2 & \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & enteros \end{array}$$

La solución $(x_1, x_2) = (1, 1)$ es factible. Sin encontrar la solución óptima de PE), determine cuánto es el error máximo –definido como la diferencia entre el valor de la función objetivo de la solución factible entregada y el valor óptimo de PE)– que se está cometiendo por usar esta solución factible.

Respuesta:
Efectivamente (1,1) es factible y da un valor igual a 32. Podemos calcular el valor de la relajación lineal del problema, por ejemplo (que no es resolver PE). Este es un problema de mochila simple, así que el óptimo se obtiene de asignar todo a la variables con el mayor cuociente entre el coeficiente de la función objetivo y el coeficiente de la restricción. Estos son $21/7 = 3$ y $11/4 = 2,75$. Luego, la solución relajada es $x_1 = 13/7 = 1,86$, que da un valor relajado de 39. Luego, el error es igual a $39 - 32 = 7$.

(c) (5 puntos) Suponga que un problema de programación entera en n variables del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{array}$$

es resuelto mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound). Suponga que el valor óptimo de la relajación lineal del problema es $z_0 = 125,56$. En una etapa intermedia del desarrollo

del algoritmo se ha decidido resolver el subproblema de un nodo específico. En estos instantes el valor del incumbente es de $z' = 108,00$. Al resolver ese subproblema (o nodo del árbol de B&B) el resultado es que casi todas las variables toman valores 0-1, excepto tres, las de índices 5, 7 y 12. Los valores son $x_5 = 0,432$, $x_7 = 0,902$, $x_{12} = 0,221$. El valor óptimo alcanzado por este subproblema del nodo es $105,34$. Explique con precisión lo que se debe hacer a continuación con este nodo específico del árbol de ramificación y acotamiento. Justifique con claridad su respuesta.

RESPUESTA:
Este nodo no se ramifica ya que su valor actual es $105,34$ y cualquier solución entera que se obtenga de ahí dará un valor menor o igual a eso. Actualmente el incumbente es igual a 108, que es una solución entera de mejor valor.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Suponga que a un problema de Programación Lineal se le quieren agregar las siguientes restricciones:

(i) Al menos una de las siguientes dos desigualdades debe cumplirse:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \end{aligned}$$

(ii) Al menos dos de las siguientes tres desigualdades debe cumplirse:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &\leq 32 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &\leq 40 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 60 \end{aligned}$$

Reformule estas restricciones, usando variables binarias adicionales, para que representen lo que se solicita en cada caso.

RESPUESTA:

(i) Se define la variable binaria z_i, que toma valor 1 si se cumple la restricción i y 0 en caso contrario. Si M es un valor más grande que cualquier posible valor que tome el lado izquierdo de las restricciones, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 12 + Mz \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 + M(1 - z) \\ z_1 + z_2 &\geq 1 \\ z \in \{0,1\} & \end{aligned}$$

(ii) En forma análoga:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &\leq 32 + M(1 - z_1) \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &\leq 40 + M(1 - z_2) \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 60 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 &\geq 2 \\ z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\} & \end{aligned}$$

(b) (10 puntos) Sea un problema de la mochila binario de 4 productos, con capacidad volumétrica de $b = 5$ unidades. Se tienen los siguientes vectores de utilidades por producto (u) y de volúmenes ocupados por cada producto (a).

$$\begin{aligned} u^T &= [5,3,3,4] \\ a^T &= [2,3,6,1] \end{aligned}$$

(i) Escriba el problema asociado, y obtenga la solución óptima de su relajación lineal sin utilizar el algoritmo simplex.[1]

(ii) Plantear el problema de detección de desigualdades de cover violadas para los valores obtenidos en (i). Resolver por inspección el problema resultante, y determinar, de ser el caso, la desigualdad de cover más violada por la solución obtenida en (i).

(iii) De la solución de (i), obtenga los cortes de Gomory posibles, y escríbalos en término de las variables originales del problema.[2]

RESPUESTA:

(i) El problema expandido es,

$$\begin{array}{rrrrrrl} \max & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +4x_4 & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +x_4 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \in \mathbb{B} \end{array}$$

Utilizando el algoritmo voraz del documento mencionado, se procede a calcular su utilidad volumétrica.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\frac{u_i}{a_i}$	2,5	1	0,5	4

Por lo que la prioridad de entrada a la mochila será: 4, 1, 2, 3.

Al ingresar los productos en ese orden hasta agotar la capacidad de la mochila resulta $x^T = [1, 2/3, 0, 1]$, con valor óptimo (de la relajación lineal) 11.

(ii) Para un problema de la mochila de n productos, el problema de separación de desigualdades de covers, si $\overline{x}$ es la solución fraccionaria actual, es:

$$CS) \quad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (1-\overline{x}_j)\, z_j \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j z_j \geq b + \epsilon \\ & z \in \mathbb{B}^n \end{array}$$

Donde z_j es 1 si j está en el cover, y 0 en otro caso; y ϵ es un número positivo pequeño.

Si $v\,(CS)) < 1$, las variables z contienen la información de los índices pertenecientes al cover más violado por la solución fraccionaria actual.

Para el problema dado, y la solución fraccionaria obtenida, CS) se reduce a,

$$\begin{array}{rrrrrrl} \min & & \frac{1}{3}z_2 & +z_3 & & & \\ \text{s.a.} & 2z_1 & +3z_2 & +6z_3 & +z_4 & \geq 5+\epsilon \\ & z_1, & z_2, & z_3, & z_4 & \in \mathbb{B} \end{array}$$

Donde por inspección se observa que su valor óptimo es $\frac{1}{3} < 1$, con $z^{*T} = [1, 1, 0, 1]$.

Es decir el cover obtenido es $C = \{1, 2, 4\}$. La desigualdad de cover respectiva es,

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

(iii) Para poder obtener los cortes de Gomory, se requieren las matrices B, R y el vector b, además de algunos productos. Lo primero es escribir el problema en forma estándar.

[1] Revisar documento el documento "Knapsack Problem.pdf" subido en el Siding como Material adicional.

[2] Puede realizar las operaciones matriciales en un software de su preferencia.

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrl}
\min & -5x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -4x_4 & & & & & & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +x_4 & +x_5 & & & & & & = 5 \\
& x_1 & & & & & +x_6 & & & & & = 1 \\
& & x_2 & & & & & +x_7 & & & & = 1 \\
& & & x_3 & & & & & +x_8 & & & = 1 \\
& & & & x_4 & & & & & +x_9 & & = 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9 & & \geq 0
\end{array}
$$

De la solución fraccionaria se obtiene el vector óptimo en forma estándar,

$$x^{*T} = [1, 2/3, 0, 1, 0, 0, 1/3, 1, 0]$$

Por lo que se deduce que, $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_4, x_7, x_8\}$ y $\mathcal{R} = \{x_3, x_5, x_6, x_9\}$.
Es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices requeridas para generar los cortes de Gomory son $B^{-1}R$ y $B^{-1}b$, para la base (actual) óptima.

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desde donde se observa que sólo con las filas 2 y 4 se podrán generar cortes de Gomory, que son respectivamente,

$$
\begin{aligned}
x_5 + x_6 + 2x_9 &\geq 2 \\
2x_5 + 2x_6 + x_9 &\geq 1
\end{aligned}
$$

Que en las variables originales del problema son respectivamente,

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 &\leq 6 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 4
\end{aligned}
$$

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Una empresa fabricará el mismo producto nuevo en dos planteas distintas y después lo enviará a dos almacenes. La fábrica 1 puede mandar una cantidad ilimitada por ferrocarril sólo al almacén 1 mientras que la fábrica 2 puede enviar una cantidad ilimitada por ferrocarril sólo al almacén 2. Sin embargo, se pueden usar camiones de carga independientes para mandar hasta 50 unidades de cada fábrica a cada centro de distribución, desde el que se pueden enviar hasta 50 unidades a cada almacén. En la siguiente tabla, se presenta el costo unitario de embarque para cada alternativa junto con las cantidades que se producirán en las fábricas y las cantidades que se necesitan en los almacenes.

	Centro de Distribución	Almacén 1	Almacén 2	Oferta [unidades]
Fábrica 1	3	7	-	80
Fábrica 2	4	-	9	70
Centro de Distribución	-	2	4	-
Demanda (unidades)	-	60	90	-

(i) Represente en un grafo el problema descrito como un problema de flujo a mínimo costo.

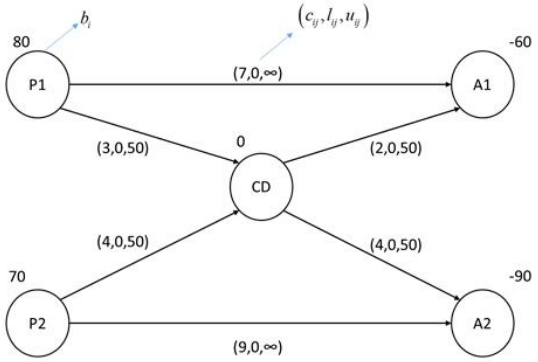
(ii) Formule el modelo matemático asociado.

(iii) Asumiendo capacidades máximas ilimitadas (no restringidas como se indica en el enunciado), encuentre mediante Fase I una solución factible inicial para el problema.

(iv) Partiendo desde el árbol de envergadura máxima encontrado en (iii), resuelva el problema utilizando el algoritmo Simplex de redes.

RESPUESTA:

(i) El grafo es el siguiente:

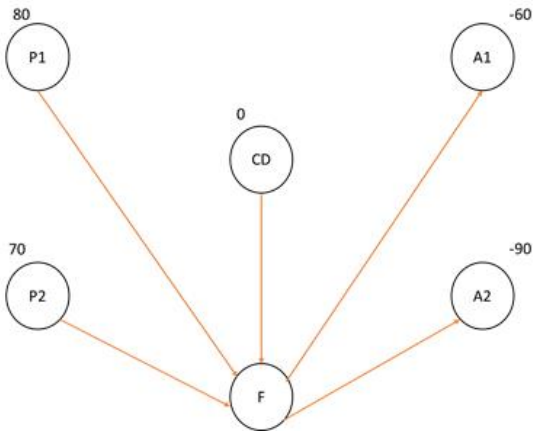


(ii) El modelo matemático asociado es:

$$
\begin{array}{rrrll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij} & & & (P) \\
\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} f_{ki} & = & b_i & \forall\, i \in N & (1) \\
f_{ij} & \leq & u_{ij} & \forall\, (i,j) \in A & (2) \\
f_{ij} & \geq & l_{ij} & \forall\, (i,j) \in A & (3) \\
f_{ij} & \in & \text{enteros} & \forall\, (i,j) \in A & (NV)
\end{array}
$$

donde f_{ij} corresponde al flujo que debe ser enviado desde el nodo i al nodo j. El grafo $G(N, A)$ es tal que $N = \{P1, P2, CD, A1, A2\}$ y $A = \{(P1, A1), (P1, CD), (CD, A1), (P2, A2), (P2, CD), (CD, A2)\}$.

(iii) Se crea un nodo artificial F y se obtiene el siguiente árbol factible inicial:



ITERACIÓN 1:
Los flujos básicos son:$\{f_{P2,F}, f_{P1,F}, f_{CD,F}, f_{F,A1}, f_{F,A2}\}$

Las flujos no básicos son:$\{f_{P1,CD}, f_{P2,CD}, f_{P1,A1}, f_{P1,A2}, f_{CD,A1}, f_{CD,A2}\}$

Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P2,F} & = & 1 - \pi_{P2} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{P1,F} & = & 1 - \pi_{P1} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{CD,F} & = & 1 - \pi_{CD} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{F,A1} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A1} & = 0 \\ \bar{c}_{F,A2} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A2} & = 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que: $\pi_F = 0$, $\pi_{P1} = 1$, $\pi_{P2} = 1$, $\pi_{CD} = 1$, $\pi_{A1} = -1$ y $\pi_{A2} = -1$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,CD} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{CD} & = 0 \\ \bar{c}_{P2,CD} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{CD} & = 0 \\ \bar{c}_{P1,A1} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{A1} & = -2 \\ \bar{c}_{P2,A2} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{A2} & = -2 \\ \bar{c}_{CD,A1} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A1} & = -2 \\ \bar{c}_{CD,A2} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A2} & = -2 \end{array}$$

Entra a la base el arco $(CD, A1)$. Al aplicar el criterio de salida, sale el arco (CD, F) de la base. La reasignación de flujo es $\Delta = 0$.
Iteración 2:
Los flujos básicos son:$\{f_{P1,F}, f_{P2,F}, f_{F,A1}, f_{F,A2}, f_{CD,A1}\}$
Las flujos no básicos son:$\{f_{P1,A1}, f_{P1,CD}, f_{P2,A2}, f_{P2,CD}, f_{CD,A2}, f_{CD,F}\}$

Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,F} & = & 1 - \pi_{P1} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{P2,F} & = & 1 - \pi_{P2} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{F,A1} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A1} & = 0 \\ \bar{c}_{F,A2} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A2} & = 0 \\ \bar{c}_{CD,A1} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A1} & = 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que: $\pi_F = 0$, $\pi_{P1} = 1$, $\pi_{P2} = 1$, $\pi_{CD} = -1$, $\pi_{A1} = -1$ y $\pi_{A2} = -1$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,A1} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{A1} & = -2 \\ \bar{c}_{P1,CD} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{CD} & = -2 \\ \bar{c}_{P2,A2} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{A2} & = -2 \\ \bar{c}_{P2,CD} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{CD} & = -2 \\ \bar{c}_{CD,A2} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A2} & = 0 \\ \bar{c}_{CD,F} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_F & = 1 \end{array}$$

Entra a la base el arco $(P1, CD)$. Al aplicar el criterio de salida, sale el arco $(F, A1)$ de la base. La reasignación de flujo es $\Delta = 60$.
Iteración 3:
Los flujos básicos son:$\{f_{P1,F}, f_{P2,F}, f_{P1,CD}, f_{F,A2}, f_{CD,A1}\}$
Las flujos no básicos son:$\{f_{P1,A1}, f_{F,A1}, f_{P2,A2}, f_{P2,CD}, f_{CD,A2}, f_{CD,F}\}$

Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,F} & = & 1 - \pi_{P1} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{P2,F} & = & 1 - \pi_{P2} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{F,A2} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A2} & = 0 \\ \bar{c}_{P1,CD} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{CD} & = 0 \\ \bar{c}_{CD,A1} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A1} & = 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que: $\pi_F = 0$, $\pi_{P1} = 1$, $\pi_{P2} = 1$, $\pi_{CD} = 1$, $\pi_{A1} = 1$ y $\pi_{A2} = -1$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,A1} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{A1} & = 0 \\ \bar{c}_{P2,CD} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{CD} & = 0 \\ \bar{c}_{P2,A2} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{A2} & = -2 \\ \bar{c}_{CD,A2} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A2} & = -2 \\ \bar{c}_{F,A1} & = & 0 - \pi_F + \pi_{A1} & = 1 \\ \bar{c}_{CD,F} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_F & = 1 \end{array}$$

Entra a la base el arco $(CD, A2)$. Al aplicar el criterio de salida, sale el arco $(P1, F)$ de la base. La reasignación de flujo es $\Delta = 20$.
Iteración 4:
Los flujos básicos son:$\{f_{CD,A2}, f_{P2,F}, f_{P1,CD}, f_{F,A2}, f_{CD,A1}\}$
Las flujos no básicos son:$\{f_{P1,A1}, f_{F,A1}, f_{P2,A2}, f_{P2,CD}, f_{P1,F}, f_{CD,F}\}$

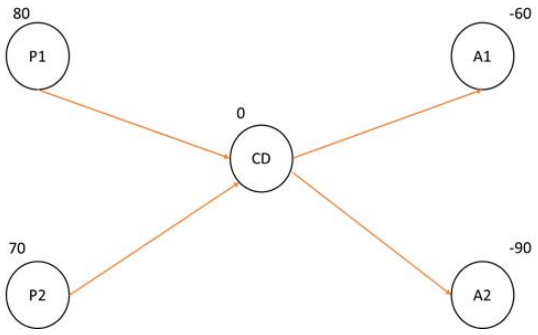
Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P2,F} & = & 1 - \pi_{P2} + \pi_F & = 0 \\ \bar{c}_{F,A2} & = & 1 - \pi_F + \pi_{A2} & = 0 \\ \bar{c}_{P1,CD} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{CD} & = 0 \\ \bar{c}_{CD,A1} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A1} & = 0 \\ \bar{c}_{CD,A2} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_{A2} & = 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que: $\pi_F = 0$, $\pi_{P1} = -1$, $\pi_{P2} = 1$, $\pi_{CD} = -1$, $\pi_{A1} = -1$ y $\pi_{A2} = -1$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{array}{rcll} \bar{c}_{P1,A1} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_{A1} & = 0 \\ \bar{c}_{P2,CD} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{CD} & = -2 \\ \bar{c}_{P2,A2} & = & 0 - \pi_{P2} + \pi_{A2} & = -2 \\ \bar{c}_{F,A1} & = & 0 - \pi_F + \pi_{A1} & = 1 \\ \bar{c}_{CD,F} & = & 0 - \pi_{CD} + \pi_F & = 1 \\ \bar{c}_{P1,F} & = & 0 - \pi_{P1} + \pi_F & = 1 \end{array}$$

Entra a la base el arco $(P2, CD)$. Al aplicar el criterio de salida, sale el arco $(P2, F)$ de la base. La reasignación de flujo es $\Delta = 70$.
En esta iteración han abandonado la base todas las variables artificiales, luego, el árbol obtenido en esta iteración (que se muestra en la siguiente figura) es un árbol básico factible para el problema original. Así que termina la Fase I.



(iv) Partiendo desde el árbol obtenido como resultado de la Fase I, se tiene:
Los flujos básicos son:$\{f_{CD,A2}, f_{P1,CD}, f_{P2,CD}, f_{CD,A1}\}$
Las flujos no básicos son:$\{f_{P1,A1}, f_{P2,A2}\}$

Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

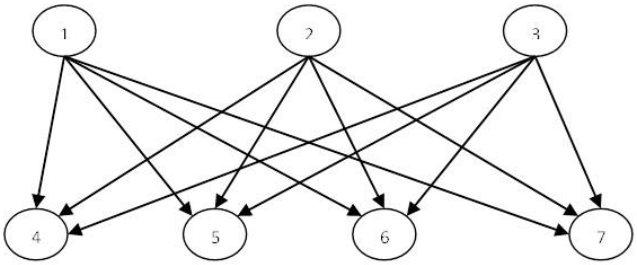
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{P1,CD} &= 3 - \pi_{P1} + \pi_{CD} &= 0 \\
\bar{c}_{P2,CD} &= 4 - \pi_{P2} + \pi_{CD} &= 0 \\
\bar{c}_{CD,A1} &= 2 - \pi_{CD} + \pi_{A1} &= 0 \\
\bar{c}_{CD,A2} &= 4 - \pi_{CD} + \pi_{A2} &= 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que: $\pi_{P1} = 0$, $\pi_{P2} = -1$, $\pi_{CD} = -3$, $\pi_{A1} = -2$ y $\pi_{A2} = -4$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{P1,A1} &= 7 - \pi_{P1} + \pi_{A1} &= 5 \\
\bar{c}_{P2,A2} &= 9 - \pi_{P2} + \pi_{A2} &= 6
\end{aligned}$$

Que es la solución óptima.

(b) (10 puntos) Considere que la red de la siguiente figura representa un problema de transporte:



En la siguiente tabla se muestran las ofertas y demandas de cada nodo y los costos de cada arco.

Nodo	4	5	6	7	Oferta
1	1	6	3	5	20
2	7	3	1	6	10
3	9	4	5	4	25
Demanda	11	13	17	14	

(i) Pruebe si la solución dada por $x_{14} = 11$, $x_{16} = 9$, $x_{25} = 2$, $x_{26} = 8$, $x_{35} = 11$ y $x_{37} = 14$ es óptima. Si no es óptima, encuentre la solución óptima aplicando Simplex de Redes e indique el costo total.

(ii) Determine en cuánto puede variar el costo de transporte entre el nodo 1 y el nodo 4 de modo que el árbol generador óptimo encontrado por usted se mantenga óptima.

RESPUESTA:

(i) Los flujos básicos son:$\{x_{1,4}, x_{1,6}, x_{2,5}, x_{2,6}, x_{3,5}, x_{3,7}\}$
Las flujos no básicos son:$\{, x_{1,5}, x_{1,7}, x_{2,4}, x_{2,7}, x_{3,4}, x_{3,6}\}$

Calculando el valor de las variables duales ($\pi's$):

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{1,4} &= 1 - \pi_1 + \pi_4 &= 0 \\
\bar{c}_{1,6} &= 3 - \pi_1 + \pi_6 &= 0 \\
\bar{c}_{2,5} &= 3 - \pi_2 + \pi_5 &= 0 \\
\bar{c}_{2,6} &= 1 - \pi_2 + \pi_6 &= 0 \\
\bar{c}_{3,5} &= 4 - \pi_3 + \pi_5 &= 0 \\
\bar{c}_{3,7} &= 4 - \pi_3 + \pi_7 &= 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que: $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = -2$, $\pi_3 = -1$, $\pi_4 = -1$, $\pi_5 = -5$, $\pi_6 = -3$ y $\pi_7 = -5$.
Con esto, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{1,5} &= 6 - \pi_1 + \pi_5 &= 1 \\
\bar{c}_{1,7} &= 5 - \pi_1 + \pi_7 &= 0 \\
\bar{c}_{2,4} &= 7 - \pi_2 + \pi_4 &= 8 \\
\bar{c}_{2,7} &= 6 - \pi_2 + \pi_7 &= 3 \\
\bar{c}_{3,4} &= 9 - \pi_3 + \pi_4 &= 9 \\
\bar{c}_{3,6} &= 5 - \pi_3 + \pi_6 &= 3
\end{aligned}$$

Que es la solución óptima. Su costo es de 152.

(ii) Determine en cuánto puede variar el costo de transporte entre el nodo 1 y el nodo 4 de modo que el árbol generador óptimo encontrado por usted se mantenga óptima.

Si el costo del arco $(1, 4)$ se denota por C, los multiplicadores son: $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = -2$, $\pi_3 = -1$, $\pi_4 = -C$, $\pi_5 = -5$, $\pi_6 = -3$ y $\pi_7 = -5$.

Al calcular los costos reducidos de las no básicas en función de C resulta,

$\overline{c_{1,5}} = 6 - (0) + (-5) = 1$ $\overline{c_{1,6}} = 5 - (0) + (-5) = 0$ $\overline{c_{2,4}} = 7 - (-2) + (-C) = 9 - C$ $\overline{c_{2,7}} = 6 - (-2) + (-5) = 3$ $\overline{c_{3,4}} = 9 - (-1) + (-C) = 10 - C$ $\overline{c_{3,6}} = 5 - (-1) + (-3) = 3$

Como los costos reducidos deben ser no negativos en el óptimo, se deduce que $C \leq 9$