Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Primer Semestre de 2011

ICS 1113, Optimización

Interrogación 2 - Solución

Parte 1[22 pts.] :

1. [12 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 - 2x_2 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) [3 pts.] Reescriba este problema en forma estándar de Programación Lineal y formule el problema de Fase I.

Respuesta: El problema en forma estándar es:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 - 2x_2 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

y el problema de Fase I es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & t_1 + t_2 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_4 + t_2 = 12 \\ & x_1, \ldots, x_4, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \geq 0 \end{array}$$

Realmente para la Fase I sólo hace falta una variable artificaial, la t_2.

b) [4 pts.] Resuelva el problema de Fase I y argumente que el problema es, en realidad, infactible.

Respuesta: A continuación se muestran las iteraciones de SIMPLEX para la fase I:

x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b
2	1	1	0	1	0	2
3	4	0	-1	0	1	12
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	20

x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b
2	1	1	0	1	0	2
3	4	0	-1	0	1	12
-5	**-5**	**-1**	**1**	**0**	**0**	-14

El pivote se hace en la primera fila, segunda columna y se obtiene:

x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	b
2	1	1	0	1	0	2
-5	0	-4	0	-4	1	4
5	**0**	**4**	**1**	**5**	**0**	-4

que está en el óptimo. Podemos ver que llegamos al óptimo de Fase I con una variable artificial en la base y con valor positivo. Esto significa que el problema original es infatible.

c) [5 pts.] ¿En cuánto debe cambiar el lado derecho de alguna (o algunas) de las restricciones originales del problema para que este sea factible? Responda esta pregunta sobre la base de la información obtenida al final de la Fase I. Justifique con claridad.

Respuesta: El problema se "arregla" de la siguiente manera: la variable artificial que es positiva es la de la segunda restricción y tiene valor 4. Basta corregir el lado derecho de la segunda restricción en 4 unidades y cambiarlo de 12 a 8. Del tableau de más arriba se ve de inmediato que si ese hubiera sido el valor, las iteraciones terminan con un óptimo igual a 0.

2. [10 pts.] Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 6x_1 + 3x_2 \\ s.a. & 6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) [4 pts.] Escriba el problema dual correspondiente.

Respuesta: El dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2y_1 + 5y_2 \\ s.a. & 6y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ & -3y_1 + 4y_2 \leq 3 \\ & y_1 + y_2 \leq 0 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

b) [2 pts.] Encuentre la solución óptima del dual.

Respuesta: Se ve claramente que la solución óptima del dual es el punto $(y_1, y_2) = (0, 0)$ (no siquiera hay que graficar, basta ver la tercera restricción y el hecho que las variables son no negativas), que es el único punto factible.

c) [4 pts.] A partir de esa solución óptima, encuentre una solución óptima para el problema primal. Explique.

Respuesta: Nótese que las restricciones 1 y 2 del dual son inactivas. Luego, por holguras complementarias las correspondientes variables duales al dual (que son las variables primales) son nulas, es decir, $x_1 = 0, x_2 = 0$. La variable x_3 puede tomar, por otra parte, cualquier valor ≥ 5.

d) **4 puntos extras. No responder esta pregunta no lo perjudica**: describa en forma precisa la forma geométrica que tiene la solución óptima del problema primal.

REspuesta: La región óptima del primal es el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \geq 5\}$. Esto corresponde a un rayo que se extiende desde el punto $(0, 0, 5)$ en forma paralela al eje de la tercera componente. Nótese que en la función objetivo del primal la variable x_3 tiene coeficiente 0. Basta que ese coeficiente sea igual a cualquier valor $\alpha < 0$ (incluso muy pequeño en valor absoluto), para que el problema primal sea infactible. En ese momento el problema dual será infactible ya que la tercera restricción se convertirá en $y_1 + y_2 \leq \alpha < 0$. Lo que ocurre es que el primal está "al borde" de convertirse en un problema no acotado y el dual está "al borde" de converstirse en un problerma infactible.

Parte 2[28 pts.] : Las siguientes preguntas de esta parte todas requieren de respuestas breves. Sea preciso.

1. [4 pts.] Considere el siguente problema de Programación Lineal.

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

¿A qué corresponden las variables de holgura del correspondiente problema dual?

Repuesta: El dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y \\ s.a. & A^T y \leq c \end{array}$$

Las holguras del dual son $s = c - A^T y$ y corresponden a los costo reducidos en el problema primal.

2. [4 pts.] Si tenemos un problema de programación lineal con n variables y m restricciones, entonces en la Fase I deben agregarse necesariamente m variables artificiales. ¿Es eso verdad o no? Explique.

Respusta: o necesaramente si el problema presenta yauna base en forma de indentidad parcialmente formada y que sea factible, sólo hay que agregar las variables artificiales adicionales para completar.

3. [4 pts.] En un problema de flujo a costo mínimo, para que el problema sea factible, basta con que la suma de las ofertas totales sea igual a la suma de las demandas totales. ¿Es verdad o no? Justifique.

Respuesta: No basta con eso, la estructura de la red tene que ser tal que permita al flujo salir de los nodos de oferta. Si hay algún nodo de esos, por ejemplo, que tengo todos los arcs orientados hacia adentro, entonces el flujo no podrá salir y el problema será infactible aunque la oferta esté balanceada con la demanda.

4. [4 pts.] Si un problema de Programación Entera es infactible, entonces la relajación lineal no puede ser factible. ¿Verdad o no? Justifique.

Respuesta: La relajación lineal puede ser factible y no contener nungún punto con coordenadas enteras, tomen por ejemplo la región $\{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1; 0,25 \leq y \leq 0,75; x, y \text{ enteros}\}$, que es vacía, pero que en el relajado es perfectamente factible.

5. [4 pts.] En un problema de Programación Lineal, los valores de las variables duales de las restricciones activas en el óptimo siempre pueden usarse para estimar en cuánto cambia el valor óptimo del problema cuando cambia un lado derecho. ¿Es verdad o no? Explique.

Respuesta: No siempre, tienen que ser únicas, en el sentido que si hay degenerancia, entonces los valores de las variables duales quedan indeterminados y no pueden usarse como estimadores de la sensibildiad de la función objetivo.

6. [8 pts.] Considere un problema de Programación Entera de la forma:

$$P) \quad \begin{array}{rl} z^* = \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax = b, x \geq 0, x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Suponga que el valor óptimo de la relajación lineal es 12.324.657. Suponga que ha aplicado el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound), generando hasta ahora 378 nodos, todos con soluciones fraccionarias. Ahora ramifica y genera un nuevo nodo, obteniendo una solución con valores enteros y cuya función objetivo vale 11.134.629. Esta es la primera solución entera que obtiene.

a) [2 pts.] De un rango de error para el valor óptimo z^*, en estos momentos. Justifique con precisión.

Respuesta: Dado que la relajación lineal da una cota superior (estamos maximizando) y la solución entera es factible (no podemos asegurar nada más), tenemos que 11,134,629 $\leq z^* \leq$ 12,324,657.

b) [3 pts.] Suponga que ahora genera otro nuevo nodo de ramificación y se obtiene una nueva solución entera con valor 11.200.173. ¿Qué hace? Justifique con precisión.

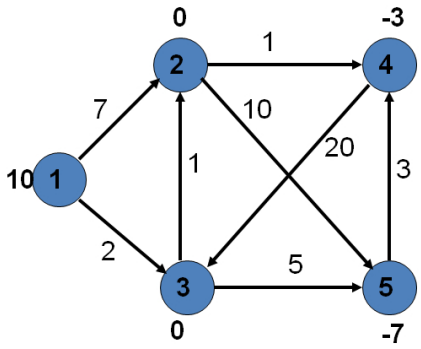
Respuesta: Esta solución entera tene mejor valor que la anterior, así que nos quedamos con esta como incumbente.

c) [3 pts.] Ahora genera otro nodo más, obteniendo una solución fraccionaria, donde la variable de índice 35 vale $x_{35} = 0,34$, y donde el valor de función objetivo de esa solución es 11.146.987. ¿Qué hace ahora? Explique con precisión?

Respuesta: No es nesario ramificar ya que cualquier solución entera que pueda surgir por esta rama tendrá un valor de función objetivo menor a 11.146.987 y ya tenemo una solución entera mejor que eso, con valor de incumbente igual a 11.200.173. Por lo tanto, ese nodo se "poda".

Parte 3[30 pts.] :

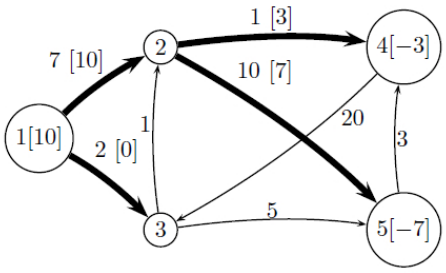
1. [15 pts.] Considere la red de la figura, correspondiente a un problema de flujo a costo mínimo:



Se indica en la figura el valor de las ofertas y demandas y los costos unitarios de flujo por los arcos. Considere la siguiente solución factible: $x_{12} = 10, x_{24} = 3, x_{25} = 7$ y flujos nulos para los demás arcos.

a) [10 pts.] Determine si acaso es óptima esa solución, y en caso de no serlo, haga las iteración necesarias del Algoritmo SIMPLEX especializado a redes indicando con precisión sus cálculos, para llegar al óptimo (debiera necesitar a lo más entre 2 o 3 iteraciones).

Respuesta: A partir de la solución dada tenemos que construir una solución básica factible para el problema de flujo a costo mínimo, es decir, un árbol generador. En este caso, vamos a completar el árbol con un flujo nulo en el arco $(1, 3)$. La figura siguiente muestra el árbol (en los nodos está la identificación del nodo y la oferta o demanda en paréntesis, y sobre los arcos está el flujo y el costo):



Las variables duales se obtienen de $\bar{c}_{ij} = 0$ sobre los arcos básicos y eso da::

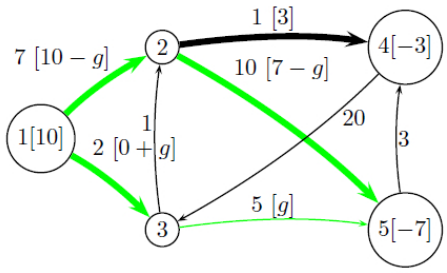
$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= 7 \\ \pi_1 - \pi_3 &= 2 \\ \pi_2 - \pi_4 &= 1 \\ \pi_2 - \pi_5 &= 10 \end{aligned}$$

Fijando $\pi_1 = 0$, entonces $\pi_2 = -7$, $\pi_3 = -2$, $\pi_4 = -8$ y $\pi_5 = -17$. Los costos reducidos de

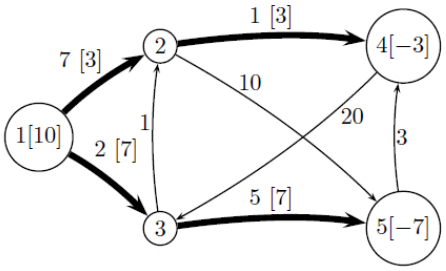
los arcos no básicos son:

$$\begin{aligned}
\bar{c_{32}} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 &= 1 - (-2) + (-7) = -4 \\
\bar{c_{35}} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 &= 5 - (-2) + (-17) = -10 \\
\bar{c_{43}} = c_{43} - \pi_4 + \pi_3 &= 20 - (-8) + (-2) = 26 \\
\bar{c_{54}} = c_{54} - \pi_5 + \pi_4 &= 3 - (-17) + (-8) = 12
\end{aligned}$$

Hacemos entrar el arco $(3, 5)$. El ciclo formado se muestra en la Figura



Se pueden mandar $g = 7$ unidades y x_{25} sale de la base. La nueva base y flujos se muestran en la Figura:



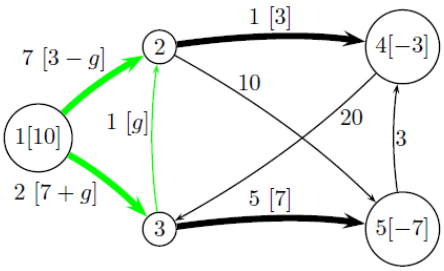
Las variables duales son:

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_2 &= 7 \\
\pi_1 - \pi_3 &= 2 \\
\pi_2 - \pi_4 &= 1 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 5
\end{aligned}$$

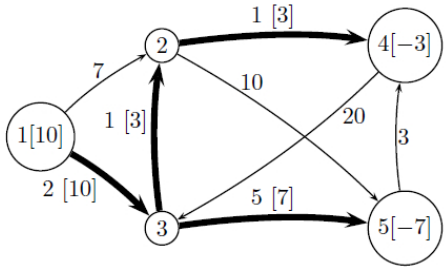
Fijando $\pi_1 = 0$, entonces $\pi_2 = -7$, $\pi_3 = -2$, $\pi_4 = -8$ y $\pi_5 = -7$. Los costos reducidos de los arcos no básicos son:

$$\begin{aligned}
\bar{c_{32}} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 &= 1 - (-2) + (-7) = -4 \\
\bar{c_{25}} = c_{25} - \pi_2 + \pi_5 &= 10 - (-7) + (-7) = 10 \\
\bar{c_{43}} = c_{43} - \pi_4 + \pi_3 &= 20 - (-8) + (-2) = 26 \\
\bar{c_{54}} = c_{54} - \pi_5 + \pi_4 &= 3 - (-7) + (-8) = 2
\end{aligned}$$

Ahora entra el arco $(3, 2)$. El ciclo formado se muestra en la Figura:



Por lo tanto se puede mandar un flujo de $g = 3$ y x_{12} sale de la base. La nueva base y flujos se muestran en la Figura:



LAs variables duales son:

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_3 &= 2 \\ \pi_3 - \pi_2 &= 1 \\ \pi_2 - \pi_4 &= 1 \\ \pi_3 - \pi_5 &= 5 \end{aligned}$$

Fijando $\pi_1 = 0$, entonces $\pi_2 = -3$, $\pi_3 = -2$, $\pi_4 = -4$ y $\pi_5 = -7$. Los costos reducidos de los arcos no básicos son:

$$\begin{aligned} \bar{c_{12}} = c_{12} - \pi_1 + \pi_2 &= 7 - (0) + (-3) = 4 \\ \bar{c_{25}} = c_{25} - \pi_2 + \pi_5 &= 10 - (-3) + (-7) = 6 \\ \bar{c_{43}} = c_{43} - \pi_4 + \pi_3 &= 20 - (-4) + (-2) = 22 \\ \bar{c_{54}} = c_{54} - \pi_5 + \pi_4 &= 3 - (-7) + (-4) = 6 \end{aligned}$$

Como todos los costos reducidos son no negativos, la base es óptima, con $x_{13} = 10$, $x_{32} = 3$, $x_{24} = 3$, $x_{35} = 7$ y $x_{ij} = 0$ para todos los otros arcos. El costo alcanzado es $Z = 61$.

b) [5 pts.] Si calculó correctamente la solución de a), el arco $(4, 3)$ no lleva flujo en la solución óptima. ¿En cuánto debe disminuir el costo de ese arco para que se haga atractivo utilizarlo? Explique el sentido de su resultado.

Respuesta: Un arco es atractivo de entrar a la base si su costo reducido es negativo. Por lo tanto se busca que:

$$\begin{aligned} \bar{c'_{43}} < 0 \quad \Leftarrow \quad & c'_{43} - \pi_4 + \pi_3 < 0 \\ & c'_{43} < \pi_4 - \pi_3 \\ & c'_{43} < (-4) - (-2) \\ & c'_{43} < -2 \end{aligned}$$

2. [15 pts.] Esta pregunta presenta una simplificación del problema de planificación de la matriz energética. Un país debe considerar la construcción de algunas centrales de generación eléctrica. Existen m lugares seleccionados y en cada lugar se puede desarrollar o no un proyecto para construir una central de generación eléctrica, y existen n centros de consumo que deben ser abastecidos. La demanda (en Mega Wats) en el centro de consumo j, sobre el horizonte en el cual se evalúa este plan, es $d_j[MW], j = 1, \ldots, n$. Si se desarrolla el proyecto del lugar i y se construye esa central, esta tendrá una capacidad máxima de generación igual a $G_i[MW], i = 1, \ldots, m$. La inversión requerida para la central en el lugar i es $K_i[\$]$, y una vez instalada, esta tendrá un costo variable de producción igual a $c_i[\$/MW]$. Los m proyectos de centrales de generación están distribuidos geográficamente en 4 regiones, y denotemos por $R_k \subset \{1, \ldots, m\}$ el conjunto de proyectos (lugares) asociados a la región k. Igualmente, una parte de los m proyectos corresponden a centrales de fuentes no convencionales (viento, solar, geotérmica, etc.). Sea $NC \subset \{1, \ldots, m\}$ el conjunto de proyectos correspondientes a energías no convencionales. Diversos tipos de consideraciones asociadas a la protección ambiental han establecido que en cada región debe haber al menos un projecto basado en energías no convencionales. Escriba un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar qué projectos deben ser realizados con el objetivo de satisfacer la demanda, cumplir las condiciones medioambientales y que el costo total incurrido (inversión más costo de operación) sea mínimo (puede asumir que $R_k \cap NC \neq \emptyset, k = 1, \ldots, 4$).

Respuesta: POdemos construir el modelo con las siguientes variables:

x_{ij}**:** Cantidad de energía enviada desde la central i al centro de consumo j.

y_i**:** Cantidad de energía generada en i.

z_i**:** igual a 1 si se implementa el proyecto en i, 0 si no.

El modelo es:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i y_i + \sum_{i=1}^{m} K_i z_i \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i, i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1, \ldots, n \\
& y_i \leq G_i z_i, i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i \in R_k \cap NC} z_i \geq 1, k = 1, \ldots, 4 \\
& x_{ij} \geq 0, y_i \geq 0, z_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Parte 4[20 pts.] : Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema es puesto en forma estándar agragando variables x_3, x_4, x_5 y x_6. El problema es resuelto mediante el algoritmo SIMPLEX, obteniéndose el siguiente tableau final (los costos reducidos son la última fila):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
0	3/2	1	−1/2	0	0	2
1	1/2	0	1/2	0	0	4
0	3/2	0	1/2	1	0	5
0	1	0	0	0	1	2
0	**−1/2**	**0**	**−5/2**	**0**	**0**	20

Las variables básicas en el óptimo son x_1, x_3, x_5, x_6.

1. [6 pts.] Utilizando únicamente la información contenida en ese tableau, ¿cuál es la inversa de la matriz básica correspondiente a la solución óptima? ¿Cuál es el valor de las variables duales en el óptimo?

   Respuesta: El Tablau está desordenado (la identidad está desordenada), así que hay que arreglar eso intercambiando las filas 1 y 2. Con eso, tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
1	1/2	0	1/2	0	0	4
0	3/2	1	−1/2	0	0	2
0	3/2	0	1/2	1	0	5
0	1	0	0	0	1	2
0	**−1/2**	**0**	**−5/2**	**0**	**0**	20

   La inversa de la base está en donde originalmente estaba la identidad inicial, que está formada por las variables de holgura. Esto corresponde a las cuatro últimas columnas. Luego, la inversa de la base es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Por otro lado, las variables duales están, con signo cambiado, en la posición de los costos reducidos

de esas cuatro columnas. Luego:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. [6 pts.] Determine los límites de sensibilidad del coeficiente del lado derecho de la segunda restricción.

Respuesta: Para la sensibilidad de la segunda restricción tenemos que calcular δ tal que

$$(B^{-1})_i \delta \geq -x_B$$

Esto lleva a:

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \geq \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esto implica:

$$\delta \geq -8, \delta \leq 4, \delta \geq -10$$

de donde se deduce que $-8 \leq \delta \leq 4$ o, equivalentemente, que b_2 puede variar entre 0 y 12.

3. [4 pts.] La variable x_2 actualmente tiene valor 0 por ser no básica. ¿En cuándo debe aumentar el coeficiente de x_2 en la función objetivo para que convenga usarla en la solución?

Respuesta: x_2 es no básica, en este caso el límite de cambio es $\delta \geq -\bar{c}_2$, es decir, $\delta \geq 1/2$. Esto significa que c_2 debe ser mayor a $2,5$.

4. [4 pts.] Se desea incorporar una nueva actividad (variable) en el problema, la llamaremos x_7. Esta variable tien un coeficiente en la función objetivo $c_7 = 3$ y los coeficientes correspondientes a la nueva columna son

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine si acaso conviene incorporar al problema la nueva variable x_7 o no.

Respuesta: Para esto hay que evaluar el costo reducido de la nueva columna ("pricing", como lo llamamos en clases), eso es:

$$\bar{c}_{nuevo} = c_{nuevo} - (A_{\cdot nuevo})^T \pi = 3 - \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 - 5 = -2 < 0$$

Como estamos maximizando, se concluye que no conviene introducir esa nueva columna.