PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Examen

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (15 puntos)

Responda **solamente 5** de las siguientes 8 preguntas (si responde más se revisarán sólo las 5 primeras).

(a) (**3 puntos**) Escriba una ventaja y una desventaja de cada uno de los algoritmos del gradiente y de Newton.

Respuesta:

	Newton	**Gradiente (Cauchy)**
Ventajas	· Uso de información de segundo orden. · Buena convergencia final y cuadrática.	· Iteraciones 'baratas'de realizar. · Avance rápido inicial. · Popularidad reciente en problemas de "Big Data" y similares.
Desventajas	· 'Costo computacional'de invertir la matriz Hessiana. · Potencial inestabilidad numérica al no tener expresiones cerradas para las segundas derivadas.	· Dificultad para converger sobre el final. · Dependencia de la velocidad de convergencia de la forma de las curvas de nivel de la función objetivo. · Convergencia solo lineal.

(b) (**3 puntos**) Comente, justificando con precisión, la validez de la siguiente afirmación. "Para que un punto sea mínimo de un problema de optimización no lineal con restricciones, el Hessiano de la función objetivo debe ser definido positivo".

Respuesta: La afirmación es falsa. Para que un punto $\overline{x}$ sea mínimo de un problema de optimización no lineal con restricciones, basta con que se cumpla la condición $d^T \left[H\mathcal{L}\left(\overline{x}\right)\right] d \geq 0$, para toda dirección factible d desde el punto $\overline{x}$. La condición planteada exige convexidad de la función objetivo, más que lo suficiente. Se puede también argumentar con un ejemplo, que puede ser muy simple. Por ejemplo, con una función de una variable: $\text{mín}\{x^4 : 0 \leq x \leq 1\}$. En este caso el mínimo está en 0 (de hecho, es el no restringido) y el Hessiano en ese punto es 0, que no es "definido positivo".

(c) (**3 puntos**) Diga a qué corresponden (dentro de los contenidos del curso) cada grupo de las condiciones de KKT, aplicadas a un problema de programación lineal en forma estándar.

Respuesta: El problema de programación lineal en forma estándar es el siguiente,

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Las condiciones de KKT para un problema con la siguiente forma,

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) = b,\ \forall i \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Son las siguientes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} &\geq 0,\ \forall j \\ x_j \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right] &= 0,\ \forall j \\ g_i(x) &= b,\ \forall i \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

El primer grupo de expresiones es,

$$c_j + \sum_i \lambda_i A_{ij} \geq 0,\ \forall j$$

Que son expresiones para los costos reducidos en el óptimo, si se hace $\pi = -\lambda$. También puede verse como una expresión de factibilidad dual.

El segundo grupo corresponde a,

$$x_j \left(c_j + \sum_i \lambda_i A_{ij} \right) = 0,\ \forall j$$

Que exige que en el óptimo una variable con coordenada no nula tenga costo reducido nulo (las variables básicas si nos limitamos a los vértices del poliedro factible). Obviamente, esto puede verse directamente como una mitad del teorema de holguras complementarias (que liga holguras duales con variables primales).

El tercer grupo es,

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_j,\ \forall j \Leftrightarrow Ax = b$$

Que corresponde a la primera parte de la factibilidad primal (la matriz de coeficientes tecnológicos).

El último grupo es,

$$x_j \geq 0,\ \forall j \Leftrightarrow x \geq 0$$

Que es la segunda parte de la factibilidad primal (la no-negatividad de las variables de decisión).

Aquí lo que importa conceptualmente son los dos primeros grupos ya que los dos siguientes son trivialmente factibilidad, por lo que la respuesta se considera correcta con los dos primeros grupos y la asociación a costos reducidos y complementariedad.

(d) (**3 puntos**) ¿En qué caso el algoritmo de Dijkstra no convergería o sería incapaz de entregar un árbol generador de rutas mínimas? Dé un ejemplo.

Respuesta: Cuando no existe un camino dirigido desde el nodo raíz a cada nodo del grafo.

Por ejemplo, al tratar de encontrar el árbol de rutas más cortas desde el nodo A en un grafo de tres nodos; A, B y C, con los siguientes arcos de costo unitario: (A, B), (B, A) y (C, B).

(e) (**3 puntos**) ¿Por qué es necesario usar arcos en sentido contrario al flujo transportado en el grafo residual del algoritmo de Ford-Fulkerson? ¿Qué permiten o evitan?

Respuesta: Permiten encontrar nuevos caminos de aumento de flujo, dejando que el algoritmo, en iteraciones posteriores (en el grafo original), se 'arrepienta'de enviar flujo en un arco. La capacidad de estos arcos en el grafo residual permite respetar las restricciones de no-negatividad de las variables de flujo.

(f) (**3 puntos**) Suponga que está interesado en elegir un conjunto de inversiones, $\{1, \ldots, 7\}$, y que para modelar esto utiliza la variable binaria x_i que representa su decisión de invertir o no en la inversión i. Traduzca en restricciones las siguientes afirmaciones:

(i) Puede invertir en 1 y 5 simultáneamente o en ninguna de ellas.

(ii) Debe elegir al menos una de las inversiones 1, 2, 3 o al menos dos de las inversiones 2, 4, 5 y 6.

Respuesta:

(i) $x_1 = x_5$

(ii) Si se consideran ambas condiciones como excluyentes (un 'o'lógico exclusivo), y se define la variable y como 1, si se cumple la primera condición, y 0 en otro caso, resultan las siguientes restricciones,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 - M_1 (1 - y) \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 2 - M_2 y \\ y &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

En ambos casos M_1 y M_2 son números suficientemente grandes (al menos 1 y 2, respectivamente). Otra opción era pensar como que se pide que al menos una de las restricciones se cumpla. Se define y_i como 1 si la condición i se cumple, y 0 en otro caso. Las restricciones resultantes son:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 - M_1 (1 - y_1) \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 2 - M_2 (1 - y_2) \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\in \{0, 1\} \\ y_2 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

En ambos casos M_1 y M_2 son números suficientemente grandes (al menos 1 y 2, respectivamente).

(g) (**3 puntos**) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o no: "En un problema de minimización con restricciones de desigualdad, si en un punto no se cumple la condición de regularidad, entonces no pueden cumplirse las condiciones KKT". Explique con precisión.

Respuesta: No, el gradiente podría igual ser escrito como combinación lineal positiva de los gradientes de las restricciones activas, aunque no se cumplan las condiciones de regularidad. La Figura 1 muestra un ejemplo.

(h) (**3 puntos**) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o no: "Si el método de Newton y el método del gradiente se inician simultáneamente para minimizar una función convexa (que tiene mínimo), después de un tiempo fijo de, digamos T segundos, el punto generado por la iteración actual del método de Newton estará más cerca del óptimo que el del método del gradiente". Justifique con precisión.

Respuesta: No necesariamente, si bien Newton tienen convergencia cuadrática, y avanza con significativamente menos iteraciones que el método del gradiente, si cada una de esas iteraciones consume mucho tiempo (debido a la inversión del Hessiano, por ejemplo), entonces el tiempo total podría ser mayor. El bajo costo por iteración es precisamente una de las ventajas del método del gradiente.

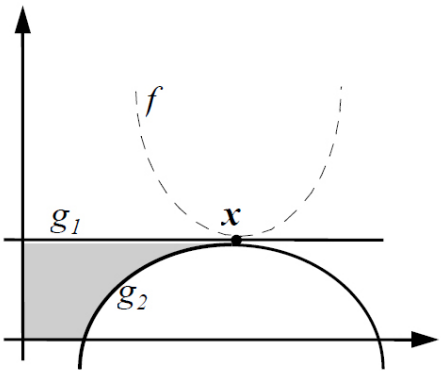


Figura 1: Ejemplo pregunta 1.g.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**4 puntos**) Considere la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = bx_1^2 + ax_1x_2 + bx_2^2 + e^{cx_3}$$

donde $c \neq 0$. Utilice las condiciones de segundo orden para determinar qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función tenga mínimo global único.

Respuesta: Es importante recordar que las condiciones de segundo orden exigen que exista al menos un punto estacionario para la función. Esto se determina calculando la gradiente y buscando que se anulen sus componentes, es decir,

$$\nabla f\,(x_1, x_2, x_3) = (2bx_1 + ax_2, ax_1 + 2bx_2, ce^{cx_3})$$

Donde se observa que la función no tiene puntos estacionarios (ya que $e^{cx_3} > 0,\ \forall x_3 \in \mathbb{R}$). Por lo que no existen valores de a, b y c para que el problema tenga mínimo global único. Este argumento recibe el puntaje completo.

Por otra parte, si no se revisó la existencia de puntos estacionarios, entonces se buscaron valores de a, b y c tales que el Hessiano de la función sea definido positivo para todo valor posible de las coordenadas.

La matriz Hessiana resulta ser,

$$Hf\,(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2b & a & 0 \\ a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & c^2e^{cx_3} \end{pmatrix}$$

Usando determinantes, se obtiene que las condiciones sólo son sobre a y b, a saber,

$$\begin{aligned} b &> 0 \\ 4b^2 &> a^2 \end{aligned}$$

Este desarrollo recibe la mitad del puntaje (3.5 puntos).

(b) (**8 puntos**) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique adecuadamente su respuesta.

(i) En problemas de redes, donde se pide que los flujos exógenos sean enteros, es posible utilizar sólo la relajación lineal ya que la matriz A es totalmente unimodular y entonces el poliedro $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ tiene todos sus puntos extremos enteros.

Respuesta: Verdadera. Efectivamente los problemas de redes tienen matrices de coeficientes tecnológicos A totalmente unimodular (sólo tiene elementos de valor 1, 0 y -1).

La argumentación podía hacerse diciendo que sin importar la base factible utilizada, la inversa de la matriz de base tendría también sólo elementos 1, 0 y -1, con lo que si los flujos exógenos (el vector b del problema) son enteros, toda solución básica (vértice del poliedro) tendrá coordenadas enteras, sin importar el objetivo a utilizar.

(ii) En el método Simplex si se comete un error al elegir la columna del pivote (y el resto del cálculo se hace correctamente), la siguiente solución básica puede ser infactible.

Respuesta: Falsa. Al elegir mal sólo la columna del pivote se estaría afectando la convergencia del algoritmo hacia soluciones de igual o menor valor objetivo (si el problema es de minimizar), ya que se estaría eligiendo mal la variable de entrada a la base. La factibilidad de la nueva base se busca al determinar la fila del pivote (la variable que sale de la base actual).

(iii) En el método Simplex si se elige correctamente la columna que entra a la base pero se comete un error al elegir la fila del pivote la siguiente solución básica puede ser infactible.

Respuesta: Verdadera. El elegir mal la fila del pivote, no se está haciendo salir de la base actual a la primera variable que anule su coordenada. Por esto, dicha variable podría tener coordenada negativa, resultando una base infactible.

(iv) Si en el método simplex por tableau aparece un 0 en el lado derecho de la fila i, en la siguiente iteración no es posible pivotear en la fila i.

Respuesta: Falsa. En este caso el vértice actual es degenerado. Puede pivotearse en la fila i, con tal que la fila tenga al menos un elemento positivo. Lo único especial que ocurrirá es que las coordenadas del punto asociado a la nueva base no cambiarán.

c) (**3 puntos**) Considere la siguiente expresión:

$$\sum_{j \in C, j \notin D} K_j x_j \leq P$$

donde C y D son ciertos conjuntos, x son variables binarias, los K_j son parámetros conocidos para todo j y P es una constante conocida.
Escriba las expresiones en AMPL o GAMS necesarias (las que irían en el archivo de modelo) para codificar esa expresión.

Respuesta: Una posible codificación en AMPL es la siguiente, que asume que C y D son a su vez subconjuntos de otro más grande, N,

```
set N;
set C within N;
set D within N;

param P;
param K{j in N};

var x{j in N};

subject to rest: sum{j in N: j in C and j not in D} K[j]*x[j] <= P;
```

Puede haber más de una forma de escribir todo esto.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**6 puntos**) En muchas aplicaciones de geometría computacional interesa optimizar una función lineal sobre la superficie de una elipse. Esto lleva a considerar el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & (x - \bar{x})^T Q (x - \bar{x}) = 1 \end{array}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva de $n \times n$, y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es fijo y conocido y corresponde al centro de la elipse.

Determine la solución óptima de este problema.

Respuesta: El Lagrangeano del problema es:

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda((x - \bar{x})^T Q(x - \bar{x}) - 1)$$

Tenemos que calcular el gradiente de este Lagrangeano:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = c + 2\lambda Q(x - \bar{x})$$

De $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ obtenemos:

$$x^* = \bar{x} - \frac{1}{2\lambda} Q^{-1} c$$

y reemplazando $(x^* - \bar{x})$ en la restricción tenemos:

$$(x^* - \bar{x})^T Q(x^* - \bar{x}) = \frac{1}{4\lambda^2} c^T Q^{-1} Q Q^{-1} c = 1,$$

de donde

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^T Q^{-1} c}$$

y basta elegir el λ que dé el mejor valor de $c^T x^*$.

(b) (**9 puntos**) Considere el siguiente problema de Programación Lineal (observe que es de maximización):

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & 3x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{array}$$

(i) (**3 puntos**) Determine (como a usted más le acomode) la solución óptima del problema y muestre que las condiciones KKT se cumplen en ese punto. Determine los valores de los multiplicadores de Lagrange.

Respuesta: Como el problema es en dos variables, la forma más directa de encontrar la solución es gráficamente. La Figura 2 muestra la región factible, los gradientes de las restricciones y el gradiente de la función objetivo:

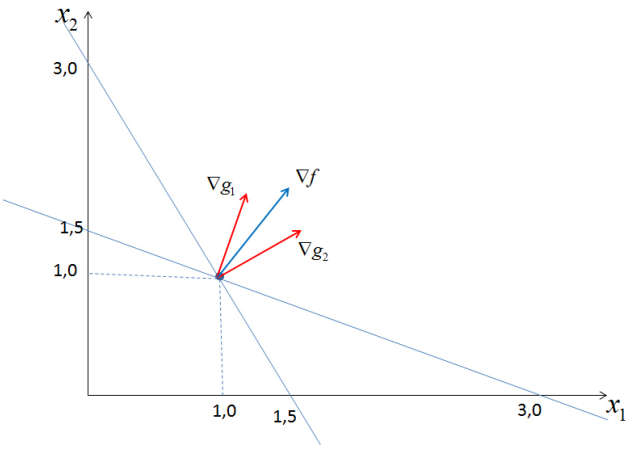


Figura 2: Solución problema 3.b.i.

De la figura se ve claramente que la solución óptima es el punto $(1, 1)$, con un valor óptimo de 2. El Lagrangeano del problema es:

$$L(x, \lambda) = -(x_1 + x_2) + \lambda_1(3x_1 + 6x_2 - 9) + \lambda_2(6x_1 + 3x_2 - 9)$$

(notar que hemos puesto la función objetivo con signo negativo dado que el problema es de maximización). De este modo, deben existir multiplicadores de Lagrange $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, tales que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2}(1, 1) = 0,$$

que es lo mismo que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es $(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Esto muestra que se cumple KKT ya que además la condición de holgura complementaria se cumple al ser ambas restricciones activas.

(ii) (**2 puntos**) Muestre que los multiplicadores de Lagrange determinados por usted en (i) son soluciones óptimas del problema dual a P) (eventualmente puede tener que cambiar signo, según como considere el Lagrangeano).

Respuesta: El problema dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 9y_1 + 9y_2 \\ s.a. & 3y_1 + 6y_2 = 1 \\ & 6y_1 + 3y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Se ve de inmediato que si tomamos $(y_1, y_2) = (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$, entonces las restricciones del dual se cumplen. Además, al evaluar la función objetivo tenemos $9y_1 + 9y_2 = 9(1/9 + 1/9) = 2$ que es precisamente el valor óptimo de P). Luego, los multiplicadores de Lagrange son solución óptima del dual.

(iii) (**3 puntos**) Considere ahora el siguiente problema, que tiene una restricción adicional a P):

$$\tilde{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & 3x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \end{array}$$

Muestre que la solución encontrada por usted en i) es también solución óptima de $\tilde{P}$) y que también cumple KKT.

Respuesta: Notemos que la restricción corresponde a un círculo de radio $\sqrt{2}$, la Figura 3 muestra la nueva situación, con la nueva restricción.

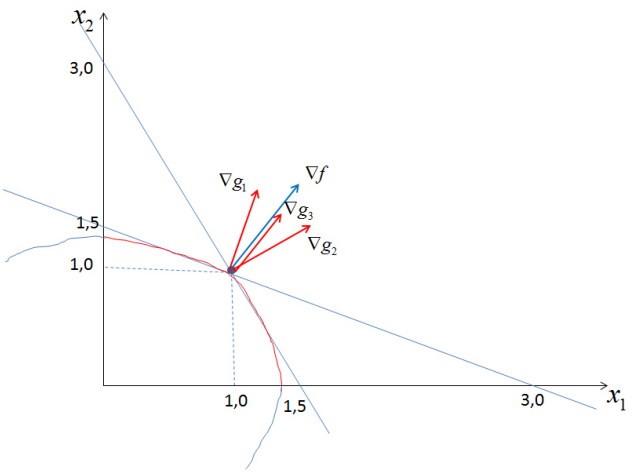


Figura 3: Solución problema 3.b.iii.

Se ve que la restricción pasa precisamente por el punto $(1, 1)$, solución de P), y la restricción obviamente se cumple, así que el punto sigue siendo solución óptima del nuevo problema.

Además, ahora hay una restricción adicional (llamémosla g_3, cuyo gradiente es:

$$\nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

y el sistema de KKT queda:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde λ_3 es el multiplicador de la nueva restricción. Este sistema se resuelve con, por ejemplo, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1/9, 1/9, 0)$. Esto muestra que se sigue cumpliendo KKT.

(iv) (**1 punto**) ¿Pueden usarse los multiplicadores de Lagrange del problema $\tilde{P}$) para estimar el cambio de la función objetivo cuando cambia el lado derecho de alguna de las restricciones? Justifique con precisión su respuesta.

Respuesta: La solución de multiplicadores mostrada en iii) no es la única. Luego, los multiplicadores está sobredeterminados y no pueden ser usados para estimar perturbaciones. Todo el problema se origina en que hay tres gradientes para describir un vector.

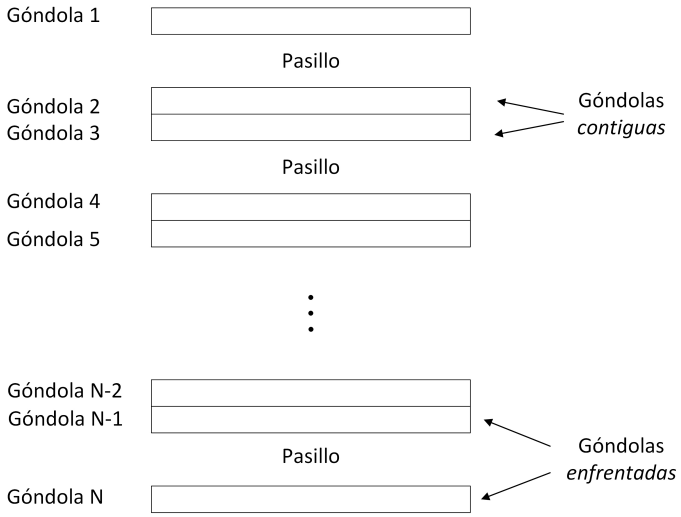
Pregunta 4 (15 puntos)

Una cadena de supermercados está diseñando un nuevo local, para lo cual debe definir la configuración de las góndolas y la distribución de los productos en éstas.

Específicamente, esta cadena debe tomar decisiones para un conjunto de C categorías de productos (conservas, aceites, licores, bebidas, etc.). Se sabe que la categoría c está compuesta por un conjunto P_c de productos (por ejemplo, "conservas" está formado por "atún marca océano", "atún marca chancho", "duraznos marca rico", etc.). Vamos a denotar por $P = \cup_{c \in C} P_c$, el conjunto de todos los productos que se pueden vender en el supermercado, donde cada producto pertenece a una única categoría.

Estas categorías deben ser dispuestas en G góndolas (con G par) destinadas para ello y se busca que los productos de una categoría sean colocados todos en las góndolas asignadas a esa categoría. Considere que todas las góndolas son iguales y que poseen una capacidad para exhibir L unidades individuales de productos (ignoraremos temas relativos al espacio físico que ocupan los productos individuales).

Como se muestra en la siguiente figura, las góndolas están numeradas consecutivamente y vienen de a pares unidas mirando a dos pasillos consecutivos (góndolas contiguas) o enfrentadas mirando un mismo pasillo (góndolas enfrentadas).



Las condiciones que la administración del supermercado debe cumplir para el diseño del nuevo local son:

- ◇ Cada góndola es asignada a una única categoría de productos.
- ◇ Cada categoría c debe utilizar entre n_c y N_c góndolas completas.
- ◇ Para cada categoría c existe un conjunto V_c de categorías incompatibles. Esto quiere decir que la categoría c y la categoría $\hat{c} \in V_c$ no deben estar asignadas a góndolas contiguas.

- ◇ Para cada categoría c existe un conjunto H_c de categorías incompatibles. Esto quiere decir que la categoría c y la categoría $\hat{c} \in H_c$ no deben estar asignadas a góndolas enfrentadas.
- ◇ Cada producto p, si es que es exhibido en góndola, debe tener una cantidades mínimas (q_p) y una cantidad máxima (Q_p) de unidades a exhibir.
- ◇ Todas las unidades de un mismo producto deben ser exhibidas en la misma góndola.
- ◇ Para cada producto p existe un conjunto F_p de productos que deben estar exhibidos en la misma góndola. Esto quiere decir que si el producto p y el producto $\hat{p} \in F_p$ son exhibidos, todas las unidades de ambos productos deben estar exhibidos en la misma góndola.

Los beneficios obtenidos son función de las unidades de cada producto asignadas a la góndola. Específicamente, se sabe que si se exhibe una unidad del producto p en la góndola g se obtiene un beneficio igual a B_{pg}.

(a) (**10 puntos**) Considerando la información entregada, formule un modelo de programación lineal entera que permita decidir a la administración del supermercado la ubicación de categorías en las góndolas y la selección de productos de cada categoría que deben ser exhibidos de manera de maximizar el beneficio total.

Respuesta:

El problema puede modelarse de la siguiente manera,

Variables de decisión

- ◇ X_{cg}: 1, si la categoría $c \in 1, \ldots, C$ tiene asignada la góngola $g \in 1, \ldots, G$; 0, en otro caso.
- ◇ Y_{pg}: 1, si el producto $p \in P$ está en la góndola $g \in 1, \ldots, G$; 0, en otro caso.
- ◇ Z_{pg}: cantidad del producto $p \in P$ a exhibir en la góndola $g \in 1, \ldots, G$.

Función objetivo

$$\text{máx} \sum_{p \in P} \sum_{g=1}^{G} B_{pg} Z_{pg}$$

Restricciones

- ◇ Asignación de categorías de productos a góndolas.

$$\sum_{c=1}^{C} X_{cg} \leq 1, \ \forall g \in 1, \ldots, G$$

- ◇ Cantidad de góndolas a asignar a cada categoría.

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^{G} X_{cg} &\leq N_c, \ \forall c \in 1, \ldots, C \\ \sum_{g=1}^{G} X_{cg} &\geq n_c, \ \forall c \in 1, \ldots, C \end{aligned}$$

- ◇ Categorías incompatibles en góndolas contiguas.

$$X_{c,2g} + X_{c,2g+1} \leq 1, \ \forall c \in 1, \ldots, C, \ \forall \hat{c} \in V_c, \ \forall g \in 1, \ldots, \frac{G-2}{2}$$

◇ Categorías incompatibles en góndolas enfrentadas.

$$X_{c,2g-1} + X_{c,2g} \leq 1,\ \forall c \in 1,\ldots,C,\ \forall \hat{c} \in H_c,\ \forall g \in 1,\ldots,\frac{G}{2}$$

en estas últimas restricciones alguien podría mas bien definir los conjuntos de góndolas consecutivas y de góndolas enfrentadas y escribir las restricciones con ellos, lo cual está evidentemente bien.

◇ Cantidad a exhibir de cada producto.

$$\begin{aligned} Z_{pg} &\leq Q_p Y_{pg},\ \forall p \in P \\ Z_{pg} &\geq q_p Y_{pg},\ \forall p \in P \end{aligned}$$

◇ Asignación de cada producto a lo más a una góndola.

$$\sum_{g=1}^{G} Y_{pg} \leq 1,\ \forall p \in P$$

◇ Productos que deben ser exhibidos juntos.

$$Y_{pg} \leq Y_{\hat{p}g},\ \forall p \in P,\ \forall \hat{p} \in F_p,\ \forall g \in 1,\ldots,G$$

◇ Relación entre las categorías en cada góndolas y los productos respectivos.

$$Y_{pg} \leq X_{cg},\ \forall p \in P,\ \forall g \in 1,\ldots,G,\ \forall c \in 1,\ldots,C : p \in P_c$$

◇ Capacidad de las góndolas.

$$\sum_{p \in P} Z_{pg} \leq L,\ \forall g \in 1,\ldots,G$$

◇ Dominio de las variables de decisión.

$$\begin{aligned} X_{cg} \in \{0,1\}, &\quad \forall c \in 1,\ldots,C, \quad \forall g \in 1,\ldots,G \\ Y_{pg} \in \{0,1\}, &\quad \forall p \in P, \quad \forall g \in 1,\ldots,G \\ Z_{pg} \in \mathbb{Z}_0^+, &\quad \forall p \in P, \quad \forall g \in 1,\ldots,G \end{aligned}$$

Entusiasmados con los resultados obtenidos, la administración del supermercado quiere agregar un par de condiciones al diseño. Estas nuevas condiciones son:

◇ Cada categoría debe ser asignada a un conjunto de góndolas consecutivas según su numeración.

◇ Si una categoría utiliza solamente dos góndolas, éstas deben estar enfrentadas.

(b) (**5 puntos**) Modifique el modelo planteado en la parte (a) (asegurándose que el modelo sigue siendo de programación lineal entera) de manera de incorporar estas nuevas condiciones.

Respuesta: Alternativa 1: consiste en agregar el siguiente grupo de variables,

◇ V_{cgh}: 1, si la categoría $c \in 1,\ldots,C$ utiliza sólo las góndolas de la $g \in 1,\ldots,G$ a la $h \in g,\ldots,G$; 0, en otro caso.

Y las siguientes restricciones,

◇ A lo más se puede elegir un rango de góndolas para cada categoría.

$$\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=g}^{G} V_{cgh} \leq 1, \forall c \in 1,\ldots,C$$

◇ Relación entre variables.

$$\begin{aligned} V_{cgh} &\leq X_{cm},\ \forall c \in 1,\ldots,C,\ \forall g \in 1,\ldots,G,\ \forall h \in g,\ldots,G,\ \forall m \in g,\ldots,h \\ 1 - V_{cgh} &\geq X_{cm},\ \forall c \in 1,\ldots,C,\ \forall g \in 2,\ldots,G-1,\ \forall h \in g,\ldots,G-1,\ \forall m \in \{1,\ldots,g-1\} \cup \{h+1,\ldots,G\} \end{aligned}$$

◇ Si una categoría sólo tiene dos góndolas asignadas, deben ser enfrentadas (o lo que es lo mismo, no pueden ser contiguas).

$$v_{c,2g,2g+1} = 0,\ \forall c \in 1,\ldots,C,\ \forall g \in 1,\ldots,\frac{G-2}{2}$$

◇ Dominio de las nuevas variables de decisión.

$$V_{cgh} \in \{0,1\},\ \forall c \in 1,\ldots,C,\ \forall g \in 1,\ldots,G,\ \forall h \in g,\ldots,G$$

Alternativa 2: consiste en agregar el siguiente grupo de variables,

◇ α_c^g: variable binaria que vale 1 si la categoría c, con $c \in C$, es tiene asignada como última góndola (en la secuencia) la góndola g, con $g = 1,\ldots,G$, y que vale 0 en otro caso.

Y las siguientes restricciones,

◇ Construcción de variable α_c^g.

$$X_{cg} - X_{cg+1} \leq \alpha_c^g \qquad \text{para } c \in C; g = 1,\ldots,G-1.$$

◇ Solamente una vez se termina la secuencia de góndolas asignadas a una categoría.

$$\sum_{g=1}^{G} \alpha_c^g = 1 \qquad \text{para } c \in C.$$