PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp

Interrogación 1

Duración: 1 hora 45 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- ◇ *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- ◇ *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Para el próximo año, el profesor Jaime Alejandro Cuadrado desea automatizar la formación de grupos para el proyecto semestral de su curso. Ya es conocido el total de alumnos que tomarán el curso, información que está contenida en el conjunto I. El profesor ofrecerá al curso un total de T temas y desea formar grupos de entre 4 y 6 alumnos, donde cada grupo trabajará sobre un tema en específico a lo largo del semestre. Como máximo puede haber un grupo trabajando cada tema $t \in \{1, \ldots, T\}$ y cada alumno $i \in I$ debe pertenecer a un único grupo. Considere que hay suficientes temas como para cubrir a todos, es decir, $6T \geq |I|$.

La conformación de los grupos debe cumplir con una serie de condiciones. Primero, debe haber diversidad de género y contar con un mínimo de dos alumnas; considere el parámetro binario $g_i \in \{0, 1\}$ que toma valor 1 si el estudiante $i \in I$ es una alumna y 0 si es un alumno.

También, se espera que cada grupo defina un solo día de la semana compatible con la disponibilidad de cada integrante para trabajar el tema asignado. Asuma que conoce $d_{i,j}$, que es un parámetro binario que vale 1 si el alumno $i \in I$ puede trabajar con su grupo en el día $j \in \{1, \ldots, 7\}$.

Buscando satisfacer los gustos de cada alumno, el profesor publica la lista de T temas y le pide a cada alumno/a $i \in I$ que construya un ranking personal de preferencias desde el 1 (más deseado) al T (menos deseado). Considere que el parámetro $r_{i,t} \in \{1, \ldots, T\}$ contiene el orden de preferencia que la persona i le asigna al tema t.

(a) **(15 puntos)** Formule un problema de optimización lineal (potencialmente con variables enteras) que permita al profesor formar los grupos que minimicen la preferencia promedio asignada. Detalle rigurosamente las variables de decisión del problema, las restricciones y su función objetivo.

(b) **(5 puntos)** Reformule el modelo anterior, considerando que ahora el objetivo es minimizar la diferencia entre el alumno que tiene la peor preferencia asignada con el que tiene mejor preferencia asignada. No es necesario reescribir todo, basta con indicar qué cambios haría.

Solución:

(a) Defina los siguientes conjuntos de variables:

- $z_{t,j} \in \{0,1\}$ si se activa el grupo que aborda el tema $t \in \{1,\dots,T\}$ a reunirse el día $j \in \{1,\dots,7\}$.
- $x_{i,t,j} \in \{0,1\}$ si se asigna alumno $i \in I$ al grupo que aborda el tema $t \in \{1,\dots,T\}$ a reunirse el día $j \in \{1,\dots,7\}$.
- $y_i \in \mathbb{R}$, prioridad asignada a $i \in I$.

Un modelo válido es el siguiente:

$$\min_{x,y} \sum_{i \in I} y_i \tag{1a}$$

$$\text{s.a. } y_i = \sum_{t \in \{1,\dots,T\}} \sum_{j \in \{1,\dots,7\}} r_{i,t} x_{i,t,j} \qquad \forall i \in I \tag{1b}$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,t,j} \leq 6 z_{t,j}, \qquad \forall t \in \{1,\dots,T\}, j \in \{1,\dots,7\} \tag{1c}$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,t,j} \geq 4 z_{t,j}, \qquad \forall t \in \{1,\dots,T\}, j \in \{1,\dots,7\} \tag{1d}$$

$$\sum_{t \in \{1,\dots,T\}} \sum_{j \in \{1,\dots,7\}} x_{i,t,j} = 1, \qquad \forall i \in I \tag{1e}$$

$$\sum_{j \in \{1,\dots,7\}} z_{t,j} \leq 1, \qquad \forall t \in \{1,\dots,T\} \tag{1f}$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,t,j} g_i \geq 2 z_{t,j}, \qquad \forall t \in \{1,\dots,T\}, j \in \{1,\dots,7\} \tag{1g}$$

$$x_{i,t,j} = 0, \qquad \forall i \in I, \forall j \in \{1,\dots,7\}, t \in \{1,\dots,T\} : d_{i,t} = 0 \tag{1h}$$

$$x_{i,t,j} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1,\dots,T\}, \forall j \in \{1,\dots,7\} \tag{1i}$$

$$z_{t,j} \in \{0,1\}, \qquad \forall t \in \{1,\dots,T\}, \forall j \in \{1,\dots,7\} \tag{1j}$$

NOTA: La variable y_i redunda, pero se deja por parsimonia.

(b) Definir nuevas variables y^-, y^+ (mínima y máxima prioridad asignadas). Luego cambiar el objetivo por $\min y^+ - y^-$ y agregar las siguientes restricciones:

$$y^- \leq y_i, \qquad \forall i \in I \tag{2a}$$

$$y^+ \geq y_i, \qquad \forall i \in I \tag{2b}$$

Pregunta 2 (16 puntos)

Una agencia de publicidad contrató a Pipo para diseñar un álbum de fotografías. Existe un conjunto I de fotografías, donde cada foto $i \in I$ posee un beneficio $b_i > 0$, que representa su belleza, y un costo $c_i > 0$ por comprarla. A Pipo le han exigido formar un álbum de n hojas y, por lo tanto, $2n$ páginas. La agencia desea escoger las fotos que maximicen el beneficio total del álbum.

Cuando Pipo llega a la agencia, le muestran la siguiente propuesta de modelo de optimización:

VARIABLES:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Si la foto } i \in I \text{ es colocada en la página } j \in \{1, 2, ..., 2n\}. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

MODELO:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i \in I} b_i x_{ij} & & \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{2n} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in I & (1) \\
& \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i \in I} c_i x_{ij} \leq P, & & (2) \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} \leq 4, & \forall j \in \{1, 3, 5, ..., 2n-1\} & (3) \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1, & \forall j \in \{2, 4, 6, ..., 2n\} & (4) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall i \in I, \forall j \in \{1, 2, ..., 2n\} & (5)
\end{aligned}$$

Basándose en la información antes entregada, responda:

(a) **(4 puntos)** Indique claramente en palabras, ¿qué representan las familias de restricciones (1), (2), (3) y (4)? Entregue una explicación coherente para cada una de ellas.

(b) **(2 puntos)** Determine una cota superior en función de n para la máxima cantidad de fotos que puede tener el álbum. Considerando que el beneficio de una foto no depende de la página en que se coloca, explique por qué este problema sería similar a un problema de mochila cuando el número de elementos en el conjunto I es menor que la cota que acaba de determinar.

(c) **(5 puntos)** La agencia vuelve a analizar su modelo y se da cuenta que no representa correctamente la realidad, pues no modela los beneficios obtenidos por seleccionar determinadas parejas de fotos. Por ello, se agrega un parámetro $d_{ik} > 0$, que representa el beneficio adicional si es que la foto $i \in I$ y la foto $k \in I$ son asignadas en la misma página. Ayude a Pipo a incorporar correctamente este aspecto en el modelo. Tiene permitido hacer los cambios que estime necesarios en el modelo entregado inicialmente.

(d) **(5 puntos)** Por último, se le comunica a Pipo que para cada foto $i \in I$ existe un subconjunto $K_i \subset I$ de fotos que no pueden asignarse en la misma página ni en la página siguiente a la página en que es colocada la foto $i \in I$. Ayude a Pipo a incorporar correctamente este aspecto en el modelo. Tiene permitido hacer los cambios que estime necesarios en el modelo entregado inicialmente.

Solución:

(a)
- ◇ La primera restricción asegura que cada foto se asigne como máximo a una página.
- ◇ La segunda asegura de que el gasto no sobrepase el presupuesto P.
- ◇ La tercera restricción indica que las páginas impares pueden tener a lo más 4 fotos
- ◇ La cuarta restricción indica que las páginas pares pueden tener a lo más 1 foto.

(b) La cota se puede generar desde las restricciones (3) y (4). Las páginas impares pueden contener hasta 4 fotos, mientras que las pares una. Por lo tanto, una cota superior es $4n + n = 5n$ fotos.

Si $|I| < 5n$, entonces la única restricción que impide no seleccionarlo todo es (2). Las restricciones solo afectan al orden de las fotos, pero no impacta en el objetivo. Por lo tanto, el problema sería similar al de mochila.

(c) Se puede hacer definiendo la siguiente variable:

$$y_{ikj}: \begin{cases} 1 & \text{Si la foto } i \in I \text{ y la foto } k \in I, k > i \text{ son asignadas en la página } j \in \{1, ..., 2n\}. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La función objetivo la redefinimos como:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I} b_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i,k \in I: k>i} d_{ik} y_{ikj}$$

Y se agrega las restricciones:

$$y_{ikj} \leq x_{ij} \qquad \forall i, k \in I : i < k; \forall j \in \{1, 2, ..., 2n\}$$

$$y_{ikj} \leq x_{kj} \qquad \forall i, k \in I : i < k; \forall j \in \{1, 2, ..., 2n\}$$

NOTA: Equivalentemente, esto puede ser modelado como:

$$2y_{ikj} \leq x_{kj} + x_{ij} \qquad \forall i, k \in I : i < k; \forall j \in \{1, 2, ..., 2n\}$$

Si bien está correcto para esta prueba, más adelante veremos que esta opción no es preferible.

NOTA 2: No es necesario acotar la variable inferiormente, ya que posee un coeficiente positivo en la función objetivo y siempre será empujada "hacia arriba".

(d) Se agrega la siguiente restricción:

$$x_{i,j} + x_{k,j} + x_{k,j+1} \leq 1 \qquad \forall i \in I, k \in K_i, j \in \{1, 2, ..., 2n-1\}$$

$$x_{i,2n} + x_{k,2n} \leq 1 \qquad \forall i \in I, k \in K_i$$

Pregunta 3 (12 puntos)

(a) **(4 puntos)** En el siguiente problema: ¿Para qué valores de α el problema (P) posee solución óptima? Justifique su respuesta.

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & 7x_1 + 6x_2 \\ & \text{s.a:} & x_1 + x_2 \geq \alpha \\ & & \alpha x_2 \geq 2 \end{array}$$

(b) **(4 puntos)** Sea $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$, donde $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son k funciones convexas. Demuestre formalmente que f es una función convexa.

(c) **(4 puntos)** Considere un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define la envoltura convexa de S como $conv(S) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1; k \in \mathbb{N}; x_1, \ldots, x_k \in S; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+ \right\}$, es decir, el conjunto de todos los puntos que pueden ser descritos como combinaciones convexas de puntos en S.

Pruebe que $conv(S)$ es el conjunto convexo más pequeño (en el sentido de inclusión) que contiene a S, es decir, $conv(S) = \cap \{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$.

Solución:

(a) Usando el teorema práctico de la programación lineal, se cumple:

- ◇ Función objetivo lineal ya que es un polimonio de primer orden en las variables (recta en dos dimensiones).
- ◇ Espacio cerrado ya que las desigualdades son no estrictas.

Para verificar si se cumple con que la función objetivo está acotada y que el espacio factible no es vacío, veamos tres casos:

- ◇ $\alpha = 0$. En este caso el problema es infactible.
- ◇ $\alpha < 0$. En este caso $x_2 < 0$. De la primera restricción se tiene que $7x_1 + 7x_2 = 7x_1 + 6x_2 + x_2 \geq 7\alpha$. Pero se tiene que $x_2 < 0$, por lo que $7x_1 + 6x_2 \geq 7x_1 + 6x_2 + x_2 \geq 7\alpha$. Un punto factible en las condiciones descritas es $x_1 = \alpha - x_2$. Luego, por el teorema se garantiza que el problema admite solución óptima.
- ◇ $\alpha > 0$. En este caso $x_2 > 0$. De la primera restricción se tiene $7x_1 \geq 7\alpha - 7x_2$ y de la segunda restricción $6x_2 \geq \frac{12}{\alpha}$. Luego, se tiene que $7x_1 + 6x_2 \geq 7\alpha + \frac{12}{\alpha} - 7x - 2 = K - 7x_2$. Donde K es una constante que depende del valor fijado para $\alpha > 0$, y dado que x_2 no está acotada por arriba se tiene que $x_2 \mapsto \infty \Rightarrow 7x_1 + 6x_2 \mapsto -\infty$. Luego, por el teorema se garantiza que el problema no admite solución óptima.

(b) Sean $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$, y definimos $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Tomamos un índice cualquiera $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces se cumple por convexidad de f_i que:

$$f_i(z) \leq \lambda f_i(x_1) + (1 - \lambda) f_i(x_2)$$

Pero como $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ se tiene que $f_i(x) \leq f(x), \forall x \in S$, entonces:

$$f_i(z) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

Luego, si toda f_i cumple con la condición, se tiene que:

$$\text{máx}\{f_1(z), \ldots, f_k(z)\} \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

con lo que se concluye que f es convexa.

(c) Sea $x \in \cap\{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$, entonces $x \in C$ para todo conjunto C convexo tal que $S \subseteq C$. Luego, $x \in conv(S)$, ya que este conjunto ($conv(S)$) es un convexo particular que contiene a S.

Ahora, en el otro sentido, sea $x \in conv(S)$ y C un convexo cualquiera que contiene a S. Entonces, $conv(S) \subseteq conv(C) = C$, por lo tanto se tiene que $x \in C$. Luego, $\cap\{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$.

Pregunta 4 (12 puntos)

Parte 1 (7 puntos)

Defina como (P) al siguiente problema de optimización con una variable x:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{k=1}^{M} e^{kx - e^{(k+1)x}}}{\prod_{k=1}^{M+1} Ke^x} \\ s.a. \quad & \max(|3x - 2M|, x) \leq 2M \\ & |Mx - M| \geq 2M \\ & x \geq 1 \end{aligned}$$

, donde $M > 0$ es un parámetro.

(a) **(5 puntos)** Encuentre un modelo lineal continuo equivalente. Justifique cada paso.

(b) **(2 puntos)** Suponga que $M = 10$. Demuestre que el problema (P) posee solución óptima.

Solución:

(a) La función objetivo es equivalente a:

$$\frac{\sum_{k=1}^{M} e^{kx} - e^{(k+1)x}}{\prod_{k=1}^{M+1} Ke^{x}} = \frac{e^{x} - e^{(M+1)x}}{(M+1)!e^{(M+1)x}} = \frac{1}{(M+1)!e^{Mx}} - \frac{1}{(M+1)!}$$

Si eliminamos la constantes positivas restadas y multiplicando al objetivo, P es equivalente a maximizar e^{-Mx}. Como e^{Mx} es siempre no negativo, el modelo es equivalente a uno que minimiza e^{Mx} y es, a su vez, equivalente a otro que minimiza x.

En cuanto a restricciones, el dominio es equivalente a:

$$|3x - 2M| \leq 2M$$

$$x \leq 2M$$

$$|Mx - M| \geq 2M$$

$$x \geq 1$$

que a su vez equivale a

$$x \leq 4M/3$$

$$|Mx - M| \geq 2M$$

$$x \geq 1$$

.

La única restricción que falta linearizar es: $|Mx - M| \geq 2M$. Esta representa la siguiente disjunción: $Mx - M \geq 2M$ ó $Mx - M \leq -2M$. Analicemos cada caso:

- ◇ La restricción $Mx - M \geq 2M$, equivale a $x \geq 3$.
- ◇ La restricción $Mx - M \leq -2M$, equivale a $x \leq -1$ (lo que no sucede si se impone $x \geq 1$).

Por lo tanto, el dominio del problema equivale :

$$x \leq 4M/3$$

$$x \geq 3$$

. El problema equivalente está dado por: mín$\{x : x \in [3, 4M/3]\}$

(b) El problema equivalente posee solución óptima. El dominio es compacto y la función objetivo es continua. Si $M = 10$, entonces hay solución factible (dominio no vacío). De hecho, $x = 3$ es s. óptima.

Parte 2 (5 puntos)

Considere el artículo referenciado en la tarea "Scheduling Medical Residents to Rotations: Solving the Large-Scale Multiperiod Staff Assignment Problem" y que fue subido en la página del curso[1]

(a) **(2 puntos)** ¿Cuáles son los dos obstáculos que, desde la revisión de la literatura, tiene la resolución del tipo de problema enfrentado en el paper por lo autores?

(b) **(3 puntos)** En el artículo se define la variable binaria X_{ijk}, que toma valor 1 si el doctor i es asignado a la rotación j durante el mes k y 0 en otro caso. ¿Cómo se garantiza en el modelo matemático propuesto por los autores que se asignará 0 o 2 residentes mensualmente a las rotaciones que lo requieran? Construya la matemáticamente la restricción que garantiza esto.

Solución:

(a) El primero de los obstáculos es la naturaleza binario de las variables de decisión, lo que hace que problemas de este tipo sean intratables para instancias reales. El segundo está en la inherente infactibilidad de problemas reales, ya que lo que puede parecer a simple vista correcto para el tomador de decisión, puede no ser tratable a través de un método de solución.

(b) Para garantizar lo solicitado, se define una variable PM_k que toma valor 1 si dos residentes son asignados en un mes dado a las rotaciones que así lo requieran y 0 en otro caso (que se asignen 0 residentes). Con esto se construye la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{12} X_{ijk} = 2PM_k \ \forall k \in \text{Rotaciones que lo requieran.}$$

[1]Franz, Lori S. and Miller, Janis L. (1993). Scheduling Medical Residents to Rotations: Solving the Large-Scale Multiperiod Staff Assignment Problem. Operations Research, 41(2), 269–279. https://doi.org/10.1287/opre.41.2.269