INTERROGACIÓN 3

ICS1113 Optimización – Sección 4

17 de Noviembre, 2010

INSTRUCCIONES: La prueba tiene 100 puntos y durará 120 minutos, sin extensión. No se permitirá el uso de calculadoras programables. La prueba tiene 4 partes por lo que deberán contestar cada una en hojas separadas y no deben olvidar poner su nombre y su número a cada hoja. No se debe descorchetear el cuadernillo de respuestas en ningún momento durante la prueba. Se descontará 10 puntos a aquellos que no cumplan con alguna de estas instrucciones.

PARTE 1 (20 pts.)

Una empresa debe optimizar las decisiones de arriendo de camionetas para los próximos 3 meses. Inicialmente la empresa no cuenta con stock de camionetas, pero requerirá 1, 3 y 4 camionetas para los meses 1, 2 y 3 respectivamente. Para suplir sus requerimientos, al inicio de cada mes la empresa puede arrendar camionetas adicionales, lo cual implica un costo fijo de $30 mil cada vez que arrienda (independiente del número de camionetas) más $5 mil por camioneta arrendada. Dado que no puede devolver camionetas sino hasta el final del tercer mes, si en un mes la empresa dispone de más camionetas de las que requiere, se incurre en un costo de $20 mil por camioneta al mes.

a. (8 pts.) Formule este problema como un problema de Programación Dinámica de modo que la empresa minimice los costos totales durante los tres meses. Defina claramente las etapas, variables de estado, etc.
b. (8 pts.) Encuentre la solución del modelo de Programación Dinámica formulado en la pregunta a.
c. (4 pts.) Responda cuál es el principio de optimalidad que permite asegurar que la formulación de este problema (y en general la de cualquier modelo de Programación Dinámica) es equivalente a la de un modelo de Programación Matemática.

PARTE 2 (28 pts.)

1.- Para el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x,y) = x^2 - 2x + bxy + ay^3 + 3y^2 \\ &s.a. \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

a. (6 pts.) Encuentre la relación entre a y b para que el problema sea estrictamente convexo para todo $x \geq 0$ y para todo $y > 3$. Además, asumiendo que el punto (x*, y*) con $x^* \geq 0,\ y^* > 3$ cumple la condición necesaria de primer orden: ¿Cómo se caracteriza este punto en términos de las condiciones de segundo orden?

b. (6 pts.) Encuentre los valores de a y b para que el punto (1, 0) satisfaga las condiciones necesarias primer y segundo orden.

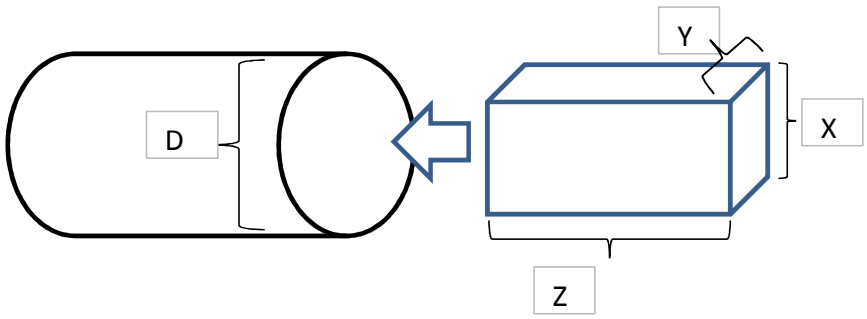
2.- Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1 - 6x_2 + 2x_2^2$$

a. (5 pts.) Explique el método del Gradiente: cuáles son los pasos del algoritmo y justifique cuál es la dirección de descenso y el paso que utiliza en cada iteración.
b. (6 pts.) Encuentre un candidato a solución óptima mediante el método del Gradiente partiendo del punto $(3,3)$.
c. (5 pts.) Compare el método del Gradiente y el método de Newton en términos de la velocidad y radio de convergencia. Fundamente su respuesta.

PARTE 3 (18 pts.)

Usted debe diseñar una viga de sección rectangular (X-Y-Z) que será instalada al interior de un cilindro de D centímetros de diámetro interior. La cara X-Y debe ser tal que las 4 esquinas coincidan con el diámetro interior pues la viga será unida al cilindro mediante 4 soldaduras a lo largo de los bordes de la viga. Además, debido a consideraciones estructurales, la superficie de la cara X-Z de la viga no debe ser mayor que A cm^2. No existen restricciones de largo de la viga (Z) y asuma el largo del cilindro infinito. El costo por centímetro cúbico de acero es de t \$/ cm^2 y el costo lineal de soldadura es de h \$/cm.



1. (8 pts.) Modele este problema de Optimización No Lineal de modo de minimizar el costo de la viga.
2. (10 pts.) Establezca las condiciones de KKT que debe cumplir la solución óptima del problema.

PARTE 4 (34 pts.)

1.- Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \\ &s.a. \\ &(1) \quad (x_1 - 2)^2 + x_2 \leq 9 \\ &(2) \quad x_2 - 2x_1 \geq -3 \\ &(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

a. (8 pts.) Resuelva el problema gráficamente y demuestre que se cumple la condición de optimalidad para problemas no lineales con restricciones de desigualdad. Explique cuál es el conjunto de índices activos, determine los multiplicadores y describa gráficamente el cono tangente y las direcciones factibles del problema.
b. (6 pts.) Escriba el Lagrangeano del problema y derive las condiciones de KKT.
c. (4 pts.) ¿Cuál sería el cambio en la función objetivo si el lado derecho de la primera restricción cambia en un 5%?
d. (6 pts.) Si (1) pasa a restricción de igualdad y se elimina la segunda restricción: escriba las condiciones de Lagrange y compare esta formulación con la formulación encontrada en b). Sin resolver responda justificadamente si los resultados serían los mismos o no.

2.- Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x_1, x_2) = -x_1 \\ &s.a. \\ &(x_1 - 2)^2 + x_2 \geq 9 \\ &x_2 + 6x_1 \leq 30 \\ &x_2 \geq 0 \\ &(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

a. (4 pts.) Resuelva el problema gráficamente.
b. (6 pts.) Explique por qué NO se cumplen las condiciones de KKT. Fundamente su respuesta.