PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2026 - 1
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado - C. Toro
M. Villafranca - J. Villavicencio

Interrogación 2
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia a la prueba.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 2" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregar la copia física** como respaldo al equipo de ayudantes. Una prueba sin respaldo físico será calificada con nota 1.
- **Sistema de Calificación:** La prueba tiene 60 puntos (más 2 de bonus). Sean P y P_1 los puntajes obtenidos en toda la prueba y solamente en la pregunta 1 (modelación), respectivamente. La Nota de la Interrogación será igual a:

$$\text{Nota Interrogación} = \begin{cases} \text{mín}\{P/10+1,\ 3\}, & \text{si } P_1 \in [0,4], \\ \text{mín}\{P/10+1,\ \frac{1}{2}P_1+1\}, & \text{si } P_1 \geq 4 \end{cases}$$

- **Otras consideraciones:**
  - La prueba es estrictamente individual.
  - Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
  - Se prohíbe el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite usar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS. El uso de un dispositivo en otra circunstancia se considera una **falta ética y se penaliza con una nota mínima** en la prueba.
  - Si termina antes de tiempo, favor avisar a un miembro del equipo docente para que escanée y suba su prueba.

Pregunta 1 (20 puntos + 2 bonus)

Desde un hospital público le han pedido ayuda para gestionar la asignación de camas en distintos sectores. Específicamente, el hospital cuenta con S sectores (por ejemplo, pediatría, cirugía, medicina interna, etc.), y debe planificar la disponibilidad de camas para un periodo de T semanas.

Al inicio de cada semana, $t \in \{1, ..., T\}$, el hospital recibe una demanda conocida de $d_{st} \geq 0$ pacientes para el sector $s \in \{1, ..., S\}$, que debe ser atendida por completo con las camas disponibles al inicio de dicha semana. Al final de cada semana, se revisa el inventario de camas disponibles en cada sector, considerando las altas médicas (pacientes que dejan su cama) y el retiro de camas por reubicación. Considere que $a_{st} \geq 0$ es el número de pacientes dados de alta en el sector $s \in \{1, ..., S\}$ al final del periodo $t \in \{1, ..., T\}$. Asuma que al inicio de la semana 1, hay h_s camas disponibles en cada sector $s \in \{1, ..., S\}$ y que este número es mayor a d_{s1}.

Para utilizar de forma eficiente los recursos, el hospital puede reubicar, al final de cada semana, las camas de un sector a otro. Considera que reubicar una cama desde el sector s hacia el sector s' ($s, s' \in \{1, ..., S\}$) en la semana $t \in \{1, ..., T\}$ tiene un costo $c_{ss't}$. Asume que las camas reubicadas estarán disponibles en el sector de destino al inicio de la semana siguiente y que no se realizan reubicaciones al final de la última semana.

El hospital busca minimizar los costos de reubicación, cumpliendo con la restricción de demanda.

(a) **(8 puntos)** A continuación se propone un modelo de optimización lineal entera que representa este problema. El modelo considera la variable de decisión entera $x_{ss't}$ que representa el número de camas realocadas desde el sector s al sector s' al final de la semana $t \in \{1, ..., T-1\}$. Además, ocupa la variable entera y_{st} para representar la cantidad de camas disponibles en el sector $s \in \{1, ..., S\}$ al final de la semana $t \in \{1, ..., T\}$ luego de sacar camas para reubicar y dar de alta a pacientes. Asuma que estas variables son suficientes para modelar adecuadamente la situación descrita.

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{S}\sum_{s'=1}^{S} c_{ss't}x_{ss't}$$

$$\text{s.a.} \quad y_{s1} = h_s - d_{s1} + a_{s1} \qquad \forall s \in \{1,...,S\} \quad (1a)$$

$$y_{st} = y_{st-1} + x_{s'st-1} - d_{st} + a_{st} - x_{ss't} \qquad \forall s \in \{1,...,S\}, t \in \{2,...,T-1\} \quad (1b)$$

$$y_{sT} = \sum_{s'=1}^{S} x_{s'sT-1} - d_{sT} + a_{sT} \qquad \forall s \in \{1,...,S\} \quad (1c)$$

$$y_{st-1} + \sum_{s'=1}^{S} x_{s'st-1} \geq d_{st} \qquad \forall s \in \{2,...,S\}, t \in \{1,...,T\} \quad (1d)$$

$$x_{sst} = 0 \qquad \forall s \in \{1,...,S\}, t \in \{1,...,T\}$$

$$y_{st}, x_{s'st} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall s, s' \in \{1,...,S\}, t \in \{1,...,T\}$$

La función objetivo está correctamente modelada, pero se desconoce si las restricciones modelan bien las siguientes condiciones del modelo:

(1a) : Inventario de camas al final de la semana 1 para cada sector.

(1b) : Evolución del inventario de camas por sector a partir de la semana 2.

(1c) : Inventario de camas al final de la semana T para cada sector.

(1d) : Satisfacer la demanda de camas por sector a partir de la segunda semana.

Para las restricciones (1a), (1b), (1c) y (1d), indique si representan correctamente (o no) lo solicitado y justifique brevemente su respuesta. En caso de que su respuesta sea negativa, proponga una alternativa correcta a la restricción.

Solución: El modelo correcto es:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{S}\sum_{s'=1}^{S} c_{ss't}x_{ss't}$$

$$\text{s.a.} \quad y_{s1} = h_s - d_{s1} + a_{s1} - \sum_{s'=1}^{S} x_{ss'1} \qquad \forall s \in \{1,...,S\}$$

$$y_{st} = y_{st-1} + \sum_{s'=1}^{S} x_{s'st-1} - d_{st} + a_{st} - \sum_{s'=1}^{S} x_{ss't} \quad \forall s \in \{1,...,S\}, t \in \{2,...,T-1\}$$

$$y_{sT} = y_{sT-1} + \sum_{s'=1}^{S} x_{s'sT-1} - d_{sT} + a_{sT} \qquad \forall s \in \{1,...,S\}$$

$$y_{st-1} + \sum_{s'=1}^{S} x_{s'st-1} \geq d_{st} \qquad \forall s \in \{1,...,S\}, t \in \{2,...,T\}$$

$$x_{sst} = 0 \qquad \forall s, s' \in \{1,...,S\}, t \in \{1,...,T\}$$

$$y_{st}, x_{s'st} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall s, s' \in \{1,...,S\}, t \in \{1,...,T\}$$

Todas las restricciones están incorrectas, excepto la de demanda (1d). Específicamente:

- (1a) **es incorrecto** porque omite las reubicaciones a otros sectores al final de la primera semana.
- (1b) **es incorrecto** porque no suma sobre los otros sectores para determinar la cantidad de camas reubicadas al inicio y al final de la semana.
- (1c) **es incorrecto** porque no considera las camas disponibles en la semana anterior (es decir, $y_{s,T-1}$)
- (1d) **es correcto** ya que considera todas las camas disponibles al inicio de la semana para poder satisfacer la demanda (es decir, camas disponibles de la semana anterior y nuevas camas reubicadas). **También se puede considerar incorrecta** ya que había un error en el enunciado: se puso $s \in \{2,...,S\}$, en vez de $t \in \{2,...,T\}$. Por lo mismo, está correcto si alguien encontró este error y lo corrigió.

Nota de corrección:

- Un punto por decir que la restricción está correcta o incorrecta y justificar por qué. No dar medios puntos a menos que diga que está incorrecta y el estudiante corrige bien la restricción.

- ◇ 1 punto por corregir correctamente la restricción (1a). No dar medios puntos.
- ◇ 2 puntos por corregir correctamente la restricción (1b). Se puede asignar 1 punto si corrigió un error, pero no ambos.
- ◇ 1 punto por corregir correctamente la restricción (1c). No dar medios puntos.

(b) **(14 puntos)** Asumiendo que tiene un modelo correcto y completo para las restricciones de la parte (a), agregue restricciones y variables (si es necesario) que modelen las siguientes condiciones adicionales. Además, modifique la función objetivo si es necesario. Responda cada caso de forma independiente y explique claramente el significado de las variables y restricciones nuevas, así como los cambios en la función objetivo, cuando corresponda.

(i) **(2 puntos)** En cada semana $t \in \{1, ..., T-1\}$ a lo más se pueden reubicar C_s camas hacia el sector $s \in \{1, ..., S\}$.

Solución: En este caso no es necesario considerar variables extras. La restricción es:

$$\sum_{s'=1}^{S} x_{s'st} \leq C_s \qquad \forall t \in \{1, ..., T-1\}$$

(ii) **(5 puntos)** Existe un costo fijo k_{st} por hacer reubicaciones de camas desde el sector $s \in \{1, ..., S\}$ al final de la semana $t \in \{1, ..., T-1\}$, independiente del número de camas reubicadas o el sector de destino.

Solución: En este caso es necesario definir una nueva variable binaria $w_{st} \in \{0, 1\}$ que indica si se reubicó alguna cama del sector s a otro sector al final de la semana t. Se debe modificar la función objetivo y considerar restricciones extra que relaciones las variables.

La nueva f.o. que incluye el costo fijo es:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{S} \sum_{s'=1}^{S} c_{ss't} x_{ss't} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{S} w_{st} k_{st}$$

La nueva restricción que vincula w_{st} con las variables x es:

$$\sum_{s'=1}^{S} x_{ss't} \leq M w_{st} \qquad \forall s \in \{1, ..., S\}, t \in \{1, ..., T-1\}$$

donde M es un valor lo suficientemente grande.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por definir adecuadamente la nueva variable binaria. No se puede modelar correctamente sin ella
- ◇ 2 puntos por modificar función objetivo
- ◇ 2 puntos por nueva restricción.

(iii) **(7 puntos)** Para cada par de sectores $s, s' \in \{1, ..., S\}$ $(s \neq s')$, si se reubicaron camas de s a s' en alguna semana $t \in \{1, ..., T-1\}$, entonces no se pueden reubicar camas de s' a s en la semana siguiente $(t+1)$. Además, cada sector $s \in \{1, ..., S\}$ puede reubicar sus camas hacia dos o menos sectores diferentes cada semana.

Solución: En este caso es necesario definir una nueva variable binaria $z_{ss't} \in \{0, 1\}$ que indica si se reubicaron camas desde el sector s al sector s' en el periodo t. Para modelar lo pedido se necesitan las siguientes restricciones:

$$z_{ss't} \leq 1 - z_{s'st+1} \qquad \forall s, s' \in \{1, ..., S\}, t \in \{1, ..., T-2\}$$

$$\sum_{s'=1}^{S} z_{ss't} \leq 2 \qquad \forall s \in \{1, ..., S\}, t \in \{1, ..., T-1\}$$

$$x_{s'st} \leq M z_{ss't} \qquad \forall s, s' \in \{1, ..., S\}, t \in \{1, ..., T-1\}$$

La primera restricción modela la prohibición de reubicar en semanas consecutivas en sentido inverso. La segunda restricción limita la cantidad de reubicación desde cada sector s y semana t. La tercera es una restricción de tipo big-M (M valor muy grande) para relacionar la reubicación con la variable binaria correspondiente.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por definir adecuadamente la variable binaria nueva. No se puede modelar correctamente sin ella
- ◇ 2 puntos por primera restricción
- ◇ 2 puntos por segunda restricción
- ◇ 2 puntos por tercera restricción

Pregunta 2 (20 puntos):

Considere el siguiente problema de programación lineal, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro asociado a la variable x_1 en la función objetivo:

$$\begin{array}{lll} (P) & \max\limits_{\mathbf{x}} & a\,x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) **(5 puntos)** Escriba el problema en su forma estándar e identifique todas las bases del problema. ¿Cuáles son bases asociadas a vértices factibles?

Solución:

Incorporando las variables de holgura $x_3, x_4 \geq 0$ en cada restricción, la forma estándar es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6, \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Hay $n = 4$ variables y $m = 2$ ecuaciones, por lo que cada base tiene 2 variables básicas, con un máximo de $\binom{4}{2} = 6$ bases candidatas. Fijando en cero las dos variables no básicas de cada base se obtiene:

Base	No básicas	Solución (x_1, x_2)	¿Factible?	Vértice
$\{x_3, x_4\}$	$x_1 = x_2 = 0$	$(0,0)$, x_3=6, x_4=6	Sí	$V_1 = (0,0)$
$\{x_2, x_4\}$	$x_1 = x_3 = 0$	$(0,3)$, x_4=3	Sí	$V_2 = (0,3)$
$\{x_1, x_3\}$	$x_2 = x_4 = 0$	$(3,0)$, x_3=3	Sí	$V_3 = (3,0)$
$\{x_1, x_2\}$	$x_3 = x_4 = 0$	$(2,2)$	Sí	$V_4 = (2,2)$
$\{x_1, x_4\}$	$x_2 = x_3 = 0$	x_1=6, x_4=−6	No ($x_4 < 0$)	—
$\{x_2, x_3\}$	$x_1 = x_4 = 0$	x_2=6, x_3=−6	No ($x_3 < 0$)	—

Existen entonces cuatro vértices factibles, con bases $\{x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_4\}$, $\{x_1, x_3\}$ y $\{x_1, x_2\}$, respectivamente. Las otras dos combinaciones son soluciones básicas no factibles.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por la forma estándar correcta.
- ◇ 2 punto por identificar las 6 bases existentes.
- ◇ 2 punto por clasificar correctamente factibles y no factibles con justificación.

(b) **(5 puntos)** Determine el rango de valores del parámetro a para que el vértice definido por la intersección de la primera y la segunda restricción sea óptimo.

Solución: El vértice pedido es $V_4 = (2, 2)$, con base $A_B = \{x_1, x_2\}$ y $A_D = \{x_3, x_4\}$. La condición de optimalidad (maximización) exige que los costos reducidos de las variables no básicas x_3, x_4 sean menores o iguales a cero. Las columnas de la matriz base y su inversa son:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad c_{A_B} = (a,\, 2) \quad c_D = (0, 0).$$

Con ello, procedemos a calcular los costos reducidos:

$$\pi^\top = c_{A_B}^\top A_B^{-1} = (a,\, 2) \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \left(\frac{4-a}{3},\ \frac{2a-2}{3} \right).$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son $\bar{c}_{x_j} = 0 - \Pi_j$, de modo que la optimalidad $\bar{c}_{x_j} \leq 0$ equivale a $\pi_j \geq 0$:

$$\frac{4-a}{3} \geq 0 \ \Rightarrow \ a \leq 4, \qquad \frac{2a-2}{3} \geq 0 \ \Rightarrow \ a \geq 1.$$

Por lo tanto, $V_4 = (2, 2)$ es óptimo si y solo si

$$1 \leq a \leq 4.$$

Geométricamente, el gradiente $(a, 2)$ debe ubicarse dentro del cono generado por las normales de las dos restricciones, $(1, 2)$ y $(2, 1)$.

Nota de corrección:

- ◇ 2 puntos por obtener los costos reducidos (o el vector $\mathbf{y}$).
- ◇ 3 punto por plantear ambas desigualdades y concluir el rango $1 \leq a \leq 4$.

(c) **(4 puntos)** Determine el rango de valores de a para que el problema tenga múltiples soluciones óptimas.

Solución: Existen múltiples soluciones óptimas cuando el costo reducido de una variable no básica es exactamente cero en el óptimo, es decir, cuando la función objetivo es paralela a una restricción activa. A partir de la parte anterior:

- $\diamond$ $\bar{c}_{x_3} = 0 \iff \pi_1 = 0 \iff a = 4$: la objetivo es paralela a la segunda restricción y el óptimo son todas las combinaciones convexas entre los vértice $V_4 = (2, 2)$ y $V_3 = (3, 0)$.
- $\diamond$ $\bar{c}_{x_4} = 0 \iff \pi_2 = 0 \iff a = 1$: la objetivo es paralela a la primera restricción y el óptimo son todas las combinaciones convexas entre los vértices $V_4 = (2, 2)$ y $V_2 = (0, 3)$.

Por lo tanto, hay múltiples soluciones óptimas si y solo si $a = 1$ o $a = 4$, que son justamente los extremos del intervalo de optimalidad de V_4.

Nota de corrección:

- $\diamond$ 1 punto por el criterio de costo reducido nulo (objetivo paralela a una arista).
- $\diamond$ 2 punto por identificar ambos valores $a \in \{1, 4\}$.
- $\diamond$ 1 punto por describir las aristas óptimas asociadas.

(d) **(6 puntos)** Fije $a = 2$ e incorpore al problema la restricción $x_1 + x_2 \leq 4$. Analice el vértice óptimo, y determine todas las bases óptimas.

Solución: Con la nueva holgura $x_5 \geq 0$, la forma estándar es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 4, \end{aligned}$$

con $a = 2$, es decir, $z = 2x_1 + 2x_2$. Ahora $n = 5$ y $m = 3$, por lo que cada base tiene 3 variables básicas.

La nueva restricción pasa exactamente por el óptimo anterior, ya que $x_1 + x_2 = 2 + 2 = 4$; luego, está activa ($x_5 = 0$) y el óptimo sigue siendo $(2, 2)$ con valor $z^* = 8$. En ese punto se cumplen como igualdad las *tres* restricciones en un espacio de *dos* dimensiones, por lo que las tres holguras se anulan:

$$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0, \qquad x_4 = 6 - (4 + 2) = 0, \qquad x_5 = 4 - (2 + 2) = 0.$$

Toda base que represente este vértice contiene a $\{x_1, x_2\}$ más una de las holguras, y dicha holgura básica toma el valor cero, es decir tenemos un vértice degenerado.

Las bases óptimas se obtienen eligiendo cuál holgura permanece en la base (las otras dos quedan no básicas, también en cero):

Base	Variables básicas (valor)	Solución
$A_{B_1} = \{x_1, x_2, x_3\}$	x_1=2, x_2=2, x_3=0	$(2, 2)$
$A_{B_2} = \{x_1, x_2, x_4\}$	x_1=2, x_2=2, x_4=0	$(2, 2)$
$A_{B_3} = \{x_1, x_2, x_5\}$	x_1=2, x_2=2, x_5=0	$(2, 2)$

Las tres bases son distintas, representan el mismo vértice $(2, 2)$, tienen el mismo valor óptimo $z^* = 8$ y todas son degeneradas.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por verificar que la nueva restricción queda activa en el óptimo.
- ◇ 3 puntos por mostrar que las tres holguras son nulas y argumentar la degeneración.
- ◇ 2 puntos por listar las tres bases óptimas. Se puede asignar 1 punto si solo identifica dos de ellas.

Pregunta 3 (20 puntos):

Suponga que se tiene el siguiente problema primal:

$$\begin{array}{lll} (P) & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} & 2x_1 - x_2 \\ & \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & & x_1 + x_2 \geq -5 \\ & & 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ & & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) **(4 puntos)** Obtenga el problema dual asociado a (P).

Solución: El problema dual es:

$$\begin{array}{lll} (D) & \underset{\mathbf{y}}{\text{mín}} & 5y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ & \text{s.a.} & y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ & & y_1 + y_2 - y_3 \geq -1 \\ & & y_1 \geq 0 \\ & & y_2 \leq 0 \\ & & y_3 \geq 0 \end{array}$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por la F.O
- ◇ 1 punto por cada restricción
- ◇ 1 punto por la naturaleza de las variables

(b) **(4 puntos)** Encuentre los cuatro vértices del poliedro dual.

Solución: Como el poliedro está en $\mathbb{R}^3$, un vértice debe ser un punto factible que active al menos tres restricciones linealmente independientes.

Si se activa la última restricción, $y_3 = 0$, el poliedro se reduce a:

$$\left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} -1 \leq y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, de este caso se obtienen los siguientes tres vértices:

$$\{(0,0,0); \quad (2,0,0); \quad (0,-1,0)\}.$$

En cambio, si $y_3 > 0$, se obtiene un único vértice: $(0,0,1)$. Este punto activa las primeras cuatro restricciones.

Nota de corrección: 1 punto por cada vértice

(c) **(3 puntos)** Asumiendo que el problema dual es acotado, encuentre el conjunto de soluciones óptimas duales.

Solución: Como el problema dual es acotado, el valor óptimo se alcanza en al menos un vértice. Evaluamos la función objetivo en los vértices identificados tenemos:

$$\begin{aligned} 5\cdot 0 - 5\cdot 0 - 4\cdot 0 &= 0 \\ 5\cdot 2 - 5\cdot 0 - 4\cdot 0 &= 10 \\ 5\cdot 0 - 5\cdot (-1) - 4\cdot 0 &= 5 \\ 5\cdot 0 - 5\cdot 0 - 4\cdot 1 &= -4 \end{aligned}$$

Como el problema dual es de minimización, la solución óptima dual es $y^* = (0,0,1)$, con valor óptimo $v_D^* = -4$.

(d) **(6 puntos)** Usando el teorema de holguras complementarias, determine el conjunto de soluciones óptimas del problema primal.

Solución:

Jorge:
Holgura complementaria sólo nos entrega como información que la tercera restricción del problema primal debe estar activa, y con esto hay que encontrar la solucion. Con esto, otra solucion mas corta es la siguiente.

Tenemos que $2x_1 - x_2 = -4$, y como el valor óptimo es -4, entonces todas las soluciones de problema estan en la intersección de esta recta con el dominio del problema.

Como $x_2 = 4 + 2x_1$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4+2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 \qquad (**)$$

Como $x_2 \geq 0$, entonces $4 + 2x_1 \geq 0$. Luego $x_1 >= -2$.

Entonces, todas las soluciones del problema estan dadas por la expresión (**) con $-2 \leq x_1 \leq 0$ y las podemos escribir como combinación convexa de

los extremos de este segmento. Es decir, de los vectores $(0 \quad 4)^T$ **y** $(-2 \quad 0)^T$ **que corresponden a** $x_1 = 0$ **y** $x_1 = -2$ **respectivamente.**

Por holguras complementarias, como $y_3^* > 0$, la tercera restricción del problema primal debe estar activa. Luego, al estandarizar las dos primeras restricciones, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + h_1 &= 5 \\ x_1 + x_2 - e_2 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 &= -4 \\ x_1 &\leq 0 \\ x_2, h_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene cuatro variables y tres ecuaciones. Por lo tanto, para encontrar sus vértices, fijamos una variable en cero y resolvemos el sistema resultante.

Si $x_1 = 0$, entonces se obtiene:

$$x_2 = 4, \quad h_1 = 1, \quad e_2 = 9$$

Esta solución es factible, por lo que (0,4) es un vértice óptimo.

Si $x_2 = 0$, entonces se obtiene:

$$x_1 = -2, \quad h_1 = 7, \quad e_2 = 3$$

Esta solución también es factible, por lo que (-2,0) es un vértice óptimo.

Si $h_1 = 0$, entonces se obtiene:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{14}{3}, \quad e_2 = 10$$

Esta solución es infactible, ya que $x_1 > 0$.

Si $e_2 = 0$, entonces se obtiene:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad h_1 = 10$$

Esta solución es infactible, ya que $x_2 < 0$.

Por lo tanto, los únicos vértices óptimos son $(0, 4)$ y $(-2, 0)$. En consecuencia, toda combinación convexa entre estos dos vértices también es óptima

$$X^* = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Nota de corrección:

- ◇ 3 puntos por plantear THC
- ◇ 3 puntos por encontrar el conjunto de soluciones óptimas (un punto si llegan a algo parcial)

(e) **(3 puntos)** ¿El problema primal tiene solución óptima única? ¿Cómo se relaciona esto con el problema dual? Justifique sus respuestas.

Solución: No. El problema primal no tiene solución óptima única. Tiene múltiples soluciones óptimas, dadas por la combinación convexa entre $(0, 4)$ y $(-2, 0)$. Esto es coherente con el problema dual. La solución óptima dual $y^* = (0, 0, 1)$ es degenerada, ya que activa cuatro restricciones en $\mathbb{R}^3$.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por confirmar que no es única y justificar
- ◇ 2 puntos por relación degenerancia - sol múltiple

Ayuda:

Inversa matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas