PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - F.Palominos - J.Vera

Interrogación 2. SOLUCION

Duración: 2 horas y 20 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Suponga que en un problema de Programación Entera está presente la siguiente restricción, en variables $0-1$:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$$

(i) (**2 puntos**) Identifique todos los "covers" que podrían generarse a partir de esta restricción.

Respuesta: Los covers quedan definidos por los siguientes conjuntos de variables:

$$\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}$$

Cada uno de ellos genera una restricción de la forma

$$\sum_{j \in C} x_j \leq card(C) - 1$$

donde C es cualquiera de los conjuntos de arriba.

(ii) (**1 puntos**) ¿Alguno de ellos "corta" la solución fraccionaria dada por $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 5/8$?.

Respuesta: Es fácil ver que, como la cardinalidad de los covers es 3 ó 4, el lado derecho de la restricción de cover siempre será $3 \times (5/8) = 15/8 < 2$ o $4 \times (5/8) = 20/8 < 3$. Eso quiere decir que las restricciones de covers inducidas arribas siempre son satisfechas por la solución propuesta. Moraleja: no siempre se corta toda solución fraccionara factible.

(b) (**3 puntos**) Considere el problema de programación lineal que minimiza $c^T x$ sujeto a $Ax = b, x \geq 0$. Sea x^* la solución óptima, asuma que existe, y sea y^* la solución del problema dual asociado. Suponga que cambiamos el vector b (de recursos) del problema primal por h, y sea $\bar{x}$ la correspondiente solución óptima del nuevo problema. Muestre que $(y^*)^T(h-b) \leq c^T(\bar{x}-x^*)$.

Respuesta: Como x^* es óptimo primal e y^* es óptimo dual, tenemos, por dualidad fuerte, que

$$c^T x^* = b^T y^*$$

Por otro lado, al cambiar b por h, y^* sigue siendo factible para el problema dual con h, pero no necesariamente es óptimo, pero por dualidad débil tenemos que

$$c^T \bar{x} \geq h^T y^*$$

Restando la primera relación a esta última obtenemos:

$$h^T y^* - b^T y^* \leq c^T \bar{x} - c^T x^*$$

y de aquí se sigue la desigualdad propuesta.

(c) (**6 puntos**) Indique en forma precisa y justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.

(i) (**2 puntos**) Un problema de Programación Entera puede ser infactible y aun así su relajación lineal puede ser factible.

Respuesta: Efectivamente es así, por ejemplo cualquier problema con restricciones $1/4 \leq x_j \leq 3/4, j = 1, \ldots, n$ será perfectamente factible pero esa región no contiede ningún punto con coordenadas enteras.

(ii) (**2 puntos**) Cuando se resuelve un problema de Programación Entera de minimización mediante el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound, en Inglés), la función objetivo de los problemas relajados a medida que se avanza hacia abajo en el árbol, no aumenta de valor.

Respuesta: En realidad es al contrario, no disminuye de valor. La relajación lineal típicamente tiene un valor menor al óptimo y a medida que se genera el árbol se van agregando restricciones, lo que hace aumentar el valor, aunque a veces en algunas ramificaciones podría permanecer igual.

(iii) (**2 puntos**) Un problema primal cuya solución óptima es degenerada posee un dual con múltiples soluciones óptimas.

Respuesta: Efectivamente. Al existir degenerancia, hay más de una base primal que es óptima. Luego, por Teorema de Holguras Complementarias, cada base primal estará relacionada a una base dual, que deberá ser óptima. Es más, por Teorema Fuerte de Dualidad, todas esas bases determinadas tendrán el mismo valor objetivo, que será el óptimo.

(d) (**3 puntos**) Considere un problema de optimización lineal en forma estándar que es infactible, pero que se hace factible, y tiene solución óptima finita, si se omite la última restricción de igualdad. Muestre que el dual del problema original (el que era infactible) es factible pero es no acotado.

Respuesta: Supongamos que el problema es de la forma:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Dx = d \\ & a^T x = r \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde hemos destacado especialmente la última restricción, $a^T x = r$. El dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & d^T u + tr \\ s.a. & D^T u + ta \leq c \end{array}$$

Tenemos que si bien P) es infactible, el problema

$$P1) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Dx = d \\ & x \geq 0 \end{array}$$

sí es factible y tiene solución finita. Luego, por dualidad fuerte, su dual

$$D1) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & d^T u \\ s.a. & D^T u \leq c \end{array}$$

tiene solución óptima. Sea u^* esa solución. Entonces, $(u^*, 0)$ es solución factible de D). Esto significa que ese problema dual es factible. Pero como el primal P) es infactible, sólo puede ser posible que D) sea no acotado.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**8 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{lrcrcrl} \text{Max} & x_1 & & & + & x_3 & \\ \text{s.a:} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 4 \\ & & & & & x_j & \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{array}$$

Si usted resuelve este problema usando el Algoritmo Simplex (no lo haga) llegará a que el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (6, 5, 0)$ es solución óptima de este problema.

(i) (**2 puntos**) Escriba el problema dual a P), el cual denominaremos D).

Respuesta: El problema dual es:

$$D) \quad \begin{array}{lrl} \text{mín} & y_1 + 4y_2 & \\ s.a. & y_1 - y_2 & \geq 1 \\ & -y_1 + 2y_2 & \geq 0 \\ & y_1 & \geq 1 \\ & y_1, y_2, & \geq 0 \end{array}$$

(ii) (**2 puntos**) Usando exclusivamente propiedades de dualidad determine una solución óptima al problema D).

Respuesta: Como $\bar{x}_1 > 0$ y $\bar{x}_2 > 0$, tenemos que, por holguras complementarias, debe tenerse que las primeras dos restricciones del dual deben cumplirse con igualdad en el óptimo. Luego, la solución dual satisface:

$$\begin{array}{rl} y_1 - y_2 & = 1 \\ -y_1 + 2y_2 & = 0 \end{array}$$

cuya solución es $\bar{y}_1 = 2, \bar{y}_2 = 1$.

(iii) (**2 puntos**) Determine el rango de valores del coeficiente de la variable x_3 en la función objetivo que hacen que la solución indicada siga siendo óptima.

Respuesta: La variables x_3 no es básica, así que el análisis de sensibilidad es simple. Necesitamos el costo reducido que se obtendría al resolverlo por Simplex. Este es la holgura de la correspondiente restricción del dual y como tenemos la solución dual, se puede calcular fácilmente. De hecho, actualmente

$$\bar{c}_3 = c_3 - (y^*)^T A_{x_3} = c_3 - (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_3 - 2 = 1 - 2 = -1 \leq 0.$$

Si modificamos c_3 a c_3', tenemos que el costo reducido, que debe mantenerse ≤ 0, es:

$$c_3' - 2 \leq 0$$

Luego, se tiene que mientras $c_3' \leq 2$ la solución se mantiene óptima.

(iv) (**2 puntos**) Ahora le proponen aumentar el lado derecho de la primera restricción del problema P) del valor actual de 1 a $1,5$, para para eso debe pagar una cantidad igual a 7. Primero indique si acaso el cambio propuesto es válido para efectos de análisis de sensibilidad y, en caso de serlo, determine si vale o no la pena aumentar ese lado derecho. Justifique con claridad.

Respuesta: Vamos a cambiar el coeficiente 1 a $1,5$, es decir, en un $\delta = 0,5$. Primero verificamos si el cambio es válido, es decir, si δ se encuentra dentro de los límites de sensibilidad para el coeficiente "b_1". Este análisis dice que δ debe satisfacer:

$$\beta_1 \delta \geq -x_B$$

donde β_1 es la columna 1 de la matriz inversa de la base óptima, y x_b es la solución básica óptima. La base es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto signica que el sistema que determina el δ válido es:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \delta = -\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lo que da como límite $\delta \geq -3$. En este caso el cambio es de $\delta = 0,5$, que está dentro del límite de validez.
Ahora podemos determinar si vale la pena hacer el cambio. La función objetivo va a aumentar en una cantidad $\Delta z = \delta \times y_1 = 0,5 \times 2 = 1$. Luego, aumenta en una unidad, pero hay que pagar 7 unidades por el cambio, así que obviamente no vale la pena.

(b) (**7 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización entera:

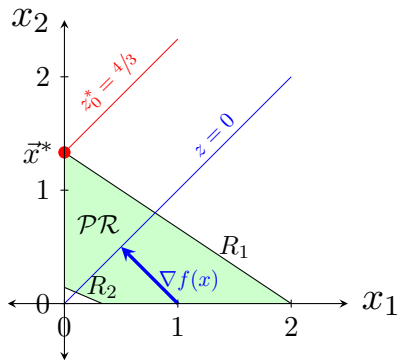
$$(PE) \qquad \begin{array}{rrcrcl} \text{Max} & -x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & 3x_1 & + & 7x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & , & x_2 & \text{enteras} & \end{array}$$

(i) (**2 puntos**) Resuelva, como usted quiera, la relajación lineal del problema (PE) antes descrito y verifique que la solución óptima de esa relajación lineal es fraccionaria.

Respuesta: La relajación lineal de este problema es

$$(PR) \quad \begin{array}{rrcrl} \text{Max} & -x_1 & + & x_2 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq 4 \\ & 3x_1 & + & 7x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Al tener dos variables, es posible resolverlo mediante análisis gráfico.



Podemos, a través del gráfico, determinar que $\vec{x}^* = (0\ ,\ 4/3)$ es el óptimo del problema relajado. Dado que su segunda componente no es entera, efectivamente se trata de una solución fraccionaria.

(ii) (**3 puntos**) Obtenga un corte de Gomory basado en la solución fraccionaria de (i). Justifique con claridad sus pasos.

Respuesta: Podemos determinar la base generando el problema relajado en su forma estándar:

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & x_1 - x_2 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 4 \\ & 3x_1 + 7x_2 - x_4 & = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Para el punto $(x_1, x_2) = (0, 4/3)$, la base está determinada por las variables x_2 y x_4 (segunda restricción inactiva).

Así,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 7/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 7/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 5/3 & 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 7/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$$

Así, un corte de Gomory, considerando que las variables no básicas son x_1 y x_3, sería:

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \geq \frac{1}{3}$$

(iii) (**2 puntos**) Grafique el corte obtenido en la parte (ii) sobre el espacio de soluciones factibles de (PE).

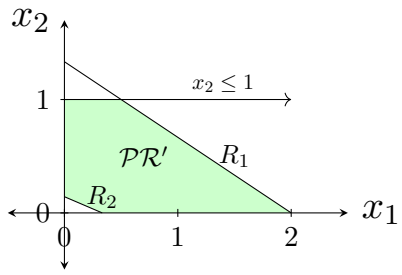
Respuesta: Para poder graficar el corte, necesitamos reescribirla en términos de las variables originales x_1 y x_2. De la primera restricción de la forma estándar:

$$x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2$$

Reemplazando en el corte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}(4 - 2x_1 - 3x_2) &\geq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1 - x_2 &\geq \frac{1}{3} \\ 1 &\geq x_2 \\ x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Agregando esta restricción al gráfico original, queda



Cabe notar que este nuevo problema tiene solución entera.

BONO (**6 puntos**) En el algoritmo de Branch and Bound, cuando se hace la ramificación se crea un nuevo "nodo" que se forma a partir del problema lineal del nodo "padre" agregando una restricción. Esto hace relevante estudiar lo siguiente: consideremos el problema lineal

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y supongamos que este problema ha sido resuelto usando el algoritmo Simplex, siendo $\bar{x}$ una solución óptima. Supongamos que agregamos ahora al problema la restricción $\alpha^T x \leq \beta$, la cual tiene la propiedad de que $\alpha^T \bar{x} > \beta$, para crear el nuevo problema problema:

$$PN) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & \alpha^T x \leq \beta \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(i) (**3 puntos**) Muestre que a partir de una solución dual óptima del problema P), puede obtenerse una solución dual factible para el problema PN) y, por lo tanto, el problema puede reoptimizarse a través del dual (Note que PN) tiene una restricción más que P)).

Respuesta: Sea D) el dominio factible del problema dual de P). Al agregarle una restricción a P), se estaría aumentando en una dimensión el problema D). Es decir, DN) (el

problema dual de PN)), tendría una variable adicional, asociada a la restricción agregada. Llamemos a esa variable adicional t.

Ahora, es posible afirmar que, si $t = 0$, el espacio de soluciones de DN) es factible (pues el espacio de D) lo era, y es equivalente). Sin embargo, sabemos que no es óptimo dado que su base relacionada en el primal es infactible. Luego, resta reoptimizar el problema a partir de la base dual asociada al óptimo dual anterior y $t = 0$ como una variable no básica, para llegar a un nuevo óptimo.

(ii) (**2 puntos**) En forma alternativa, se podría abordar directamente el problema PN). Muestre explícitamente un problema de Fase I para PN), que sólo necesita usar una variable artificial (Indicación: no olvide usar el hecho que ya se conoce una solución óptima para P) y que este fue resuelto con Simplex).

Respuesta: Dado que sabemos que, antes de agregar la variable, $A\bar{x} \leq b$, la única restricción que requiere de una variable auxiliar es la restricción nueva. Sea el vector h un vector de variables de holgura para el sistema $Ax \leq b$, y sea s la variable de holgura para la nueva restricción. Sea, además, la variable auxiliar de la nueva restricción t. Así, el problema de Fase I (luego de construir su forma estándar), queda:

$$PN - FI) \qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax + h = b \\ & \alpha^T x + s + t = \beta \\ & x \geq 0 \\ & h \geq 0 \\ & t \geq 0 \end{array}$$

De acá, es posible continuar con la base que considera las variables básicas asociadas a $\bar{x}$ y la variable t.

(iii) (**1 punto**) ¿Ve alguna relación o similitud entre sus desarrollos de (i) y (ii)? ¿Cuál?

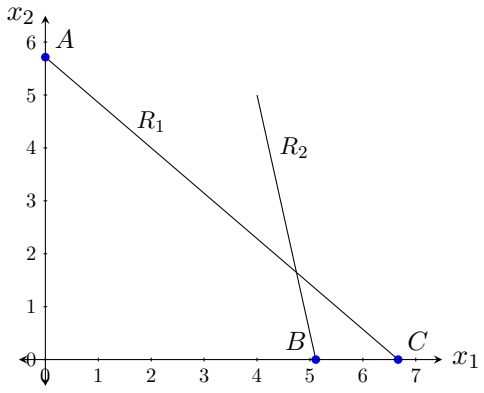
Respuesta: Efectivamente es similar lo que se hace en ambos casos. Tanto en el desarrollo de (i) como en el de (ii) se agrega una variable al problema dual, que es t. Luego, lo que se busca en ambos problemas es desarrollos alternativos sobre un mismo caso.

Pregunta 3 (14 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{lll} \max & 4x_1 + 6x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\ & 9x_1 + 2x_2 & \leq 46 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \textit{enteros} \end{array}$$

El siguiente gráfico corresponde al poliedro definido por las restricciones lineales del problema:



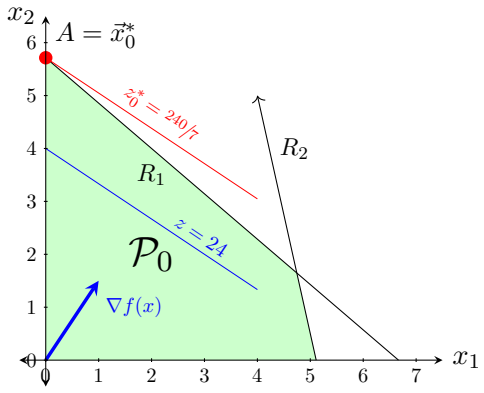
Los puntos marcados en el gráfico tiene las siguientes coordenadas: $A = (0, 40/7); B = (46/9, 0); C = (20/3, 0)$.

(a) (**2 puntos**) Escriba la relajación lineal del problema entero y resuélvala apoyándose en el gráfico. Muestre claramente el valor de la función objetivo y las variables de decisión en el óptimo encontrado.

Respuesta: La relajación lineal de este problema es:

$$\begin{array}{lrl} \max & 4x_1 + 6x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\ & 9x_1 + 2x_2 & \leq 46 \\ & x_1 - 5x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo según método gráfico, obtenemos lo siguiente:



Por lo que la solución óptima de este problema es el punto $A = \vec{x}_0^* = (0, 40/7)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_0^* = {}^{240}/_7 \approx 34,2$.

(b) (**2 puntos**) Busque la solución al problema entero de dos formas: primero mediante una regla *Greedy* (o "golosa", es decir, que se basa en elegir primero la variable que más conviene según función objetivo), y, segundo, por redondeo simple a partir de la solución relajada encontrada en (a). Comente sus resultados.

Respuesta: Mediante una regla *Greedy* (o «golosa»; debería aumentar lo más que pueda x_2 y por las restricciones, esto lo consigo con $x_2 = 5$ (primera restricción). Luego, $x_1 = 0$.

Si realizo el redeondeo simple de la relajación lineal, obtengo el mismo punto. En este punto la función objetivo vale $z = 30$.

Luego vemos que mediante dos métodos simples y rápidos llegamos al mismo resultado, y de una manera intuitiva podríamos concluir que este es el óptimo buscado, sin utilizar herramientas formales como Branch and Bound.

(c) (**8 puntos**) Resuelva mediante el algoritmo de Branch & Bound (ramificación y acotamiento). Deberá resolver antes los problemas con menor profundidad (es decir, llenando el árbol "hacia lo ancho"). En el desarrollo debe mostrar claramente:

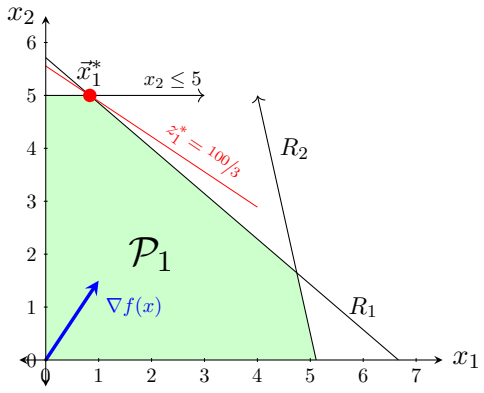
- ◇ Subproblemas utilizados
- ◇ Valor de la función objetivo y de las variables de decisión en el óptimo encontrado de cada subproblema y del problema original
- ◇ El incumbente después de cada subproblema resuelto
- ◇ Árbol (Resumen de resultados)

Respuesta: Dado que tenemos el problema relajado resuelto (que llamaremos PR), procedemos a ramificar en x_2, obteniedo dos subproblemas que llamaremos P_1 y P_2 (recordando que en esta etapa inicial el incumbente es $-\infty$). Dado que $x_2 \approx 5,71$:

Agregamos la restricción $x_2 \leq 5$ para obtener P_1), lo cual queda:

$$
\begin{array}{lll}
P_1) \quad \text{máx} & 4x_1 + 6x_2 & \\
& 6x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
& 9x_1 + 2x_2 & \leq 46 \\
& x_1 - 5x_2 & \leq 18 \\
& x_2 & \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:



Por lo que la solución óptima de este problema es $\vec{x}_1^* = (5/6\ ,\ 5)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_1^* = 100/3 \approx 33,333$ y el incumbente continúa siendo $-\infty$.

Ahora, para P_2), agregamos la restricción $x_2 \geq 6$ a PR), lo cual queda:

$$
\begin{array}{lll}
P_2) & \text{máx} & 4x_1 + 6x_2 \\
 & & 6x_1 + 7x_2 \leq 40 \\
 & & 9x_1 + 2x_2 \leq 46 \\
 & & x_1 - 5x_2 \leq 18 \\
 & & x_2 \geq 6 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

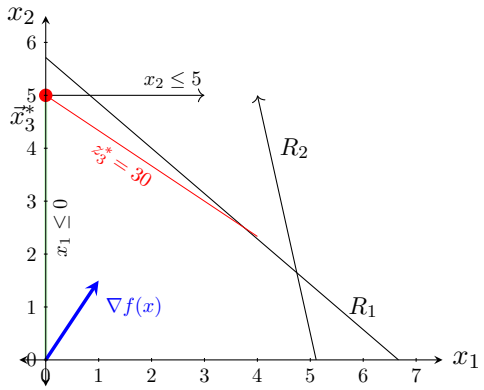
Al resolver mediante método gráfico, obtenemos rápidamente que este subproblema es infactible. Adicionalmente, podemos podar esta rama.

Ahora continuamos ramificando $P_1)$ en x_1, para obtener los subproblemas $P_3)$ y $P_4)$. Dado que $x_1 \approx 0,833$:

Si agregamos la restricción $x_1 \leq 0$ para obtener $P_3)$, lo cual queda:

$$
\begin{array}{lll}
P_3) & \text{máx} & 4x_1 + 6x_2 \\
 & & 6x_1 + 7x_2 \leq 40 \\
 & & 9x_1 + 2x_2 \leq 46 \\
 & & x_1 - 5x_2 \leq 18 \\
 & & x_2 \leq 5 \\
 & & x_1 \leq 0 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:

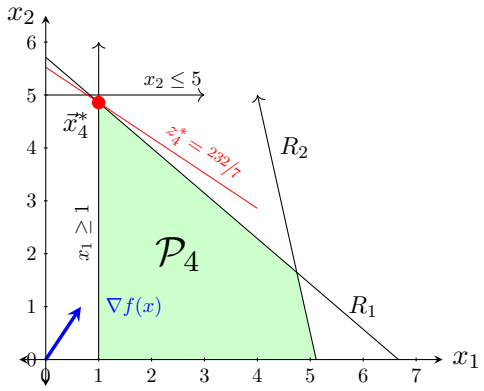


Por lo que la solución óptima de este problema es $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$, obteniendo como valor de la función objetivo $z = 30$ y el incumbente cambia al obtener una solución entera, siendo ahora $\bar{z} = 30$. Adicionalmente podemos podar esta rama.

Si, para $P_4)$, agregamos la restricción $x_1 \geq 1$ queda:

$$
\begin{array}{lll}
P_4) & \text{máx} & 4x_1 + 6x_2 \\
 & & 6x_1 + 7x_2 \leq 40 \\
 & & 9x_1 + 2x_2 \leq 46 \\
 & & x_1 - 5x_2 \leq 18 \\
 & & x_2 \leq 5 \\
 & & x_1 \geq 1 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:



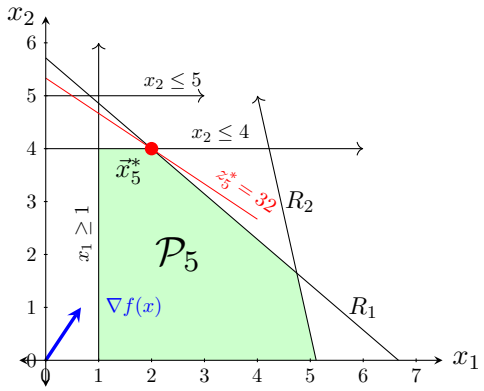
Por lo que la solución óptima de este problema es $\vec{x}_4^* = (1\ ,\ {}^{34}/_7)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_4^* = {}^{232}/_7 \approx 33,14$ y el incumbente sigue siendo 30. Adicionalmente no podemos podar esta rama, por lo que debemos seguir ramificando.

Ahora continuamos ramificando P_4) en x_2, para obtener los subproblemas P_5) y P_6). Dado que $x_2 \approx 4,86$, entonces:

Agregamos la restricción $x_2 \leq 4$ para obtener P_5), lo cual queda:

$$
\begin{array}{lll}
P_5) \quad \text{máx} & 4x_1 + 6x_2 & \\
& 6x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
& 9x_1 + 2x_2 & \leq 46 \\
& x_1 - 5x_2 & \leq 18 \\
& x_2 & \leq 5 \\
& x_1 & \geq 1 \\
& x_2 & \leq 4 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:



Por lo que la solución óptima de este problema es $\vec{x}_4^* = (2, 4)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z = 32$ y el incumbente cambia al obtener una mejor solución entera, siendo ahora 32. Adicionalmente podemos podar esta rama.

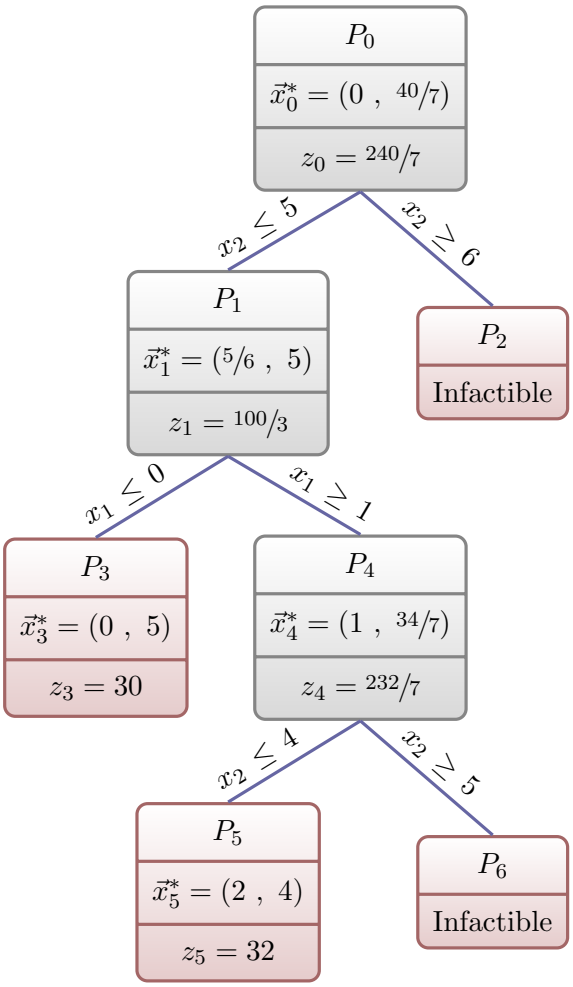
Ahora agregamos la restricción $x_2 \geq 5$ a P_4) para obtener P_6), lo cual queda:

$$
\begin{aligned}
P_6) \quad \text{máx} \quad & 4x_1 + 6x_2 & \\
& 6x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
& 9x_1 + 2x_2 & \leq 46 \\
& x_1 - 5x_2 & \leq 18 \\
& x_2 & \leq 5 \\
& x_1 & \geq 1 \\
& x_2 & \geq 5 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos rápidamente que este subproblema es infactible. Adicionalmente podemos podar esta rama.

Luego como no nos quedan subproblemas para ramificar, terminamos nuestro algoritmo y podemos declarar que la solución óptima del subproblema P_4), es la solución óptima de nuestro problema original entero.

A modo de resumen, el siguiente árbol representa la situación. El orden de desarrollo sigue los subíndices de los problemas. Los nodos en rojo fueron los podados:



(d) (**2 puntos**) Comente las diferencias del resultado obtenido en (c) con lo obtenido en (b).

Respuesta: Al resolver mediante Branch and Bound, vemos que las aproximaciones de solución obtenidas en (b) eran incorrectas, es decir de menor aporte a la función objetivo. Luego

estos resultados son una muestra de la robustez del algoritmo B&B, y que en pequeños problemas ya es claro que estas reglas son solo aproximaciones y que usualmente obtendremos resultados subóptimos.

Pregunta 4 (15 puntos)

A la banquetería "Puelmapu", que usted administra, se le ha asignado la misión de preparar la cena para un matrimonio. Como los novios son muy organizados le han entregado a usted un listado de cómo se encuentran conformadas cada una de las mesas con los integrantes de cada una, en donde se indica si la persona i se encuentra sentada en la mesa m. El menú ya se encuentra definido, por lo que los hombres comerán el plato 1, las mujeres el plato 2 y los niños el plato 3. La elaboración de cada plato consta de 4 etapas: preparación, cocción, presentación, entrega.

Los tiempos de cada una de las etapas para cada plato están dados por el parámetro TE_{je}, para el plato j en su etapa e. Adicionalmente, para garantizar la calidad de la comida, los tiempo entre que finalice una etapa y el inicio de la siguiente, para un mismo plato, no puede superar el valor E_e.

Para preparar este banquete, usted cuenta con C chefs, los cuales son los encargados de realizar cada una de las etapas. No obstante, un mismo chef solo puede estar realizando un trabajo a la vez (no puede estar trabajando en más de un plato ni etapa a la vez). Cada una de las etapas de elaboración de cada plato puede ser ejecutada por cualquiera de los chef, pero una vez que un chef decide comenzar a elaborar una etapa de un plato este debe trabajar en ella hasta terminarla.

Por último, como buen matrimonio, los platos de una misma mesa deben ser entregados al mismo tiempo. Asuma que cuenta con una cantidad ilimitada de garzones que pueden llevar los platos a las mesas una vez que todos los platos de dicha mesa se encuentran listos.

El objetivo es atender a todos las mesas en el menor tiempo posible cumpliendo con todas las exigencias de los novios.

Asuma que todos los tiempos son discretos (las tareas duran minutos completos).

(a) (**3 puntos**) Defina claramente todos los índices, conjuntos, parámetros, variables y supuestos que utilizará en su modelación.

(b) (**12 puntos**) Construya un modelo de programación lineal entera que le permita encontrar la manera de organizar a sus chefs para llevar adelante el banquete.

Solución Pregunta 3 (14 puntos)

a) **Sets**:

t: Set t de unidades de tiempo.

i: Set i de personas asistentes al matrimonio.

j: Set j de platos (tipo 1, 2 o 3).

ii: Set auxiliar, replica de set i.

e: Set e de etapas existentes en el proceso de elaboración de un plato.

c: Set c de chefs disponibles.

m: Set m de mesas existentes en el matrimonio.

Parámetros:

P_{ie}: Tiempo de realizar la etapa e para el plato de la persona i. (Como sabemos que plato comerá cada persona, podemos parametrizar el tiempo de elaboración de cada etapa del plato de cada persona en función de la persona).

E_e: Espera máxima desde que finaliza la etapa anterior de elaboración de un plato y comienza la siguiente del mismo.

T_{max}: Diferencia de espera máxima entre que se sirvieron los platos de una misma mesa.

$M_{i,ii}$: Binaria que indica si la persona i se encuentra sentada con la persona ii en la misma mesa.

Variables:

$X_{(c,i,e,t)}$: variable binaria que vale 1 si el chef c esta trabajando para el plato para la persona i en la etapa e de elaboración durante el tiempo t, y 0 si no.

$Y_{(c,i,e,t)}$: variable binaria que vale 1 si el chef c comienza a trabajar en la etapa e para el plato de la persona i durante el tiempo t, y 0 si no.

$Z_{(i,e)}$: Tiempo en el que finaliza la etapa e para la persona i.

α: Tiempo en que el último plato es entregado.

b) El modelo a optimizar es el siguiente.

Función objetivo:

$$\text{mín} \quad \alpha$$

Restricciones: La función objetivo debe estar sujeta a todas esta restricciones:

R1) Activación trabajo, para iniciar la etapa de un trabajo debo trabajar en ella de manera completa.

$$Y_{c,i,e,t} \leq \frac{\sum_{\hat{t}=t}^{t+P_{ie}} X_{c,i,e,t}}{P_{i,e}} \qquad \forall c, i, e$$

R2) Solo puedo tener un inicio de trabajo para cada plato en cada etapa.

$$\sum_{t,c} Y_{c,i,e,t} = 1 \qquad \forall i, e$$

R3) No iniciar una etapa antes de finalizar la anterior.

$$\sum_{t,c} ord(t) Y_{c,i,e,t} - \sum_{t,c} ord(t) Y_{c,i,(e-1),t} \geq P_{i,e} \qquad \forall i, e : e = 2..,4$$

R4) Un mismo chef solo puede estar trabajando en un plato y etapa al mismo tiempo.

$$\sum_{i,e} X_{c,i,e,t} \leq 1 \qquad \forall t, c$$

R5) Relación de instante de término de la etapa de un plato.

$$\sum_{c} ord(t) X_{c,i,e,t} \leq Z_{i,e} \qquad \forall i, e, t$$

R6) Diferencia máxima de tiempo para llevar los platos a una misma mesa.

$$Z_{i,4} - Z_{ii,4} \leq T_{max} \qquad \forall i, ii : M_{i,ii} = 1$$

R7) Espera máxima entre la finalización de la etapa de un plato y el comienzo de la elaboración de la etapa siguiente del mismo.

$$\sum_{c,t} ord(t) Y_{c,i,e,t} - Z_{i,(e-1)} \leq E_e \qquad \forall i, e : e = 2..,4$$

R8) Generación de la variable α.

$$Z_{i,4} \leq \alpha \qquad \forall i = 1, \ldots, M$$

R9) Naturaleza de las variables

$$X_{(i,j)}, T_{(i,j)} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j Z_{(i,e)} \qquad \geq 0 \qquad \forall i, e$$