PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Optimización
Semestre: 02-2011
Profesores: Claudia Prieto - Alejandro Cataldo
Mathias Klapp - Germán Paredes

Pauta Examen

Duración: 3 horas 30 minutos

Se debe contestar la pregunta 1, pregunta 2 parte A, pregunta 2 parte B y pregunta 3 en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras programables y de celulares de cualquier tipo.*

INFORMACIÓN:*Se espera que las notas del examen sean publicadas el día martes 6 de diciembre, y de esta manera la recorrección del examen se realizaría el día miércoles 7 de diciembre, en sala y horario por fijar.*

Pregunta 1 y Pauta (20 puntos)

Cada una de las partes de esta pregunta tiene el mismo valor.

a) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ s.a. & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Asuma que hay al menos dos soluciones óptimas distintas a este problema. Justifique si siempre se tienen al menos dos soluciones básicas factibles óptimas para este problema.

RESPUESTA: Esto no es siempre cierto, ya que el problema puede tener múltiples soluciones y solo un punto extremo (caso en que sería un rayo) (**4 puntos**).

b) Considere el problema de flujo a costo mínimo en la red que se muestra en la Figura 1. Se indican en ella los costos por unidad de flujo en los arcos respectivos y la oferta (flecha entrante al nodo), demanda (flecha saliente) o trasbordo (sin flecha) según corresponda:

Suponga la solución básica factible dada por los arcos: (1,2), (2,4), (2,3), (4,5) y (4,6). ¿Para qué rango de valores de X, costo del arco (4,5), la solución dada es óptima?

RESPUESTA: Calculamos el valor de las variables duales ($\pi' s$) (vale **1,5 puntos**).

◇ Cálculo de $\pi' s$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{12} = 4 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{24} = 1 - \pi_2 + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{23} = 2 - \pi_2 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{45} = x - \pi_4 + \pi_5 = 0$$
$$\bar{c}_{46} = 6 - \pi_4 + \pi_6 = 0$$

considerando, arbitrariamente $\pi_1 = 0$ se tiene que $\pi_2 = -2$, $\pi_3 = -4$, $\pi_4 = -3$, $\pi_5 = (-3-x)$ y $\pi_6 = -9$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de los flujos no básicos.

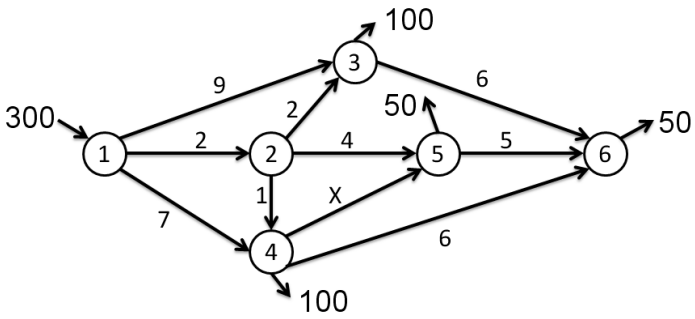


Figura 1: Red asociada al problema b)

◇ Cálculo de costos reducidos de los flujos no básicos (**1,5 puntos**).

$$\bar{c}_{13} = 9 - (0) + (-4) = 5 \leq 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{14} = 7 - (0) + (-3) = 4 \leq 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{25} = 4 - (-2) + (-3 - x) = 3 - x \leq 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{36} = 6 - (-4) + (-9) = 1 \leq 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{56} = 5 - (-3 - x) + (-9) = x - 1 \leq 0 \text{ (en cota inferior)}$$

Luego, para que la solución sea óptima $1 \leq x \leq 3$ (**1 punto**).

c) La Figura 2 representa algunas calles de una ciudad. En cada una de las esquinas marcadas con una a hay un cliente que desea ser transportado a la esquina marcada con b correspondiente; es decir, el cliente situado en la esquina a_1 quiere ir a la esquina b_1, y así sucesivamente. Un taxista que está situado en el punto marcado con u, desea hacer todos los servicios y regresar al punto de partida, y quiere atender a los clientes en el orden que le suponga el recorrido más corto (todas las manzanas tienen la misma longitud, que tomaremos como unidad). Por supuesto, no pueden coincidir dos clientes en el interior del taxi.

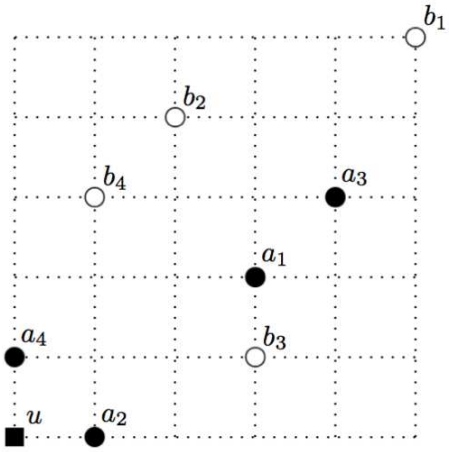


Figura 2: Esquema asociado al problema c)

i) ¿A qué problema clásico de Programación Lineal Entera se parece este problema? ¿Qué diferencias existen entre este problema y el problema clásico que ha mencionado?

RESPUESTA: Claramente es muy parecido al problema del vendedor viajero (**1 punto**). Ahora, en este caso particular el problema difiere un poco puesto que existen secuencias que están predeterminados. Si se resolviera el problema de la figura como un vendedor viajero, la solución no necesariamente respetaría el orden natural de recoger y dejar que requiere el problema del taxista (**1 punto**).

ii) ¿Cuántas soluciones debería evaluar si quisiera resolver el problema de la Figura 2 por enumeración exhaustiva?

RESPUESTA: El taxista deber determinar el orden en que debe recoger a cada cliente, como son 4 clientes, la combinación exhaustiva de soluciones corresponde a evaluar $4! = 24$ soluciones diferentes (**2 puntos**).

d) Considere el siguiente problema de minimización no lineal:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{mín} & -x_1^2 & - & 2x_2^2 & - & 3x_3^2 & & \\ s.a. & x_1^2 & + & x_2^2 & & & = & 25 \\ & x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

i) Utilizando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, muestre que P) admite al menos una solución óptima.

RESPUESTA: Se debe demostrar que:

- ◇ La función objetivo es continua en el dominio. En este caso lo es pues es un polinomio de segundo grado, $f(x_1, x_2)$ es continua sobre R^2 (**0,3 puntos**).
- ◇ El dominio debe ser cerrado. Como las restricciones son polinomios de igualdad continuas, entonces el dominio es cerrado (**0,3 puntos**).
- ◇ El dominio es no vacío. Se tiene el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 2$ que satisface ambas restricciones, luego pertenece al dominio, que en consecuencia es no vacío (**0,3 puntos**).
- ◇ El dominio debe ser acotado. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ x_1^2 \geq 0, x_2^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |x_1| \leq 5(*) \\ |x_2| \leq 5(**) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} x_3 = 2 - x_1 \\ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \{ -3 \leq x_3 \leq 7(***)$$

Luego, por $(*)$, $(**)$ y $(***)$ se tiene que el dominio es acotado (**0,8 puntos** desarrollo y conclusión).

En consecuencia, se cumplen las condiciones de Bolzano-Weierstrass por lo que el problema admite solución óptima (**0,3 puntos**).

ii) Muestre que toda solución óptima de P) es necesariamente un punto estacionario factible de Lagrange.

RESPUESTA: Para esto, se debe probar que todo punto factible del problema es regular, y que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes sobre todo el dominio. Entonces:

$$\nabla h_j(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\nabla h_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}^T$$

Como $\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}^T$ no pertenece al dominio, y $\nabla h_1(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ (**1 punto**).

Por otra parte, se puede apreciar que $\nabla h_1(x_1, x_2, x_3)$ y $\nabla h_2(x_1, x_2, x_3)$ son linealmente independientes para cualquier punto del dominio. Luego, todo punto factible es regular y en consecuencia, toda solución óptima es necesariamente un punto estacionario de Lagrange (**1 punto**).

e) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ s.a. & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

¿Es cierto que el punto $(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = (1, 2, 1, 0)$ es el mínimo global de este problema?

Respuesta: Obtengamos el gradiente de la función objetivo y de las restricciones:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_2(1, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, se debe verificar que el punto entregado cumple con:

$$\nabla f(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_2(x_1, x_2) = 0$$

Evaluando $(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = (1, 2, 1, 0)$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se cumple la condición necesaria de KKT, y entonces el punto es mínimo local (Todos los cálculos anteriores valen **2,5 puntos**).

Para verificar que es mínimo global se debe verificar la condición suficiente de KKT. En este caso, la función objetivo es estrictamente convexa ya que su hessiana es definida positiva:

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

pues su primer determinante es $4 > 0$ y su segundo determinante es $4 > 0$ (**0,5 puntos**).

La primera restricción es una convexa pues es una circunferencia. La segunda restricción es convexa pues es una línea recta. Luego, el espacio es convexo pues la intersección de conjuntos convexos es convexa (Todos los cálculos anteriores y la conclusión valen **0,5 puntos**).

Finalmente, como la función objetivo es convexa y el dominio es convexo el problema es convexo. En consecuencia se cumple la condición suficiente de KKT y el punto entregado es mínimo global (**0,5 puntos**).

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Considere una empresa productora de helados que produce 3 tipos de variedades: MegaFruta (x_1), FrutaFruta (x_2) y FrutaChoc (x_3). Para la producción de estas 3 variedades se requieren 4 insumos: horas-hombre, frambuesa, chocolate y un ingrediente secreto. La empresa cuenta para hoy con 40 horas-hombre, 180 kilos de frambuesa, 175 kilos de chocolates y 120 pizcas del ingrediente secreto. La siguiente tabla muestra la cantidad que se necesita de cada insumo para producir un litro de cada variedad de helado.

	Horas-Hombre	Frambuesa	Chocolate	Ingrediente Secreto
MegaFruta	1	7	2	4
FrutaFruta	1	2	5	3
FrutaChoc	1	3	4	4

Se sabe que por cada litro de MegaFruta, FrutaFruta y FrutaChoc producido y enviado a mercado la empresa obtiene utilidades por 3, 7 y 1 respectivamente. Asuma que el mercado recibe y paga por todos los litros que la empresa le envíe y que no hay inventario de helados.

a) (1 punto) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal continua que permita determinar la cantidad de unidades de cada producto que deben ser producidos (y entonces x_1, x_2 y x_3) hoy de manera de maximizar la utilidad total.

b) (6 puntos) La empresa le ha entregado las siguientes soluciones que cree resuelven el problema planteado en a):

Soluciones	MegaFruta	FrutaFruta	FrutaChoc
Solución 1	15	20	0
Solución 2	0	0	30
Solución 3	0	40	0
Solución 4	17	33	0

Determine y justifique claramente si alguna de las soluciones entregadas en la tabla anterior es la solución óptima del problema planteado en a).

c) (3 puntos) Basándose en la información de la tabla de soluciones, entregue la mejor cota inferior y la mejor cota superior para la solución óptima del problema planteado en a).

Pauta Parte A (10 puntos)

a) (1 punto) Las variables para modelar el problema son: x_1 cantidad de MegaFruta, x_2 cantidad de FrutaFruta, x_3 cantidad de FrutaChoc.

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{máx} & 3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 40 & \text{R1-Restricción de horas-hombre} \\
& 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 180 & \text{R2-Restricción de frambuesa} \\
& 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \leq & 175 & \text{R3-Restricción de chocolate} \\
& 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 120 & \text{R4-Restricción de ingrediente secreto} \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 & \text{Naturaleza de variables}
\end{array}
$$

(el modelo vale **1 punto**. Si está malo no tiene puntaje.)

b) (6 puntos) Al revisar la tabla de soluciones (donde se incorpora el valor de las variables de holgura por restricción) entregadas se tiene que (La construcción de la tabla vale **2,0 puntos**):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Valor función objetivo	Factibilidad
Solución 1	15	20	0	5	35	45	0	185	Factible
Solución 2	0	0	30	0	90	55	0	30	Factible
Solución 3	0	40	0	10	100	-25	0	280	No cumple R3
Solución 4	17	33	0	-10	-5	-24	-47	282	No cumple R1, R2, R3 y R4

En consecuencia, las soluciones 1 y 2 son candidatas a óptimo, dispuestas en orden por el valor de la función objetivo (determinar esto vale **2 puntos**). La solución 1, que tiene mejor valor de función objetivo, no es una solución básica. Entonces, la única manera de que sea óptima es que esté en la cara del poliedro de soluciones factibles. Para que eso suceda, alguna de las restricciones debe ser paralela a las curvas de nivel de la función objetivo, y eso, en este problema no sucede. Luego, la solución óptima no se encuentra entre las soluciones entregadas (**4,0 puntos**).

c) (3 puntos) La cota inferior para el valor de la función objetivo la entrega el mejor valor de la función objetivo para un punto factible del primal. En este caso, esa cota vale 185 (entregada por la solución 1) (determinar esta cota vale **0,5 puntos**).

Para determinar una cota superior para el valor de la función objetivo de la solución óptima del problema de la parte a) se debe verificar si alguna de las soluciones infactibles del primal es una solución factible en el dual.

La solución 4 es la que podría entregar la mejor cota superior, ya que es infactible en el primal. Sin embargo, no es un punto extremo, y por lo tanto no se puede obtener su interpretación dual. La solución 3 también es infactible en el primal, pero es punto extremo. Luego, basta verificar si es factible en el dual para que entregue una cota superior.

Entonces, construyamos el dual (todo el desarrollo dual vale **1 punto**):

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\text{mín} & 40y_1 & + & 180y_2 & + & 175y_3 & + & 120y_4 & & & \\
& y_1 & + & 7y_2 & + & 2y_3 & + & 4y_4 & \geq & 3 & \text{RD1} \\
& y_1 & + & 2y_2 & + & 5y_3 & + & 3y_4 & \geq & 7 & \text{RD2} \\
& y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & + & 4y_4 & \geq & 1 & \text{RD3} \\
& y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 & \text{Naturaleza de variables duales}
\end{array}
$$

donde el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria queda:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3 - 40) \cdot y_1 = 0 \\
&(7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 180) \cdot y_2 = 0 \\
&(2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 175) \cdot y_3 = 0 \\
&(4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 120) \cdot y_4 = 0 \\
&(y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 4y_4 - 3) \cdot x_1 = 0 \\
&(y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 3y_4 - 7) \cdot x_2 = 0 \\
&(y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 4y_4 - 1) \cdot x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Para obtener el valor de las variable duales de la solución ocupamos el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria. Reemplazando la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 40$ y $x_3 = 0$ en el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria se tiene $y_1 = 7$ e $y_2 = y_3 = y_4 = 0$,

con lo que se tiene que la solución es dual factible (obtener los valores de las variables, sin importar cómo, vale **1 punto**). Luego, el teorema débil de dualidad nos asegura que 280 es una cota superior para el problema planteado en a) (determinar esta cota vale **0.5 puntos**).

Parte B (10 puntos)

Sea el siguiente problema no lineal restringido:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x_1, x_2) = ln(x_1 + x_2) \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) (2 puntos) Analice la regularidad del dominio.

b) (2 puntos) Vea analíticamente si en el problema planteado se cumple la condición de suficiencia. Indique si esta condición se cumple o no para todo punto factible.

c) (2 puntos) Grafique la condición necesaria de KKT en el punto $(5, 0)$ y vea si este punto la cumple.

d) (2 puntos) Diga cuáles restricciones son activas y cuál es el valor de los multiplicadores de Lagrange en el punto $(5, 0)$.

e) (2 puntos) Si ahora se cambia la restricción: $x_1 + 2x_2 \leq 5$ por $x_1 + x_2 \leq 5$. Vuelva a ver si en el punto $(5, 0)$ se cumple la condición necesaria de KKT.

Pauta Parte B (10 puntos)

a) Es un problema con restricciones lineales, por lo que no existen puntos singulares (**2 puntos**).

b) La función objetivo es estrictamente convexa por ser convolución de funciones convexas (también se puede ver el Hessiano) (**0,5 puntos**). El dominio también es convexo ya que está construido con restricciones lineales (**0,5 puntos**). Luego, el problema es convexo y por lo tanto se cumple con el criterio de suficiencia de KKT, y se cumple para todo punto factible (**1 puntos**).

c) En la Figura 3 se muestra el gráfico con la condición necesaria de KKT en el punto $(5, 0)$. Visualmente se puede apreciar que el gradiente de la función objetivo está contenido en el cono formado por el gradiente de las restricciones activas en el punto (**0,5 puntos** gráfico y **1,5 puntos** por graficar la condición de KKT). Luego,

d) Diga cuáles restricciones son activas y cuál es el valor de los multiplicadores de Lagrange en el punto $(5, 0)$. El problema queda:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x_1, x_2) = -ln(x_1 + x_2) \\ s.a. & g_1 : x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0 \\ & g_2 : -x_1 \leq 0 \\ & g_3 : -x_2 \leq 0 \end{array}$$

La restricción g_1 es activa, la restricción g_2 es inactiva y la restricción g_3 es activa **0,2 puntos**. El sistema para determinar los multiplicadores de Lagrange se tiene que construir:

Construimos la función Lagrangeana:

$$L = -ln(x_1 + x_2) + \mu_1(x_1 + 2x_2 - 5) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)$$

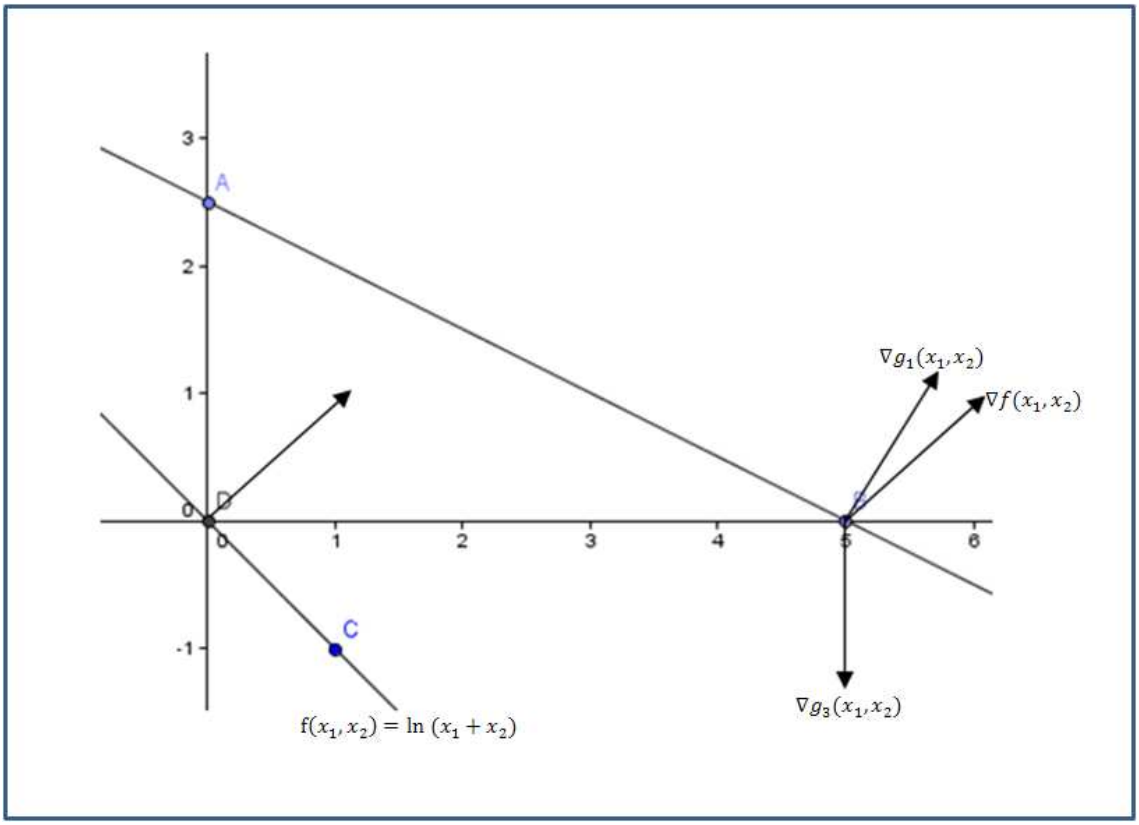


Figura 3: Gráfico con la condición necesaria de KKT en el punto $(5,0)$

Luego las condiciones de lagrange, nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones (**1 punto** construir las condiciones sin evaluarlas):

$$\begin{aligned}
\partial L/\partial x_1 = 0: &\quad -\frac{1}{x_1+x_2} + \mu_1 - \mu_2 = 0\\
\partial L/\partial x_2 = 0: &\quad -\frac{1}{x_1+x_2} + 2\mu_2 - \mu_3 = 0\\
\partial L/\partial \mu_1 = 0: &\quad x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0\\
\partial L/\partial \mu_2 = 0: &\quad -x_1 \leq 0\\
\partial L/\partial \mu_3 = 0: &\quad -x_2 \leq 0\\
&\quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0\\
&\quad \mu_1(x_1 + 2x_2 - 5) = 0\\
&\quad \mu_2(-x_1) = 0\\
&\quad \mu_3(-x_2) = 0
\end{aligned}$$

que evaluadas en el punto $(5,0)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\partial L/\partial x_1 = 0: &\quad -\frac{1}{5} + \mu_1 - \mu_2 = 0\\
\partial L/\partial x_2 = 0: &\quad -\frac{1}{5} + 2\mu_2 - \mu_3 = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial L/\partial \mu_1 = 0: &\quad 0 \leq 0 \\
\partial L/\partial \mu_2 = 0: &\quad -5 \leq 0 \\
\partial L/\partial \mu_3 = 0: &\quad 0 \leq 0 \\
&\quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\
&\quad \mu_1 \cdot 0 = 0 \\
&\quad \mu_2 \cdot (-5) = 0 \\
&\quad \mu_3 \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

con lo cual se tiene que $\mu_1 = \frac{1}{5} \geq 0$, $\mu_2 = 0 \geq 0$ y $\mu_3 = \frac{1}{5} \geq 0$ (**0,8 punto** construir evaluarlas y concluir).

e) El problema queda:

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & f(x_1, x_2) = -ln(x_1 + x_2) \\
s.a. & g_1 : x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\
& g_2 : -x_1 \leq 0 \\
& g_3 : -x_2 \leq 0
\end{array}
$$

La restricción g_1 es activa, la restricción g_2 es inactiva y la restricción g_3 es activa (**0,2 puntos**). El sistema para determinar los multiplicadores de Lagrange se tiene que construir:

Construimos la función Lagrangeana:

$$L = -ln(x_1 + x_2) + \mu_1(x_1 + x_2 - 5) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)$$

Luego las condiciones de lagrange, nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones (**1 punto** construir las condiciones sin evaluarlas):

$$
\begin{aligned}
\partial L/\partial x_1 = 0: &\quad -\frac{1}{x_1 + x_2} + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\
\partial L/\partial x_2 = 0: &\quad -\frac{1}{x_1 + x_2} + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\
\partial L/\partial \mu_1 = 0: &\quad x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\
\partial L/\partial \mu_2 = 0: &\quad -x_1 \leq 0 \\
\partial L/\partial \mu_3 = 0: &\quad -x_2 \leq 0 \\
&\quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\
&\quad \mu_1(x_1 + x_2 - 5) = 0 \\
&\quad \mu_2(-x_1) = 0 \\
&\quad \mu_3(-x_2) = 0
\end{aligned}
$$

que evaluadas en el punto $(5, 0)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\partial L/\partial x_1 = 0: &\quad -\frac{1}{5} + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\
\partial L/\partial x_2 = 0: &\quad -\frac{1}{5} + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\
\partial L/\partial \mu_1 = 0: &\quad 0 \leq 0 \\
\partial L/\partial \mu_2 = 0: &\quad -5 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$\partial L/\partial \mu_3 = 0: \qquad 0 \leq 0$$
$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$
$$\mu_1 \cdot 0 = 0$$
$$\mu_2 \cdot (-5) = 0$$
$$\mu_3 \cdot 0 = 0$$

con lo cual se tiene que $\mu_1 = \frac{1}{5} \geq 0$, $\mu_2 = 0 \geq 0$ y $\mu_3 = \frac{1}{5} \geq 0$ (**0,8 puntos** evaluar las condiciones y concluir).

Pregunta 3 (20 puntos)

En un pueblo existe un único orfanato, que es administrado por el malvado Halej. En este momento acaban de llegar nuevos huérfanos, y sus nombres se encuentran listados en el conjunto I. Estos nuevos huérfanos serán asignados a alguna de las 7 habitaciones dispuestas para ello. El orfanato cuenta con Q_j camas individuales en la habitación j, $\forall j = 1, \ldots, 7$.

Halej, luego de años de administración del orfanato, ha entendido que la felicidad de un huérfano depende de si es asignado en una habitación en la que se encuentre al menos uno de sus mejores amigos. Es por ello que este odiado administrador ha preguntado a cada huérfano (por temor le han dicho la verdad) por quiénes son sus amigos dentro del grupo de huérfanos recién llegados. Esta información se encuentra en el subconjunto A_i, $\forall i \in I$ (que contiene el nombre de los cinco mejores amigos del huérfano).

Los años le han entregado a Halej el conocimiento de que un huérfano feliz llorará durante cada noche por a_i minutos, mientras que un huérfano infeliz lo hará durante $b_i > a_i$ minutos. Un extraño sentido de justicia impide a Halej aceptar una asignación de huérfanos a habitaciones si el total de minutos que se llora en la habitación que más minutos se llora es más del doble de los minutos totales que se llora en la habitación que menos se llora.

a) (12 puntos) Con la información anterior formule un modelo de programación lineal que permita a Halej tomar las decisiones que le permitan maximizar la cantidad de nuevos huérfanos del orfanato que son infelices. Para ello, recuerde que un huérfano es infeliz si no tiene al menos uno de sus mejores amigos en su misma habitación.

Los nuevos huérfanos han sido instalados en el orfanato tal y como Halej ha dispuesto (parte a). En la última noche, Halej ha sufrido el destrozo de uno de sus bienes más preciados el libro *Optimización Avanzada*. Este libro ha sido destrozado en su oficina, y la única pista que se tiene es una fotografía borrosa del usurpador captada por una cámara de seguridad. Dado lo personal del asunto, Halej ha decidido contratar un equipo experto en reconocimiento de fotografías para que le ayude a dar con el usurpador. Este equipo cobra c pesos por cada análisis, el que consiste en tomarle una fotografía a un individuo y compararla computacionalmente con la fotografía borrosa obtenida del usurpador.

Halej dispone de P pesos para encontrar al usurpador, y es claro que no le alcanzará para comparar a cada huérfano con la evidencia fotográfica. Por ello, ha asignado p_i como la probabilidad de que el huérfano i, $\forall i \in I$ (los huérfanos más antiguos temen mucho a Halej como para haber perpetrado el daño) sea el usurpador. Bajo este escenario, la dirección del orfanato le ha indicado a Halej que para realizar este procedimiento se debe asegurar que la diferencia entre el número de huérfanos sacados de una habitación para el procedimiento y los sacados de otra cualquiera debe ser a lo más δ.

b) (8 puntos) Con la información anterior formule un modelo de programación lineal que permita a Halej maximizar la probabilidad de identificar a quién ha dañado su libro.

Pauta Pregunta 3 (20 puntos)

a) Se definen las siguientes variables.

Variables

x_{ij}: binaria que vale 1 si se destina al huérfano i, con $i = 1 \in I$, a la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$.

y_{ij}: binaria que vale 1 si el huérfano i, con $i \in I$, que está en la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$ es infeliz.

Función objetivo (2 puntos) La función objetivo consiste en maximizar la cantidad de huérfanos infelices.

$$\text{máx} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{7} y_{ij}$$

Restricciones

R1) Asegurar que todo huérfano es asignado a exactamente una habitación (**1 punto**).

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in I.$$

R2) Asegurar que la asignación de huérfanos a habitaciones respete la capacidad de cada una de ellas (**1 punto**).

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq Q_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7.$$

R3) Relación entre las variables (**2 puntos**).

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall\, i \in I; \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7.$$

R4) Construcción de la variable que cuenta a los huérfanos infelices (**2 puntos**).

$$y_{ij} \leq \sum_{k \in A_i} x_{kj} \quad \forall\, i \in I; \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7.$$

R5) Asegurar que el llanto total entre las piezas respeta la diferencia máxima impuesta por Halej (**3 puntos**).

$$\sum_{i \in I} (a_i x_{ij} + (b_i - a_i) y_{ij}) \geq 2 \cdot \sum_{i \in I} (a_i x_{il} + (b_i - a_i) y_{il}) \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7; \quad \forall\, l = 1, \ldots, 7 : l \neq j.$$

R6) Naturaleza de las variables.

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, para huérfano $i \in I$ y habitación $j = 1, \ldots, 7$ (**0,5 puntos**).
$y_{ij} \in \{0, 1\}$, para huérfano $i \in I$ y habitación $j = 1, \ldots, 7$ (**0,5 puntos**).

b) Se definen las siguientes variables.

Parámetro

x_{ij}: parámetro binario (resultado de la parte a) que vale 1 si el huérfano i, con $i \in I$, fue ubicado en la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$.

Variable

w_{ij}: binaria que vale 1 si se escoge para el análisis al huérfano i, con $i = 1, \ldots, I$, que está en la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$.

Función objetivo (2 puntos) La función objetivo consiste en maximizar la probabilidad de identificar al usurpador.

$$\text{máx} \quad \sum_{i \in I} p_i \sum_{j=1}^{7} w_{ij}$$

Restricciones

R1) Se debe respetar el presupuesto disponible (**2 puntos**).

$$\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{7} c \cdot w_{ij} \leq P$$

R2) Asegurar que la selección es coherente con la asignación de la parte a) (**2 puntos**).

$$w_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall\, i \in I; \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7.$$

R3) Asegurar que la diferencia no es más que δ (**1,5 puntos**).

$$\sum_{i \in I} w_{ij} - \sum_{i \in I} w_{ik} \leq \delta \quad \forall\, j = 1, \ldots, 7; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 7 : k \neq j.$$

R4) Naturaleza de las variables (**0,5 puntos**).

$w_{ij} \in \{0, 1\}$, para huérfano $i \in I$ y habitación $j = 1, \ldots, 7$.