PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: R. Cuadrado - S. Encina - F. Palomino
J.T. Marquinez - A. Cataldo - J. González

Pauta Interrogación 1

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) **(8 puntos)** Suponga que a usted lo contratan del club de fútbol Colchagua C.D. para programar los fichajes del club del próximo año sujeto al presupuesto con el que cuentan. Por razones desconocidas, el club se quedó sin ningún jugador, por lo que actualmente el club está sin jugadores fichados. Sin embargo, al momento de contratarlo a usted, el presidente del club le dice que posee un antiguo modelo de optimización para programar sus fichajes.

El presidente recuerda algunas cosas del modelo, entre las cuales está alguna información que se requiere para su uso: que se debe contar con una lista de los jugadores en el mercado, la posición específica que cada uno de estos jugadores tiene en la cancha (arquero, defensa, etc.), el nivel individual y el nivel colectivo de cada jugador (que depende de qué otros jugadores estén en el equipo). También sabe que lo que se quiere es maximizar la suma total del nivel del grupo de jugadores fichados.

Si se sabe que todas la listas de todos los jugadores contiene n nombres y que las posiciones están en el conjunto K, el modelo del que hablaba el presidente es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1|j\neq i}^{n} b_{ij} y_{ij} & & \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq P & & (1) \\
& y_{ij} \leq \tfrac{x_i + x_j}{2} & \forall i, j = 1, ..., n & (2) \\
& \sum_{i=1}^{n} r_{ik} x_i \geq t_k & \forall k \in K & (3) \\
& x_i + \frac{\sum_{j \in D_i} x_j}{|D_i|} \leq 1 & \forall i = 1, ..., n & (4) \\
& x_i, y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j = 1, ..., n &
\end{aligned}
$$

Pero el presidente solo sabe que el parámetro r_{ik} es binario y que P representa el presupuesto con que cuenta Colchagua C.D. En base a la información que le ha entregado el presidente y el modelo anterior, responda las siguientes preguntas.

(i) **(2 puntos)** ¿Cuáles son las variables de decisión y cómo están definidas?

(ii) **(2 puntos)** ¿Qué significan los parámetros a_i y b_{ij}?

(iii) **(4 puntos)** Interprete correctamente las restricciones (1), (2), (3) y (4), detallando también qué significan los parámetros dentro de cada una de ellas.

Solución:

(i) Las variables son:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ si se contrata al jugador } i \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$
$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si se contrata al jugador } i \text{ y al jugador } j \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$

(ii) El parámetro a_i corresponde al nivel individual que aporta el jugador i. El parámetro b_{ij} corresponde al nivel que aporta el jugador i si es que se contrata también al jugador j.

(iii)
- ◇ La restricción (1) limita la cantidad de jugadores a contratar según el presupuesto que hay. Por lo tanto, P es el presupuesto del club y c_i es el costo de contratación del jugador i.
- ◇ La restricción (2) relaciona las variables. La variable y_{ij} solo puede ser 1 si es que se contratan a los jugadores i y j.
- ◇ El parámetro r_{ik} vale 1 si el jugador i juega en la posición k, 0 si no. t_k es la cantidad mínima de jugadores deseada en la posición k. Por lo tanto, la restricción 3 asegura que exista una cantidad mínima de jugadores en cada posición.
- ◇ El subconjunto D_i contiene a todos los jugadores que no pueden estar con el jugador i. Por lo tanto, la restricción (4) indica que si se contrata al jugador i, entonces no se puede contratar a ninguno de los jugadores contenidos en el subconjunto D_i.

(b) **(8 puntos)** Basado en la lectura del paper "An integer programming approach to curriculum-based examination timetabling", responda las siguientes preguntas.

(i) **(2 puntos)** ¿Cuál es la información que se entrega desde el modelo $CB-ETTP-C$ al modelo $CB-ETTP-CA$?

(ii) **(2 puntos)** ¿Cuál es el propósito específico que se busca con la construcción de la función objetivo del modelo $CB-ETTP-RA$?

(iii) **(2 puntos)** Dé un ejemplo numérico (pequeño) de cómo se utilizan los patrones en el paper.

(iv) **(2 puntos)** Explique claramente la restricción (7) que se encuentra en el modelo $CB-ETTP-C$ (ver restricción en nota al pie[1]).

Solución:

(i) Se entrega la solución que se obtiene al asignar elementos de cada cluster a un bloque horario y un patrón de salas específico.

(ii) Se busca que todas las salas asignadas a un curso (para todos lo cursos) estén lo más cercanas posibles entre sí, y que esto permita que el curso con la peor asignación de salas (al que le quedan más lejos las salas entre si) las tenga lo más cerca posible.

(iii) Consideremos dos tipos de salas, grandes con capacidad para sentar a 100 alumnos y pequeñas con capacidad para sentar a 40 alumnos. Un curso para el que se estima una inscripción de 150 alumnos tiene como patrones de salas válidos 2 salas grandes o 1 sala grande y 2 pequeñas o 4 salas pequeñas.

[1] $\sum_{h\in L_t}\sum_{i\in FS_f}\sum_{p\in G_i} x_{hip} + \sum_{h\in L_{t+1}}\sum_{i\in FS_f}\sum_{p\in G_i} x_{hip} \leq 1 + y_{ft}$

(iv) Esta restricción asegura que se contabilizará la penalidad cuando dos cursos de primer semestre tengan sus exámenes asignados en días consecutivos, y entonces, obliga a que la variable y_{ft} tome valor 1.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(8 puntos)** La Dirección de Postgrado últimamente se ha visto enfrentada a situaciones con alumnos de doctorado que pueden alargar su tesis por demasiado tiempo debido a que los estudiantes se dedican a otros asuntos. Por lo mismo, se han propuesto un plan de apoyo e incentivo a los alumnos para fomentar que terminen lo antes posible sus estudios de doctorado.

Si bien ya tienen formulado un modelo de programación lineal entero-mixta que busca determinar la cantidad de estudiantes de doctorado a asistir considerando el tiempo de permanencia en el programa de cada uno de ellos, aún hay algunas restricciones que falta agregar. En dicho modelo, consideran la variable x_{inj} que representa la cantidad de estudiantes del programa de doctorado $i = 1, \ldots, I$ que van en su n-ésimo semestre ($n = 1, \ldots, N$, con N suficientemente grande) que serán apoyados por el voluntario $j = 1, \ldots, J$. Los encargados registraron en el parámetro $u_{in} \in \mathbb{Z}_0^+$ la cantidad de doctorandos que hay en su n-ésimo semestre en el programa i.

Con la información anterior, formule las siguientes restricciones de forma lineal. Puede definir nuevos parámetros o variables si lo encuentra necesario.

(i) **(2 puntos)** Por asuntos de tiempo, la cantidad de doctorandos que serán apoyados por el voluntario j no puede superar una cantidad C_j.

(ii) **(3 puntos)** Un voluntario debe asistir a alumnos de al menos un programa, pero sólo puede apoyar a alumnos de los programas que tiene permitido. Para ello, se definió el parámetro binario P_{ij} que vale 1 si el voluntario j tiene permitido asistir a alumnos del programa i; y 0 en caso contrario.

(iii) **(3 puntos)** Asegurar que la asignación de alumnos a voluntarios sean tratados según antigüedad en el plan de estudios (First-Come-First-Served).

Solución:

(i) En este caso la restricción se escribe de la siguiente manera.

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{N} x_{inj} \leq C_j \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

(ii) En este caso la restricción se escribe de la siguiente manera.

$$\sum_{n=1}^{N} x_{inj} \leq Q \cdot P_{ij} \qquad \forall i = 1, \ldots, I \qquad j = 1, \ldots, J \qquad Q \gg 0$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{N} x_{inj} \geq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

(iii) En este caso se debe definir una variable binaria α_{in} y un parámetro M suficientemente grande, y la restricción queda de la siguiente manera.

$$\sum_{j=1}^{J} x_{inj} \leq M\alpha_{in} \qquad \forall i = 1, \ldots, I \qquad \forall n = 1, \ldots, N-1$$

$$\sum_{m=n+1}^{N} \left(u_{im} - \sum_{j=1}^{J} x_{imj} \right) \leq M(1 - \alpha_{in}) \qquad \forall i = 1, \ldots, I \qquad \forall n = 1, \ldots, N-1$$

(b) **(8 puntos)** Una empresa debe planificar la producción de sus J productos para los próximos T períodos. La producción de cada uno de estos productos tiene un costo fijo por producir cualquier cantidad del producto j en el periodo t de F_{jt} y un costo unitario de producción de C_{jt}. Además la empresa sabe que hay una demanda por D_{jt} por el producto j en el período t la cual debe suplir. También empresa tiene una bodega en la cual puede guardar inventario con un costo B_{jt}, para el producto j en el período t, con una capacidad máxima de V metros cúbicos. Cada uno de los J productos ocupa un volumen de v_j metros cúbicos en la bodega. Finalmente, hay ciertos productos que no se pueden producir en el mismo período t que el producto j, los cuales están definidos en el conjunto $I_j \subset J$.

Formule un modelo de programación lineal entera mixta que minimice los costos de producción para la empresa.

Solución:

Índices:

j: producto

t: período

Parámetros:

F_{jt}: Costo fijo por producir el producto j en el período t.

C_{jt}: Costo unitario por producir el producto j en el período t.

D_{jt}: Demanda por el producto j en el período t.

B_{jt}: Costo por cada unidad del producto j guardada en inventario en el período t.

v_j: Metros cúbicos que usa en la bodega una unidad del producto j.

V: Capacidad máxima de metros cúbicos en la bodega.

I_j: Conjunto de productos que son incompatibles de producir junto al producto j.

Variables:

x_{jt}: Cantidad a producir del producto j en el periodo t.

α_{jt}: $\begin{cases} 1, \text{ si el producto } j \text{ se produce en el período } t \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

G_{jt}: Cantidad de producto j a guardar en bodega al término del período t.

Función objetivo: minimizar el costo total

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} F_{jt}\alpha_{jt} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} C_{jt}x_{jt} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} B_{jt}G_{jt}$$

Restricciones:

R1) Satisfacción de demanda en cada período (y de paso, conservación de flujo).

$$x_{jt} + G_{jt-1} = D_{jt} + G_{jt} \quad \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T.$$

$$x_{jt} = D_{jt} + G_{jt} \quad \forall j = 1, \ldots, J; t = 1.$$

R2) Respetar la capacidad de la bodega.

$$\sum_{j=1}^{J} v_j G_{jt} \leq V \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

R3) Relación entre variables (con $M \ggg 0$).

$$x_{jt} \leq M\alpha_{jt} \quad \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T.$$

R4) Asegurar que no existen producciones incompatibles de productos (con $M \ggg 0$).

$$\alpha_{jt} + \frac{\sum_{l=1:l\in I_j}^{J} \alpha_{lt}}{M} \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T.$$

R5) Naturaleza variables.

$$\begin{aligned} x_{jt}, G_{jt} &\geq 0 & \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T. \\ \alpha_{jt} &\in \{0, 1\} & \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

Pregunta 3 (15 puntos)

La fábrica de producción de salsas *Chuekibson* necesita planificar la producción de sus J productos para el año 2018. Su administrador *Roderick* conoce que la receta del producto j requiere de $\alpha_{i,j}$ unidades del ingrediente i para producir una unidad del producto j. Los insumo deben ser adquiridos a alguno de los 3 proveedores de la empresa, pero (considere que hay un total de I insumos) se debe tener en cuenta que el abastecimiento de los insumos no es inmediata. En particular, el proveedor A demora un período, el proveedor B demora dos períodos, y el proveedor C demora tres períodos en llevar el insumo hasta la fábrica. Los costos de compra del insumo i al proveedor p se encuentran detallados en el parámetro $c_{i,p}$. Adicionalmente, la fábrica puede guardar unidades del insumo i y unidades terminadas del producto j, esto a un costo conocido e igual a β_i y δ_j pesos por unidad, para insumos y unidades terminadas respectivamente.

Por otra parte, la fábrica rival *La Hienita* acaba de quebrar, por lo que en el primer período se pueden comprar pallets en oferta a esta fábrica. Cada uno de estos pallets contiene γ_i unidades del insumo i y θ_j unidades del producto terminado j, y son ofrecidos a un precio de ρ por cada pallet. Eso sí, si la empresa compra en esta oferta debe comprar al menos K pallets, considerando que en total existen μ pallets disponibles.

Adicionalmente, la producción del producto j requiere de un período de trabajo, por lo que los productos mandados a producir el día t se encontrarán disponibles recién para el día $t + 1$. Los costos unitarios de producción del producto j son de a_j.

En este problema se le pida que ayude a Roderick a construir un problema de programación lineal, de tal forma que pueda satisfacer la demanda de d_{jt} unidades del producto j para el período t al menor costo posible en los próximos T días, sabiendo que al comienzo del día inicial ($t = 1$) no hay pedidos solicitados de insumos ni existe inventario de insumos ni productos terminados en la fábrica.

Solución:

Índices:

- i: insumo

j: producto

t: período

p: proveedor

Parámetros:

c_{ip}: Costo unitario del insumo i mediante el proveedor p.

β_i: Costo unitario de almacenaje del insumo i.

δ_j: Costo unitario de almacenaje del producto terminado j.

ρ: Costo de la compra de un pallet de insumos y producto terminado.

γ_i: Cantidad de unidades del insumo i por pallet.

θ_j: Cantidad de unidades del producto terminado j por pallet.

μ: Cantidad de pallets disponibles.

α_{ij}: Cantidad de unidades del insumo i requeridas para producir una unidad del producto j.

d_{tj}: Demanda del producto j en el período t.

Variables:

X_{itp}: Cantidad a comprar del insumo i en el período t mediante el proveedor p.

I_{it}: Cantidad de insumo i a guardar en bodega al término del período t.

Z_{jt}: Cantidad de producto j a guardar en bodega al término del período t.

U_0: Cantidad de pallets a comprar en el primer período.

V: $\begin{cases} 1, \text{ si se decide comprar pallets.} \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

W_{jt}: Cantidad de unidades del producto j a producir en el período t.

Función objetivo: minimizar el costo total

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{p\in\{A,B,C\}} \sum_{i=1}^{I} c_{ip} X_{itp} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} \beta_i I_{it} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \delta_j Z_{jt} + \rho U_0$$

Restricciones:

R1) Restricción de inventario para insumos.

$$I_{i,t-1} + X_{i,t-1,A} + X_{i,t-2,B} + X_{i,t-3,C} = \sum_j \alpha_{ij} W_{jt} + I_{it} \quad \forall i = 1,\ldots,I; t = 4,\ldots,T.$$

$$\gamma_i U_0 = \sum_j \alpha_{ij} W_{j1} + I_{i1} \quad \forall i = 1,\ldots,I.$$

$$I_{i,1} + X_{i,1,A} = \sum_j \alpha_{ij} W_{j2} + I_{i2} \quad \forall i = 1,\ldots,I.$$

$$I_{2,i} + X_{i,2,A} + X_{i,1,B} = \sum_j \alpha_{ij} W_{j3} + I_{i3} \quad \forall i = 1,\ldots,I.$$

R2) Restricción de inventario de producto terminado.

$$Z_{j,t-1} + W_{j,t-1} = d_{jt} + Z_{jt} \quad \forall j = 1, \ldots, J; t = 2, \ldots, T.$$

$$\theta_j U_0 = d_{j1} + Z_{j1} \quad \forall j = 1, \ldots, J.$$

R3) Respetar la cantidad máxima de pallets que se pueden comprar a la competencia.

$$U_0 \leq \mu V$$

R4) Garantizar que si se compra un pallet a la competencia se deben comprar al menos K pallets.

$$KV \leq U_0$$

R5) Naturaleza variables.

$$\begin{aligned} X_{itp} &\geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; p \in \{A, B, C\}; t = 1, \ldots, T. \\ I_{it} &\geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T. \\ Z_{jt}, W_{jt} &\geq 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, J; t = 1, \ldots, T. \\ V &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Pregunta 4 (15 puntos)

Cada día laboral, Metro de Santiago debe estar completamente operativo a las 6am. Para lograr esto, debe movilizar a Conductores de Trenes (listados en el conjunto CT), Jefes de Estación (listados en el conjunto JE), Vigilantes (listados en el conjunto V), Guardias (listados en el conjunto G) y Cajeros (listados en el conjunto C) desde sus hogares hasta las distintas Estaciones (listados en el conjunto E), donde deben iniciar su jornada.

La distancia, en minutos, entre las distintas estaciones se encuentra en el parámetro d_{ij}, la distancia entre la casa k –en la que vive uno de los trabajadores de Metro de Santiago– a la estación e se encuentra en el parámetro h_{ek}, y la distancia entre casas de trabajadores de Metro se encuentra en el parámetro ρ_{kv}. Además, la información sobre qué labor cumple el trabajador que vive en la casa k en Metro de Santiago se encuentra en el parámetro binario β_{kl}, que toma valor 1 si en la casa k vive un trabajador que realiza la labor l (considere que las labores que realiza el personal de Metro de Santiago son las descritas en el párrafo anterior), y la cantidad de personal que realiza la labor l y que es requerido en la estación e es f_{le}.

Para esto cuenta con un contrato marco de servicio de radio taxi (único proveedor), en el que se establece que se cancela por tiempo de uso de cada radio taxi (costo lineal de g unidades monetarias por cada minuto de viaje) y por la cantidad de taxis utilizados (costo lineal de c unidades monetarias), cada uno con capacidad máxima de 4 pasajeros (además del conductor del radio taxi, que no es personal de Metro de Santiago). Se sabe que este proveedor tiene suficiente oferta para disponer en todo momento de todos los taxis que se requieran (asuma entonces que un mismo taxi se usa solamente una vez al día). El contrato también estipula que, en caso de que la cantidad de taxis que Metro de Santiago utiliza sea más que delta δ, entonces Metro de Santiago deberá cancelar un adicional por un valor de R unidades monetarias.

Se sabe que los turnos de mañana de cada trabajador pueden iniciar en cualquier momento entre las 4 : 30am y las 10am. Por lo que solo se debe asignar taxis a quienes deben comenzar su jornada antes de las 6am, que son todos los trabajadores, con la excepción de los Conductores de Trenes, que por Contrato Colectivo pueden entrar a trabajar hasta las 7am (lo que implica que para ellos el horario es un poco más extendido en su duración).

Asumiendo que todo el personal antes descrito debe llegar en taxi a la estación de trabajo, que los taxis parten todos desde la estación 1, y que primero se recogen todos los pasajeros y después se dejan en las estaciones correspondientes, responda las siguientes preguntas.

(a) **(8 puntos)** Formule a continuación un modelo de optimización lineal para minimizar los costos asociados al contrato marco. Explique claramente sus variables de decisión, supuestos y restricciones utilizadas.

(b) **(4 puntos)** Considere ahora que desde el Sindicato de Conductores de Trenes están amenazando con irse a paro, ya que hay muchos de sus socios que en sus traslados a su lugar de trabajo se están demorando más del doble que si fueran directo desde sus hogares. Actualice su modelo para evitar esta situación (solo escriba lo nuevo o modificado, indicando claramente todo lo que se mantiene del modelo que planteó en la parte (a)).

(c) **(3 puntos)** Ahora, considere que el Gerente de Operaciones está preocupado por los altos costos de este contrato marco, por lo que exige que para los cargos subcontratados (Guardias y Cajeros), los taxis que se usen siempre recojan a 4 pasajeros y para los cargos Vigilantes y Jefes de Estación sea un mínimo de 3. Actualice nuevamente su modelo para incorporar este requerimiento (solo escriba lo nuevo o modificado, indicando qué se mantiene del modelo que planteó an las partes (a) y (b)).

(d) **(3 puntos)** Finalmente, por un conflicto con vendedores ambulantes y personal de Metro de Santiago que se volvió viral de manera negativa para la empresa y que significó despidos de varios funcionarios, hizo que los ánimos no sean de los mejores entre los trabajadores de Metro de Santiago. Debido a esto, se requiere que no se asigne a un taxi los siguientes pares de cargos: Vigilante-Guardia, Cajero-Jefe de Estación. Actualice su modelo para incorporar este nuevo (y último) requerimiento (solo escriba lo nuevo o modificado, indicando qué se mantiene del modelo que planteó en las partes (a), (b) y (c)).

Solución:

(a) El modelo considera:

Conjuntos

- Casas: $K = CT \cup JE \cup V \cup G \cup C\}$
- Posiciones: $J = \{1, 2, 3, 4\}$
- Taxis: $T = \{1, \ldots, |K|\}$
- Labor: $L = \{1, \ldots, |L|\}$

Variables:

- x_{kt}^{j} variable binaria que vale 1 si el pasajero que vive en la casa $k \in K$ fue el j-ésimo ($j \in J$) pasajero en ser recogido por el taxi $t \in T$; 0 si no.
- y_{kt}^{je} variable binaria que vale 1 si el pasajero que vive en la casa $k \in K$ fue el j-ésimo ($j \in J$) pasajero en ser dejado en la estación $e \in E$ por el taxi $t \in T$; 0 si no.
- α, variable binaria que vale 1 si se paga multa; 0 si no.
- η_{kvt}^{j}, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ va de la casa $k \in K$ a la casa $v \in K$ en el j-ésimo lugar ($j = 1, \ldots, 3$); 0 si no.
- μ_{eit}^{j}, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ va de la estación $e \in E$ a la estación $i \in E$ en el j-ésimo lugar ($j = 1, \ldots, 3$); 0 si no.

- w_{ket}, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ va de la casa $k \in K$ a la estación $e \in E$; 0 si no.
- β_t^j, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ recogió $j \in J$ pasajeros.

RESTRICCIONES:

(R1) Todo pasajero es recogido

$$\sum_{t \in T} \sum_{j \in J} x_{kt}^j = 1 \qquad \forall k \in K$$

(R2) Todo pasajero es dejado.

$$\sum_{e \in E} \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} y_{kt}^{je} = 1 \qquad \forall k \in K$$

(R3) Todo pasajero debe ser recogido y dejado por el mismo taxi.

$$\sum_{j \in J} x_{kt}^j = \sum_{e \in E} \sum_{j \in J} y_{kt}^{je} \qquad \forall k \in K \qquad \forall t \in T$$

(R4) Activar la variable α.

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in K} x_{kt}^1 - \delta \leq M\alpha \qquad M \gg 0$$

(R5) Llenar las posiciones de los taxis en orden.

$$\sum_{k \in K} x_{kt}^j \geq \sum_{k \in K} x_{kt}^{j+1} \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{e \in E} y_{pt}^{je} \geq \sum_{k \in K} \sum_{e \in E} y_{kt}^{j+1,e} \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 1, 2, 3$$

(R6) Satisfacer demanda laboral en estaciones.

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in K : \beta_{kl} = 1} \sum_{j \in J} y_{kt}^{je} = f_{le} \qquad \forall e \in E \qquad \forall l \in L$$

(R7) Construcción de variable η_{kvt}^j.

$$\eta_{kvt}^j \geq x_{kt}^j + x_{vt}^{j+1} - 1 \qquad \forall k, v \in K : k \neq v \qquad \forall j = 1, 2, 3 \qquad \forall t \in T$$

(R8) Construcción de variable μ_{eit}^j.

$$\mu_{eit}^j \geq \sum_{k \in K} y_{kt}^{je} + \sum_{k \in K} y_{kt}^{j+1,i} - 1 \qquad \forall e, i \in E \qquad \forall j = 1, 2, 3 \qquad \forall t \in T$$

(R9) Construcción de la variable w_{ekt}.

$$w_{ekt} \geq x_{kt}^j + \sum_{\theta \in K} y_{\theta t}^{1,e} - 1 - M(1 - \beta_t^j) \qquad \forall e \in E \qquad \forall j \in J \qquad \forall k \in K \qquad \forall t \in T$$

(R10) Construir variable β_t^j.

$$\beta_t^j \geq \sum_{k \in K} x_{kt}^j - \sum_{k \in K} x_{kt}^{j+1} \qquad \forall j = 1, 2, 3 \qquad \forall t \in T$$

$$\beta_t^4 \geq \sum_{k \in K} x_{kt}^4 \qquad \forall t \in T$$

(R11) Respetar hora de llegada máxima.

$$\sum_{k\in K} h_{1,k}x^1_{kt} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k\in K}\sum_{v\in K:k\neq v} \rho_{kv}\eta^j_{kvt} + \sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{e\in E}\sum_{i\in E:i\neq e} d_{ei}\mu^j_{eit} \leq Tmax \qquad \forall t \in T$$

(R12) Naturaleza de variables.

$$\begin{array}{rll} x^j_{kt} & \in \{0,1\} & \forall k \in K; j \in J; t \in T. \\ y^{je}_{kt} & \in \{0,1\} & \forall k \in K; j \in J; t \in T; e \in E. \\ \alpha & \in \{0,1\} & \\ \eta^j_{kvt} & \in \{0,1\} & \forall k, v \in K; j \in J; t \in T. \\ \mu^j_{eit} & \in \{0,1\} & \forall e, i \in E; j \in J; t \in T. \\ w_{ket} & \in \{0,1\} & \forall k \in K; e \in E; t \in T. \\ \beta^j_t & \in \{0,1\} & \forall j \in J; t \in T. \end{array}$$

Función objetivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & R\alpha + c\left[\sum_{t\in T}\sum_{k\in K} x^1_{kt}\right] + g\left[\sum_{t\in T}\left(\sum_{k\in K} h_{1,k}x^1_{kt} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k\in K}\sum_{v\in K:k\neq v}\rho_{kv}\eta^j_{kvt}\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{e\in E}\sum_{i\in E:i\neq e} d_{ei}\mu^j_{eit}\right)\right] \end{aligned}$$

(b) Garantizar que los conductores demoran menos del doble de tiempo de viaje en taxi compartido que directo.

$$\sum_{\theta=b}^{3}\sum_{k\in K}\sum_{v\in K:k\neq v}\rho_{kv}\eta^\theta_{kvt} + \sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} + \sum_{\theta=1}^{j-1}\sum_{e\in E}\sum_{i\in E:i\neq e} d_{ei}\mu^\theta_{eit} \leq 2h_{mn} + M\left(1-y^{jm}_{nt}\right) + M\left(1-x^b_{nt}\right)$$
$$\forall n \in CT \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 2,3,4 \qquad \forall b = 1,2,3 \qquad \forall m \in E$$

$$\sum_{\theta=b}^{3}\sum_{k\in K}\sum_{v\in K:k\neq v}\rho_{kv}\eta^\theta_{kvt} + \sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} \leq 2h_{mn} + M\left(1-y^{jm}_{nt}\right) + M\left(1-x^b_{nt}\right)$$
$$\forall n \in CT \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 1 \qquad \forall b = 1,2,3 \qquad \forall m \in E$$

$$\sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} + \sum_{\theta=1}^{j-1}\sum_{e\in E}\sum_{i\in E:i\neq e} d_{ei}\mu^\theta_{eit} \leq 2h_{mn} + M\left(1-y^{jm}_{nt}\right) + M\left(1-x^b_{nt}\right)$$
$$\forall n \in CT \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 2,3,4 \qquad \forall b = 4 \qquad \forall m \in E$$

$$\sum_{e\in E}\sum_{k\in K} h_{ke}w_{ket} \leq 2h_{mn} + M\left(1-y^{jm}_{nt}\right) + M\left(1-x^b_{nt}\right)$$
$$\forall n \in CT \qquad \forall t \in T \qquad \forall j = 1 \qquad \forall b = 4 \qquad \forall m \in E$$

(c) Se deben agregar las siguientes variables:

- q_t, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ lleva al menos un guardia o cajero; 0 si no.
- z_t, variable binaria que vale 1 si el taxi $t \in T$ lleva al menos un vendedor o jefe de estación; 0 si no.

y las siguientes restricciones:

(i) Construir las variable.

$$q_t \geq \frac{\sum_{j\in J}\sum_{k\in G\cup C} x^j_{kt}}{M} \qquad \forall t \in T$$

$$z_t \geq \frac{\sum_{j\in J}\sum_{k\in V\cup JE} x^j_{kt}}{M} \qquad \forall t \in T$$

(ii) Asegurar cantidad máxima en cada taxi.

$$q_t \leq \sum_{k \in G \cup C} x_{kt}^4 \qquad \forall t \in T$$

$$z_t \leq \sum_{k \in V \cup JE} x_{kt}^3 \qquad \forall t \in T$$

(iii) Naturaleza de variables.

$$\begin{aligned} q_t &\in \{0,1\} \quad \forall t \in T. \\ z_t &\in \{0,1\} \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

(d) Se debe agregar la siguiente restricción:

$$1 - \frac{\sum_{j \in J} \sum_{k \in G} x_{kt}^j}{4} \geq x_{vt}^s \qquad \forall v \in V \qquad \forall s \in J \qquad \forall t \in T$$