PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 1
Profesores: R. Cuadrado - J. González
G. Méndez - S. Vásquez
F. Verástegui

Interrogación 2

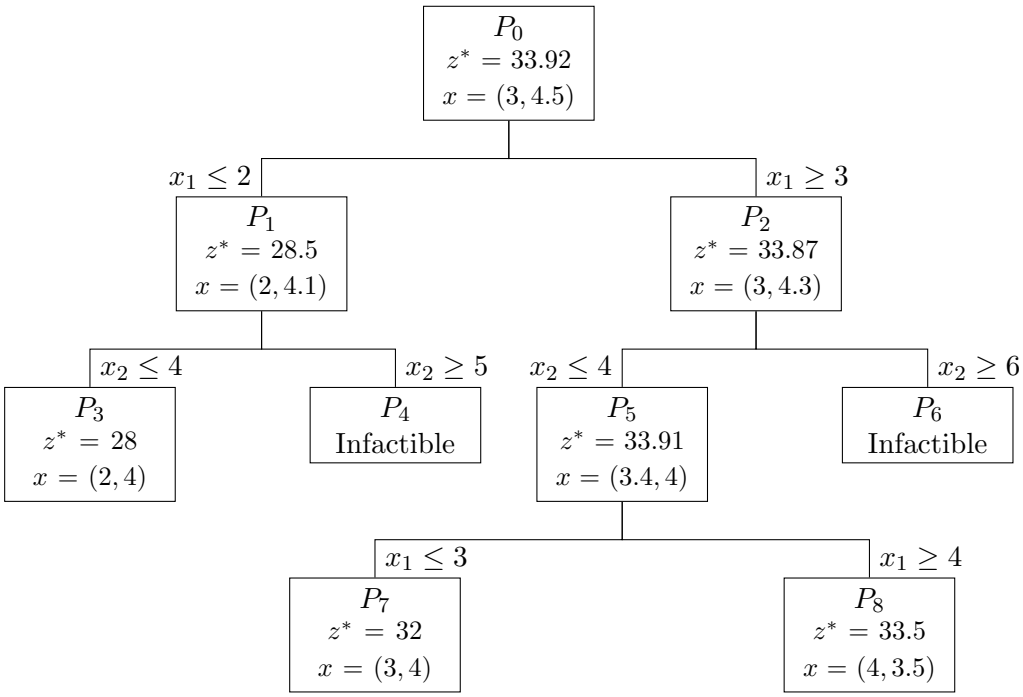
Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

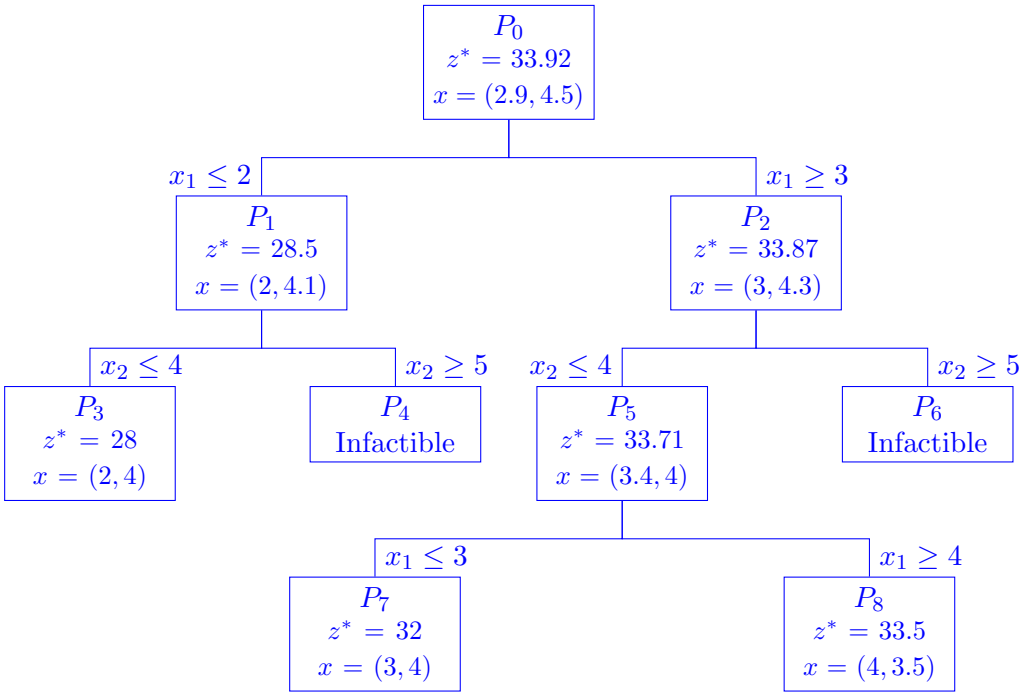
Pregunta 1 (20 puntos)

(a) (i) **(4 puntos)** Suponga que se ha resuelto parcialmente un problema de máximización de programación entera mediante B&B. Sea el siguiente árbol de resolución:



P_8 es el único nodo que no se ha ramificado hasta el momento. La información que se presenta no está 100 % correcta. Identifique los tres valores incorrectos o inconsistentes dentro del árbol.

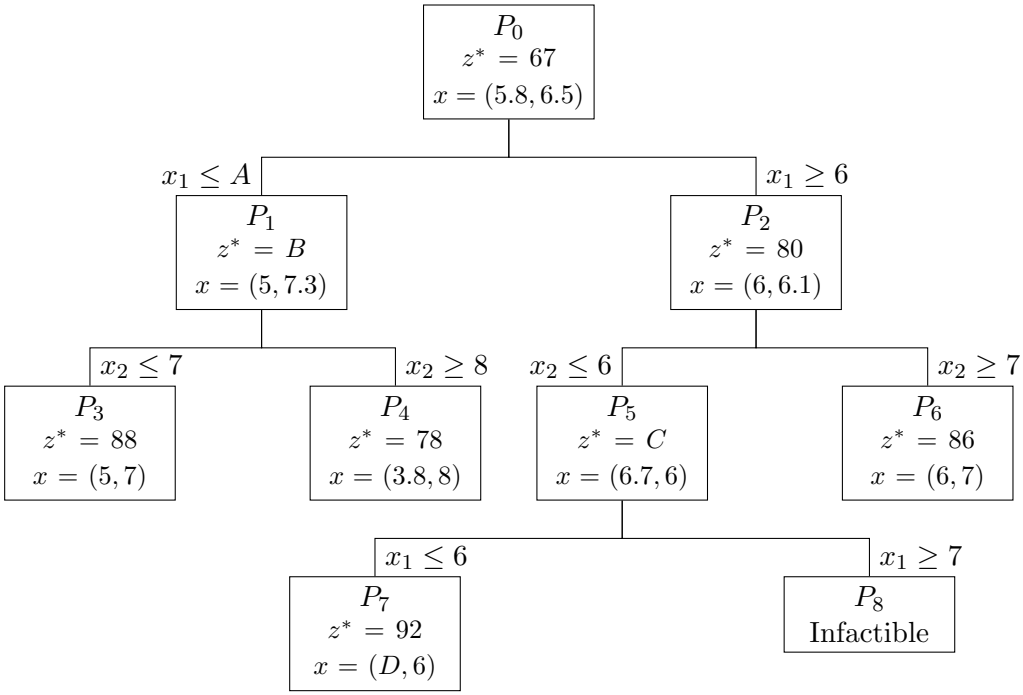
Solución: El árbol correcto es el siguiente:



La información incorrecta o inconsistente es la siguiente:

- ◇ En P_0, la variable x_1 es entera, pero se ramifica en la misma, lo cual no puede ser.
- ◇ El valor óptimo del nodo P_5 es mayor que el del nodo P_2, lo cual no puede ocurrir en un árbol de máximización.
- ◇ La ramificación de P_2 no es correcta, pues la restricción que se agrega a P_6 debiese ser $x_2 \geq 5$ dado que $x_2^* = 4.3$.

(ii) **(6 puntos)** Suponga que ha resuelto parcialmente otro problema de programación entera mediante B&B. Sea el siguiente árbol de resolución, en donde los nodos se fueron resolviendo sucesivamente desde P_0 hasta P_8:



1) ¿El problema es de maximización o minimización? Justifique.

2) Indique el rango de valores que puede tomar cada incógnita (A, B, C, D) dentro del árbol.

3) ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior al valor óptimo?

Solución:

1) Minimización. El valor de la F.O. va aumentando a medida que se avanza en el árbol.
2) $A = 5$, $67 \leq B \leq 78$, $80 \leq C \leq 86$ (es 86 pues si hubiese tomado algún valor entre 86 y 92, no se ramificaría debido a que sería peor que el incumbente en ese momento), $D = 6$.
3) $78 \leq z^E \leq 86$

(b) Sea S un conjunto de puntos definido por

$$S = \{x \in \{0,1\}^4 : 90x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 25x_4 \leq 138\}.$$

(i) **(2 puntos)** Muestre que los cortes

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2 \quad (2)$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2 \quad (3)$$

son válidos para S.

Solución:
Los conjuntos $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, y $\{1,3,4\}$ son cubrimientos de S. Por ende, $(1)-(3)$ son cortes válidos.

(ii) **(2 puntos)** Sea S_L la relajación continua de S. Muestre que los cortes $(1)-(3)$ remueven soluciones fraccionarias de S_L.

Solución:
Los puntos $x^\top = (k,1,1,1)$, con $k \in (0, 52/90]$, pertenecen a S_L pero violan cada uno de los cortes $(1)-(3)$.

(iii) **(4 puntos)** Sea $S' = \{x \in \{0,1\}^4 : (1)-(3)\}$. Si S'_L es la relajación continua de S', demuestre que $S'_L \subseteq S_L$.

Solución:
Notemos que si $x \in S'_L$, sumando (1) y (3) se obtiene que

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4.$$

Multiplicando esta desigualdad por 13, obtenemos que

$$26x_1 + 13x_2 + 26x_3 + 13x_4 \leq 52.$$

Si sumamos (2) multiplicada por 12, obtenemos que

$$38x_1 + 25x_2 + 26x_3 + 25x_4 \leq 76.$$

Finalmente, tenemos que

$$90x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 25x_4 \leq 76 + 52x_1 + 10x_2 \leq 138,$$

por lo que $x \in S_L$. Luego, $S'_L \subseteq S_L$.

(iv) **(2 puntos)** Concluya que $S'_L \subsetneq S_L$, es decir, la inclusión es estricta.

Solución:
Tomando las conclusiones de (ii) y (iii), tenemos que $S_L \neq S'_L$ y que $S'_L \subseteq S_L$. Por ende, $S'_L \subsetneq S_L$.

Pregunta 2 (16 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{rl} max & -q^T z \\ s.a. & Bz \leq q \\ & z \geq 0 \end{array}$$

donde $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}$, y $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $c, b \in \mathbb{R}^m$ y $x, y \in \mathbb{R}^m$.

(a) **(6 puntos)** Escriba el problema dual asociado.

Solución:
El problema primal extendido corresponde a:

$$\begin{array}{rll} max & -c^T x + b^T y & \\ s.a. & Ay & \leq c \\ & -A^T x & \leq -b \\ & x, y \geq 0 & \end{array}$$

Introduciendo vectores duales u y v, podemos escribir el problema dual como:

$$\begin{array}{rll} min & c^T u - b^T v & \\ s.a. & A^T u & \geq b \\ & -Av & \geq -c \\ & u, v \geq 0 & \end{array}$$

(b) **(6 puntos)** Muestre que la solución óptima del problema dual esta dada por la solución óptima del problema primal, es decir, son equivalentes.

Solución:
Cambiando de minimización a maximización, e invirtiendo el signo en ambas restricciones, vemos que el problema dual es equivalente a:

$$\begin{array}{rll} max & -c^T u + b^T v & \\ s.a. & -A^T u & \leq -b \\ & Av & \leq c \\ & u, v \geq 0 & \end{array}$$

Este problema es claramente equivalente al problema primal. Luego, la solución óptima del problema primal corresponderá a la misma asignación de valores para los vectores x e y, como la asignación óptima para los vectores u y v en el dual.

(c) **(4 puntos)** Muestre que si el problema primal es factible, entonces necesariamente tiene solución óptima.

Solución:
Por un lado, si el problema primal tiene solución óptima, inmediatamente se concluye que debe ser factible.

Por otro lado, si el problema primal es factible, debemos demostrar que al mismo tiempo debe ser acotado. Con esto, queda garantizada la existencia de una solución óptima según el teorema de Bolzano-Weierstrass para problemas de optimización lineal. Si se tiene un problema primal factible, esto es equivalente a afirmar que existe una asignación de valores $(\hat{x}, \hat{y})$ tal que:

$$\begin{array}{ll} A\hat{y} & \leq c \\ -A^T\hat{x} & \leq -b \\ \hat{x}, \hat{y} \geq 0 & \end{array}$$

Notemos que tanto $\hat{x}$ como $\hat{y}$ son vectores no-negativos. Multiplicando ambas desigualdades por la derecha por $\hat{x}$ y $\hat{y}$, respectivamente, se tiene:

$$\begin{array}{ll} (A\hat{y})\hat{x} & \leq c^T\hat{x} \\ -(A^T\hat{x})\hat{y} & \leq -b^T\hat{y} \end{array}$$

Sumando ambas desigualdades:

$$\begin{aligned} (A\hat{y})\hat{x} - (A^T\hat{x})\hat{y} &\leq c^T\hat{x} - b^T\hat{y} \\ (A\hat{y})\hat{x} - (\hat{x}^TA)\hat{y} &\leq c^T\hat{x} - b^T\hat{y} \\ (A\hat{y})\hat{x} - \hat{x}(A\hat{y}) &\leq c^T\hat{x} - b^T\hat{y} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos una cota inferior para una expresión análoga a la función objetivo. Reordenando:

$$0 \leq c^T\hat{x} - b^T\hat{y}$$

lo que evidentemente equivale a:

$$-c^T\hat{x} + b^T\hat{y} \geq 0$$

Con esto, vemos que si el problema es factible, la función objetivo de maximización tiene cota superior. Luego el problema tiene solución óptima.

Alternativamente, al ya haber demostrado la equivalencia entre el primal y dual, luego si el problema primal es factible necesariamente también el problema dual lo será. Luego usando el Teorema Débil de la dualidad podemos descartar que alguno de los problemas pueda ser no acotado. Por último, al tener que el domino es cerrado y tenemos un problema de programación lineal acotado, necesariamente tendrá solución óptima.

Pregunta 3 (24 puntos)

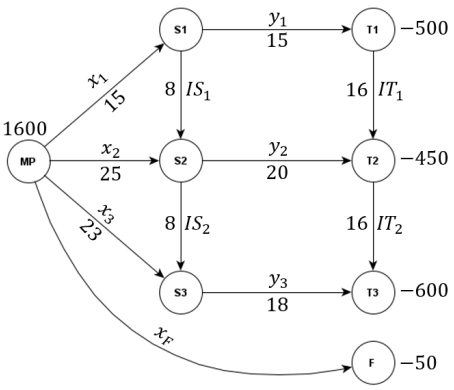
El proceso de fabricación de un determinado producto requiere de dos operaciones sucesivas, operación I (producto semiterminado) y operación II (producto terminado). En la siguiente tabla se proporciona los datos de las demandas, capacidades y costos de producción correspondientes a los meses de julio, agosto, y septiembre.

	Julio	Agosto	Septiembre
Demanda producto terminado (unidades)	500	450	600
Capacidad de operación I (horas)	500	400	350
Capacidad de operación II (horas)	600	500	400
Costo en operación I ($ por unidad)	15	25	23
Costo en operación II ($ por unidad)	15	20	18

Se cuenta con un total de 1600 unidades de materia prima para fabricar productos semiterminados, las cuales se pueden ocupar durante estos tres meses. Las unidades sobrantes al final del programa de producción, se pierden (se pueden botar con costo cero).
La producción de una unidad de producto, requiere un cuarto de hora en la operación I y un tercio de hora en la operación II.
Se permite sobreproducir unidades y guardarlas en inventario. Los costos de inventario para el producto semiterminado y terminado son de $8 y $16, respectivamente, por unidad por mes. Para el producto semiterminado y para el producto terminado, no existe inventario inicial y tampoco pueden quedar unidades en inventario al terminar el programa de producción (i.e. inventario inicial igual a cero para julio y octubre, respectivamente).

(a) **(10 puntos)** Formule el problema como un problema de flujo a costo mínimo con capacidad. Presente modelamiento matemático y dibujo del grafo, asegurándose de que esté balanceado.

Solución: Se tiene un exceso de oferta de 50 unidades, por lo que se crea un nodo ficticio F con demanda igual de $b_F = -50$. La red balanceada queda de la siguiente forma:



Notación en el grafo:
MP: Materia Prima, S_i: Producto semiterminado en el mes i, T_i: Producto terminado en el mes i.

Variables de Decisión:
x_i: Unidades de materia prima a utilizar para fabricar unidades de producto semiterminado en el mes $i = 1, 2, 3, F$.
y_i: Unidades de producto semiterminado a utilizar para fabricar unidades de producto terminado en el mes $i = 1, 2, 3$.
IS_i: Unidades de producto semiterminado en inventario guardados al final del mes $i = 1, 2$.
IT_i: Unidades de producto terminado en inventario guardados al final del mes $i = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \text{mín} \quad & 15x_1 + 25x_2 + 23x_3 + 15y_1 + 20y_2 + 18y_3 + 8(IS_1 + IS_2) + 16(IS_1 + IT_2) \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_F = 1600 \\
& -x_1 + y_1 + IS_1 = 0 \\
& -x_2 - IS_1 + y_2 + IS_2 = 0 \\
& -x_3 - IS_2 + y_3 = 0 \\
& -y_1 + IT_1 = -500 \\
& -y_2 - IT_1 + IT_2 = -450 \\
& -y_3 - IT_2 = -600 \\
& -x_F = -50 \\
& x_1 \leq 2000 \\
& x_2 \leq 1600 \\
& x_3 \leq 1400 \\
& y_1 \leq 1800 \\
& y_2 \leq 1500 \\
& y_3 \leq 1200 \\
& x, y, IS, IT \geq 0
\end{aligned}
$$

(b) **(3 puntos)** Suponga que no se puede fabricar valores fraccionales de productos semiterminado y terminado. Sin embargo, usted sabe que el problema no necesita restricciones de integralidad. Justifique.

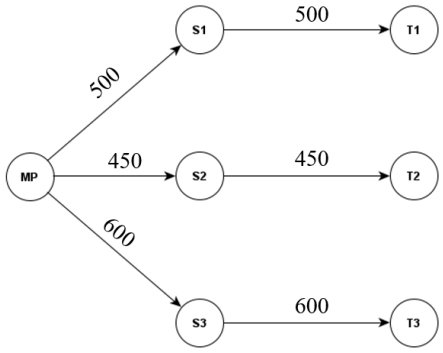
Solución: El problema cumple con el teorema de integralidad de flujos ya que las demandas generalizadas y las cotas superiores e inferiores son valores enteros. Por lo tanto, al resolver su relajación lineal, se obtiene una solución óptima entera.

(c) **(2 puntos)** Muestre que las restricciones de capacidad son redundantes.

Solución: En julio, se puede producir toda la demanda para los tres meses, que corresponde a 1550 unidades, se cumplen las restricciones $x_1 \leq 2000$ y $y_1 \leq 1800$. En agosto, se puede producir toda la demanda para los dos meses restantes, que corresponde a 1050 unidades, se cumplen las restricciones $x_2 \leq 1600$ y $y_2 \leq 1500$. En septiembre, se puede producir toda la demanda restante de este mismo mes, que corresponde a 600 unidades, se cumplen las restricciones $x_3 \leq 1400$ y $y_3 \leq 1200$.

(d) **(4 puntos)** El jefe de producción recomienda satisfacer toda la demanda directamente en cada mes, sin guardar nada en inventario. En otras palabras, la política de producción sería: 500, 450, y 600 unidades de materia prima usadas para producto semiterminado en los meses de julio, agosto, y septiembre, respectivamente, y, 500, 450, y 600 unidades de producto semiterminado usadas para producto terminado en los meses de julio, agosto, y septiembre, respectivamente.
El jefe de producción indica que esta solución es la óptima. Usted, como ingeniero que conoce las herramientas de optimización para flujo en redes, indica que esa afirmación es incorrecta. Justifique matemáticamente por qué la solución propuesta es suboptimal. Ignore las restricciones de capacidad.

Solución: A modo de simplicidad, y ya que el nodo ficticio solo está conectado con un único nodo de oferta, quitaremos el nodo ficticio de la red (sabiendo que siempre pasarán 50 unidades a costo cero). Entonces, la solución del jefe de producción es la siguiente:



Para verificar optimalidad, primero obtengamos las variables duales utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\pi_{MP} - \pi_{S_1} &= 15 \\
\pi_{MP} - \pi_{S_2} &= 25 \\
\pi_{MP} - \pi_{S_3} &= 23 \\
\pi_{S_1} - \pi_{T_1} &= 15 \\
\pi_{S_2} - \pi_{T_2} &= 20 \\
\pi_{S_3} - \pi_{T_3} &= 18
\end{aligned}$$

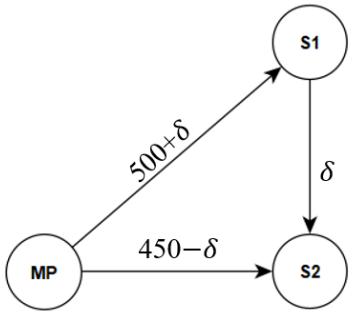
Fijando $\pi_{MP} = 0$, obtenemos, $\pi_{S_1} = -15$, $\pi_{S_2} = -25$, $\pi_{S_3} = -23$, $\pi_{T_1} = -30$, $\pi_{T_2} = -45$, $\pi_{T_3} = -41$.
Se calculan los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{IS_1} &= c_{IS_1} - (\pi_{S_1} - \pi_{S_2}) = 8 - (-15 + 25) = -2 \\
\bar{c}_{IS_2} &= c_{IS_2} - (\pi_{S_2} - \pi_{S_3}) = 8 - (-25 + 23) = 10 \\
\bar{c}_{IT_1} &= c_{IT_1} - (\pi_{T_1} - \pi_{T_2}) = 16 - (-30 + 45) = 1 \\
\bar{c}_{IT_2} &= c_{IT_2} - (\pi_{T_2} - \pi_{T_3}) = 16 - (-45 + 41) = 20
\end{aligned}$$

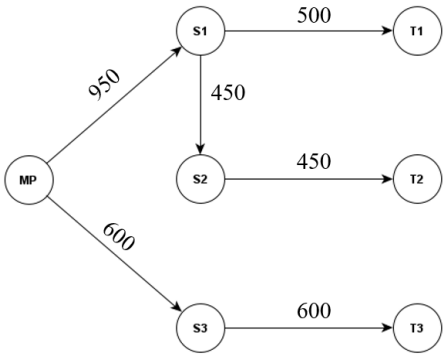
Como uno de los costos reducidos es negativo, la solución propuesta por el jefe de producción no es óptima.

(e) **(5 puntos)** Realice una única iteración de simplex en redes e indique si esta nueva solución obtenida es la óptima. Nuevamente, ignore las restricciones de capacidad.

Solución: Del inciso anterior, se sabe que IS_1 entra a la base. Por lo tanto, tenemos que balancear el siguiente ciclo:



Donde $\delta_{max} = 450$, y la variable x_2 sale de la base. Obtenemos la nueva solución:



Para verificar optimalidad, se obtiene las variables duales utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\pi_{MP} - \pi_{S_1} = 15$$
$$\pi_{MP} - \pi_{S_3} = 23$$
$$\pi_{S_1} - \pi_{T_1} = 15$$
$$\pi_{S_2} - \pi_{T_2} = 20$$
$$\pi_{S_3} - \pi_{T_3} = 18$$
$$\pi_{S_1} - \pi_{S_2} = 8$$

Fijando $\pi_{MP} = 0$, se obtiene, $\pi_{S_1} = -15$, $\pi_{S_2} = -23$, $\pi_{S_3} = -23$, $\pi_{T_1} = -30$, $\pi_{T_2} = -43$, $\pi_{T_3} = -41$.
Se calculan los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{c}_{x_2} = c_{x_2} - (\pi_{MP} - \pi_{S_2}) = 25 - (0 + 23) = 2$$
$$\bar{c}_{IS_2} = c_{IS_2} - (\pi_{S_2} - \pi_{S_3}) = 8 - (-23 + 23) = 8$$
$$\bar{c}_{IT_1} = c_{IT_1} - (\pi_{T_1} - \pi_{T_2}) = 16 - (-30 + 43) = 3$$
$$\bar{c}_{IT_2} = c_{IT_2} - (\pi_{T_2} - \pi_{T_3}) = 16 - (-43 + 41) = 18$$

Como los costos reducidos de las variables no básicas son no negativos, esta nueva solución es óptima.

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas