Pauta I1 (2° semestre, 2010)

ICS1113- Optimización
Sección 4
Profesor Ricardo Guerra

Parte I: (24 pts)

Variables de decisión:

- x_i: $Cantidad\ de\ energía\ consumida\ en\ MW\ proveniente\ de\ la\ fuente\ i$. **1 pto**, restricción de no negatividad asociada: **1 pto.**
- y_{ij}: $Variable\ binaria, decide\ si\ se\ realiza\ el\ proyecto\ j\ aportando\ energía\ de\ la\ fuente$ **2 pts** si queda claro que Y_{ij} puede valer 0 ó 1 dependiendo del caso.

Función Objetivo:

- Minimización de los costos operacionales y de inversión **6 pts.**

$$\sum_{i=1}^{6} p_i x_i + \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{m_i} I_{ij} y_{ij}$$

Restricciones:

- Restricción asociada al límite de capacidad aportado, **4 pts.**

$$x_i \leq \left[C^0_{\ i} + \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} y_{ij} \right] \times (1 - e_i) \quad \text{i=1...6}$$

- La demanda de energía consumida se debe satisfacer, **2 pts** (mayor o igual también se considera correcto).

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = D$$

- Restricción medioambiental concerniente al CO2, **2 pts.**

- Restricción de exclusión de proyectos de "hidroembalse" e "hidropasada", **3 pts.**

$$\sum_{i=1}^{6} k_i \times x_i \leq K$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} \leq 3 \times (1 - y_{11})$$

- Restricción de diversificación de la matriz energética (se consideró bueno poner en el numerador el consumo, pero no en el denominador pues salía 20% capacidad instalada total), **3 puntos.**

$$\frac{\left[C^0{}_i + \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} y_{ij} \right]}{\sum_{i=1}^{6} \left[C^0{}_i + \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij} y_{ij} \right]} \leq 20\% \qquad \text{i=1,...6}$$

- *Restricciones ya mencionadas sobre las variables de decisión:*

$$x_i \geq 0$$
$$y_{ij} \ \ binario$$

Parte II: (20 pts)

1.a) Tenemos el siguiente problema de maximización:

$$\begin{array}{l} P)\ Max\ \ Min\{f(x), g(x), h(x)\} \\ s.a. \\ \qquad d(x) \le \alpha \\ \qquad x \ge 0 \end{array}$$

Por equivalencia, dicho problema es equivalente a resolver:

$$\begin{array}{l} \tilde{P})\ Min\ \ -Min\{f(x), g(x), h(x)\} \\ s.a. \\ \qquad d(x) \le \alpha \\ \qquad x \ge 0 \end{array}$$

Si retocamos la función que está adentro, el problema queda finalmente así:

$$\begin{array}{l} \tilde{P})\ Min\ \ Max\{-f(x), -g(x), -h(x)\} \\ s.a. \\ \qquad d(x) \le \alpha \\ \qquad x \ge 0 \end{array}$$

Las funciones f, g y h son cóncavas, su inverso aditivo es convexo, por lo tanto la función: $Max\{-f(x), -g(x), h(x)\}$ es convexa (teorema de clases, no es necesario demostrarlo).

Además, el dominio es convexo y d(x) es cuasi-convexo (suficiente), luego el problema es convexo. **5 pts.**

1.b) Retomando el problema dejado en 1.a), si aplicamos otra de las equivalencias, llegamos al siguiente problema equivalente:

$$\begin{array}{l} \tilde{P})\ Min\ \ \mu \\ s.a. \\ \qquad d(x) \le \alpha \\ Max\{-f(x), -g(x), -h(x)\} \le \mu \\ \qquad x \ge 0 \end{array}$$

Este último se puede dejar como:

$$\begin{aligned} &\tilde{P})\ Min\ \ \mu \\ &s.a. \\ &\qquad d(x) \le \alpha \\ &\qquad -f(x) \le \mu \\ &\qquad -g(x) \le \mu \\ &\qquad -h(x) \le \mu \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned}$$

Que es diferenciable en el dominio y que cambiando a las fuciones del enunciado queda así:

$$\begin{gathered} Min\ \mu \\ s.a. \\ 2x - 7 \le \mu \\ -2x + 7 \le \mu \\ x^2 \le \mu \\ 20 - x \le \mu \\ d(x) \le \alpha \\ x \ge 0 \end{gathered}$$

3 pts.

(Quienes llegaron correctamente a esto, en la parte a, se les asignó puntaje).

1.c) Se asignó puntaje a aquellos que hayan mencionado dentro de su desarrollo que en un problema convexo, un mínimo local es un mínimo global, **2 pts**.

1.d) Se asignó el puntaje a quienes haya mencionado que solución global es óptima y única, **2 pts.**

2. a)

- La función es **continua**, suma de dos polinomios.
- El dominio es **no vacío**, no tenemos problemas de infactibilidad, el punto $(0,1/2)$ por ejemplo satisface todas las restricciones.
- El **conjunto** de combinaciones factibles X1 y X2 es **cerrado** pues las restricciones que lo definen son con desigualdades del tipo $\le$, contienen los bordes.
- EL **conjunto** además, es **acotado**: Basta con ver por ejemplo que:

$$\boldsymbol{X_2 \ge 0\ y\ X_2 \le 5}$$

Para X1:

$$X_1 \geq 0, -5X_1 + 6 * 5 \geq 3$$

Que poniéndonos en el peor caso para X2 nos queda:

$$\boldsymbol{X_1 \geq 0, \frac{27}{5} \geq X_1}$$

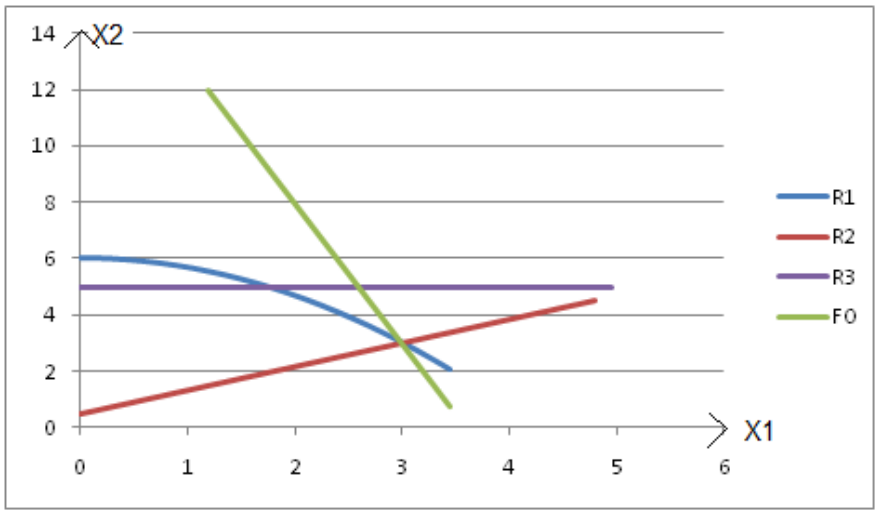
Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, dado que se cumplen las hipótesis de éste, podemos decir que el problema admite al menos una solución óptima.

4 pts.

2. b)

El gráfico queda finalmente así:

$$Recuerde\ que: R1: {X_1}^2 + 3X_2 \leq 18\ , R2:\ -5X_1 + 6X_2 \geq 3, R3: X_2 \leq 5$$



El punto solución es 3,3 y el valor de la función objetivo en dicho punto es 18, **4 pts.**

Parte III: (34 pts)

a) Las iteraciones del Simplex son las siguientes:
(problema hecho como maximización)

x1	x2	h1	h2	h3	
1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	8
-1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	6
2,0	-1,0	0,0	0,0	1,0	4
1	2	0	0	0	0

Iteración 1

Entra **x2** a la base y sale **h2***

*min{8/1,6/1,-}

3 pts

x1	x2	h1	h2	h3	
2,0	0,0	1,0	-1,0	0,0	2
-1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	6
1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	10
3	0	0	-2	0	-12

Iteración 2

Entra **x1** a la base y sale **h1***

*Min{2/2,-,10/1}

3 pts

Iteración 3

x1	x2	h1	h2	h3	
1,0	0,0	0,5	-0,5	0,0	1
0,0	1,0	0,5	0,5	0,0	7,0
0,0	0,0	-0,5	1,5	1,0	9
0,0	0,0	-1,5	-0,5	0,0	-15

Como todos los costos reducidos son menores a cero, estamos en la solución óptima.

3 pts

Valores de las **variables básicas**:

X1= 1

X2= 7

Valor de la **función objetivo**:

Z= 15

1 pto

b) Una de las tres propiedades de las soluciones factibles en un vértice establece que si un vértice es igual o mejor que todas las soluciones factibles en los vértices adyacentes a ella, entonces es igual o mejor que todas las demás soluciones en los vértices, luego es óptima. Por eso, en la práctica, la condición de optimalidad del Simplex exige (problema de maximización) que los costos reducidos de las variables no básicas sean menores o iguales a cero. Con esto, se garantiza que el vértice encontrado es mejor o igual que los vértices adyacentes y por lo tanto es óptimo. **3 pts**

c) Los multiplicadores del simplex asociados a cada restricción son el negativo de los costos reducidos de las variables no básicas, esto es: **1 pto cada una**

$$\pi_1 = 3/2$$
$$\pi_2 = 1/2$$
$$\pi_3 = 0$$

d) Si el lado derecho de la tercera restricción aumenta en tres unidades, no pasa nada, pues usando

$$\Delta F.O. = \pi_i \cdot \Delta b_i$$

se tiene que

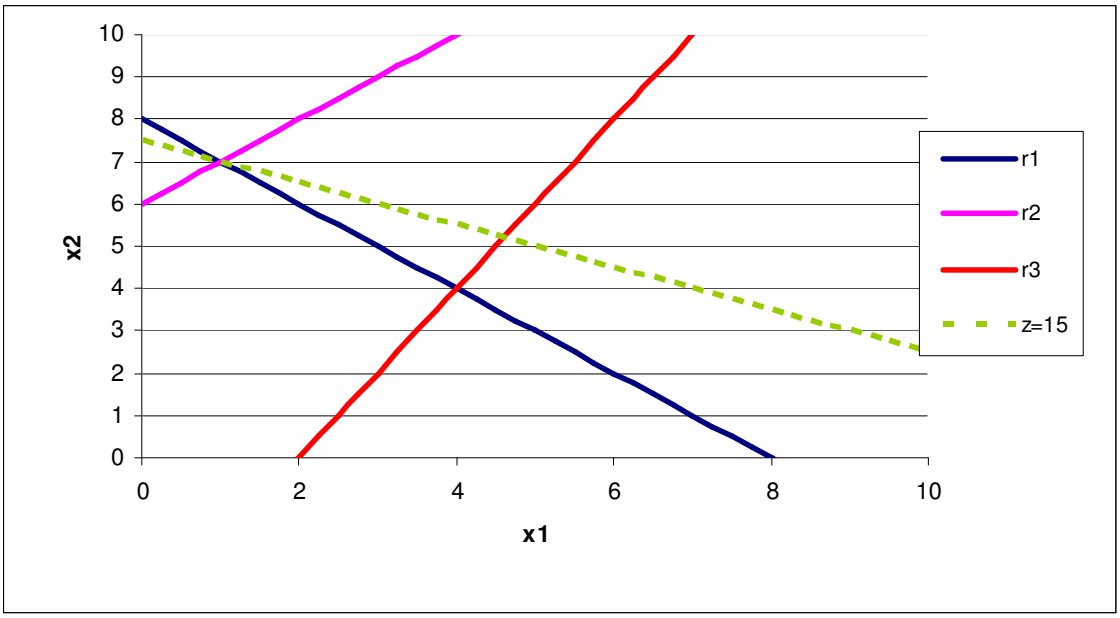
$$\Delta F.O. = 0 \cdot 3 = 0$$ **2 pts**

En cambio, si el lado derecho de la primera restricción aumenta en una unidad,

$$\Delta F.O. = 3/2 \cdot 1 = 3/2$$

la función objetivo aumenta su valor en 3/2 unidades **2 pts**, es decir a 16.5 .

e) Geométricamente el problema se ve de la siguiente forma:



3 pts por el gráfico

Con los vértices:

Iteración 1-> (0,0)

Iteración 2-> (0,6)

Iteración 3-> (1,7)

2 pts por todos los vértices

f) Para que la base óptima no cambie, se tiene que Cr=Cd-Cb*B-1*D<=0, es decir, que todos los costos reducidos sean menores o iguales a cero. Esto se logra solo con

$$-2 < \alpha < 2$$

6 pts

g) El problema va a presentar múltiples soluciones óptimas solamente si

$$\alpha = -2$$

$$\alpha = 2$$

3 pts

Parte IV: (22 pts)

a) El modelo es el siguiente:
Variables:

$$x_1 : cantidad\ de\ plantas\ procesadoras\ tipo\ 1$$
$$x_2 : cantidad\ de\ plantas\ procesadoras\ tipo\ 2$$

2 pts

Restricciones:

- no negatividad: $x_1, x_2 \geq 0$ **2 pts**
- superficie total: $80x_1 + 10x_2 \leq 2.400$ **3 pts**
- no déficit: $-2.000.000x_1 + 1.000.000x_2 \leq 30.000.000$ **3 pts**
- satisfacer demanda de reciclaje: $2.000x_1 + 1.000x_2 \geq 90.000$ **3 pts**

Función objetivo:

Min $400x_1 + 500x_2$ **2 pts**

Estas cifras salen de calcular la cantidad de material no reciclado por planta. Si la planta 1 recicla el 80%, es decir resta el 20% de las 2.000 ton que procesa cada una. Es así como se llega a 0,2*2.000=400 (análogamente para la segunda planta procesadora).

Alternativamente puede ser maximizar la cantidad de material reciclado,

Max $1600x_1 + 500x_2$

Así el problema queda como

$$Min \quad 400x_1 + 500x_2$$
$$s.a$$
$$2x_1 + x_2 \geq 90$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 30$$
$$8x_1 + x_2 \leq 240$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) El problema de fase I queda:

$$Min \quad y$$

3 pts

$$s.a$$

$$2000x_1 + 1000x_2 - h_1 + y = 90000$$

$$-2x_1 + x_2 + h_2 = 30$$

$$80x_1 + 10x_2 + h_3 = 2400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1 pto por las restricciones

c) Para que la fase I represente una solución factible inicial básica para el problema original, se tiene que dar que la solución óptima sea igual a cero. Es decir, el valor de y debe ser cero **2 pts**. Si dicha condición no se cumple, quiere decir que el problema original no tiene solución, es decir, es infactible. **1 pto**