PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Optimización
Semestre: 02-2011
Profesores: Claudia Prieto - Alejandro Cataldo
Mathias Klapp - Germán Paredes

Pauta Interrogación 2

Duración: 3 horas.

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras programables y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Responda cada una de las siguientes preguntas.

a) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 & \geq 3 \\ & x_1 & \leq x_2 \\ & x_1 & \leq \alpha \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

El problema dual es infactible para cualquier $\alpha \geq 0$. ¿Verdadero o Falso? Justifique su respuesta.

Solución(1 punto)

Verdadero. Si $\alpha \geq 0$ el sistema es factible y no-acotado, por lo tanto su Dual debe ser infactible.

b) (2 puntos) Considere el dominio definido por las siguientes restricciones:

$$-x + 4y \leq 12; \quad x + y \leq 6; \quad 2x \leq 11; \quad x, y \in Z^+$$

¿Cuáles de las siguientes restricciones se consideran como planos cortantes válidos?

i)	$x + 4y \leq 20$	ii)	$4x \leq 21$
iii)	$x + 2y \geq 2$	iv)	$y \leq 4$

Solución(2 puntos)

c) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & 120x_1 + 80x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 & \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 & \leq 28 \\ & x_1, x_2 & \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

Si se resuelve la relajación lineal de este problema, mediante Simplex, se obtiene el siguiente tableau final:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$base$
x_1	1	0	0,89	−0,11	2,22
x_2	0	1	−0,78	0,22	1,56
z	0	0	−44,44	−4,44	391,1

Genere una desigualdad válida utilizando el algoritmo de cortes de Gomory.

Solución(2 puntos)

El algoritmo de Gomory implica encontrar un corte válido, esto es, que elimine soluciones fraccionarias sin dejar fuera ninguna solución entera. Para ello se debe cumplir que:

$$\sum_{j \in \text{VNB}} \left(\bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor\right)(x_R)_j \geq \left(\bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor\right)$$

en donde VNB es el conjunto de índices de las variables no básicas, $\bar{a}_{kj}$ son coeficientes de $B^{-1}R$ y $\bar{b} = B^{-1}b$. Las expresiones $\lfloor \cdot \rfloor$ denotan el entero inferior.

En el ejercicio:

$$(0{,}89 - 0)x_3 + (-0{,}11 - (-1))x_4 \geq (2{,}22 - 2) \Leftrightarrow 0{,}89x_3 + 0{,}89x_4 \geq 0{,}22(*)$$

Del problema original se tiene que:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 28 - 7x_1 - 8x_2 \end{aligned}$$

y utilizando está información en $(*)$ se tiene:

$$8x_1 + 8x_2 \geq 30.$$

Si se reemplaza el punto ($x_1 = 2{,}22$) y ($x_2 = 1{,}56$) en la nueva restricción queda $30{,}22 > 30$, por lo que el corte ajusta la región factible del problema relajado, y la solución óptima cambiará acercándose al valor del óptimo del problema entero.

d) (2 puntos) Considere el método Simplex de dos fases. Si la función objetivo en la Fase I es reducida hasta cero siempre se puede asegurar que las variables artificiales no son básicas.

Solución(2 puntos)

Falso, la solución puede ser cero y aún estar en la base (caso degenerado).

e) (2 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{mín} & 6x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & -x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Encuentre la solución del problema dado.

Solución(2 puntos)

El Dual del problema corresponde a:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & y_1 + y_2 & \\ \text{s.a.} & 2y_1 + y_2 & \leq 6 \\ & 4y_1 + y_2 & \leq 8 \\ & -y_1 + y_2 & \geq 2 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Que puede ser resuelto gráficamente. El óptimo viene dado por $y_1 = 0, y_2 = 6, w^* = 6$. Empleando el Teorema de Holguras Complementarias se tiene que:

$$\begin{array}{rl} (2y_1 + y_2 - 6)\, x_1 & = 0 \\ (4y_1 + y_2 - 8)\, x_2 & = 0 \\ (-y_1 + y_2 - 2)\, x_3 & = 0 \\ (2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1)\, y_1 & = 0 \\ (x_1 + x_2 + x_3 - 1)\, y_2 & = 0 \end{array}$$

Luego el óptimo del problema dado corresponde a $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, z^* = 6$.

Pauta Parte A (10 puntos)

Parte B (10 puntos)

La compañía de seguros VidaABC está introduciendo tres productos: seguro de riesgo especial, crédito hipotecario y seguro de vida. La ganancia esperada es de $9 por unidad de seguro de riesgo especial, $6 por unidad de crédito hipotecario y $5 por unidad de seguro de vida. Los requerimientos de trabajo son los siguientes:

Departamento	R. Especial	C. Hipotecario	S. Vida	Hrs. disponibles
Subscripción	2	3	1	4
Administración	5	4	3	11

a) (1 punto) Formule un modelo de programación lineal en variables continuas que permita establecer las cuotas de ventas de cada producto de tal manera de maximizar la ganancia esperada.

b) (1 punto) Resuelva utilizando el algoritmo de Simplex. Para ello, utilice como punto de partida el vértice (2,0,0).

c) (1 punto) Encuentre el precio sombra para los servicios de los dos departamentos. Explique por qué en el óptimo los créditos hipotecarios no son vendidos.

d) (2 puntos) Suponga que usted tiene la oportunidad de incrementar las horas de solo uno de los tres departamentos tanto como quiera, siempre que la base actual se mantenga óptima. ¿Qué horas preferiría incrementar? ¿En cuánto? ¿Cuánto cambiaría el valor de la función objetivo?

e) (1 punto) Encuentre la mínima ganancia de los créditos hipotecarios para que convenga producirlos.

f) (2 puntos) Suponga que queremos introducir un nuevo producto: seguro de viaje, cuya ganancia esperada es de \$4 por unidad, y requiere 1 y $3 - 2\beta$ horas de trabajo por unidad en los departamentos de subscripción, y administración, respectivamente. ¿Cuál es el rango de β para el cuál es beneficioso introducir este nuevo seguro?

g) (2 puntos) Suponga que usted tiene la oportunidad de cambiar las ganancias esperadas de los seguros de riesgo especial y los créditos hipotecarios en Δ. ¿Para qué rango de Δ la base actual sigue siendo óptima? ¿Cómo cambia el valor de la función objetivo cuando Δ está en este rango?

Pauta Parte B (10 puntos)

a) (1 punto) Considerando las siguientes variables: x_1: cantidad de unidades de seguro de riesgo especial a vender. x_2: cantidad de unidades de crédito hipotecario a vender. x_3: cantidad de unidades de seguro de vida a vender.

El modelo es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 4 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

b) (1 punto) El problema en formato estándar es:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -9x_1 - 6x_2 - 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 & = 11 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

con x_4 y x_5 variables de holgura. En el vértice inicial las variables del problema en forma estándar toman los siguientes valores: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$. Entonces las variables asociadas a la base serán x_1 y x_5 y la matriz B dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Además el valor de $\overline{R}$ (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_2, x_3 y x_4) es:

$$\overline{R} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -7/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Dado que $\overline{b} \geq 0$ el punto inicial es factible. Para verificar si es óptimo se debe utilizar el criterio de optimalidad para lo cual es necesario calcular los costos reducidos para las variables no-básicas:

$$\overline{c}_j = (-6 \quad -5 \quad 0) - (-9 \quad -6) \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -7/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} = (\frac{15}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{9}{2}) \quad \leq \overrightarrow{0}$$

Luego, la solución no es óptima y debemos comenzar a iterar. Utilizando el tableau tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	3/2	1/2	1/2	0	2
0	-7/2	1/2	-5/2	1	1
0	15/2	-1/2	9/2	0	18

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el único costo reducido negativo es $-1/2$ y corresponde a la variable x_1, luego esta variable ingresa a la base.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente mín$\{1/(1/2), 2/(1/2)\}$, x_5 sale de la base.

Por lo tanto la nueva base estará formada por las variables x_1 y x_3 y pivoteando en el tableau tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	5	0	3	-1	1
0	-7	1	-5	2	2
0	4	0	2	1	19

Luego, la solución es óptima. En este caso, los valores de las variables son: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0$ y $x_5 = 0$. El valor de la función objetivo en forma estándar es -19, luego, del problema original es 19.

c) (1 punto) Del tableau final, sabemos que los precios sombra de subscripción y administración son y_1 =\$2 y y_2 =\$1, respectivamente. Si la compañía vende unidades de crédito hipotecario requiere de 3 horas de subscripción y 4 horas de administración, por lo tanto el costo de una unidad de crédito hipotecario es $3 \times 2 + 4 \times 1 = \$10$. Sin embargo la ganancia es de sólo \$6 por unidad. Luego la compañía no se beneficia con la venta de créditos hipotecarios.

d) (2 puntos) Para responder esto primero debemos saber en cuánto podemos incrementar las horas de cada departamento sin modificar la base óptima. Modificando el departamento de subscripción tenemos:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+\delta_1 \\ 11 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego $-1 \leq \delta_2 \leq 2$. Por lo tanto el número de horas de subscripción puede aumentar a lo más en 2/5 lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_1 * \delta_1 = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$. Por otro lado el número de horas de administración puede aumentar a lo más en 1 lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_2 * \delta_2 = 1 \times 1 = 1$. Por lo tanto preferimos incrementar el número de horas de administración en 1 y aumentar el valor de la función objetivo en \$1.

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11+\delta_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego $-1 \leq \delta_2 \leq 2$. Por lo tanto el número de horas de subscripción puede aumentar a lo más en 17/5 lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_1 * \delta_1 = 2 \times \frac{17}{5} = \frac{34}{5}$. Por otro lado el número de horas de administración puede aumentar a lo más en 1 lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_2 * \delta_2 = 1 \times 1 = 1$. Por lo tanto preferimos incrementar el número de horas de subscripción en 17/5 y aumentar el valor de la función objetivo en \$34/5

e) (1 punto) Dado que x_2 es una variable no básica en el óptimo actual no se venden créditos hipotecarios, la mínima ganancia para que convenga producirlos viene dada por $c_2^{new} \geq c_2 + \overline{c}_2$ esto es $c_2 \geq 6 + 4 = 10$. Cuando $c_2 = 10$ aún no se venden créditos hipotecarios pero x_2 puede entrar a la base.

f) (2 puntos) Debemos evaluar el costo reducido de la nueva columna (que es no básica), luego:

$$\overline{c}_6 = -4 - (-9 \quad -5) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 - 2\beta \end{pmatrix} = 1 - 2\beta$$

Dado que estamos minimizando el costo reducido debe ser negativo para que convenga incluir esta nuevo seguro al problema. Luego $\beta \geq \frac{1}{2}$

g) (2 puntos) La fila de costos reducidos se modifica a:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	5	0	3	-1	1
0	-7	1	-5	2	2
$-\Delta$	$4-\Delta$	0	2	1	19

Dado que x_1 es una variable básica en el óptimo, el costo reducido asociado a x_1 debe ser igual a 0. Para hacer $\overline{c}_1 = 0$ sumamos Δ*fila1 a la fila de los costos reducidos (fila3), esto es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	5	0	3	-1	1
0	-7	1	-5	2	2
0	$4+4\Delta$	0	$2+3\Delta$	$1-\Delta$	$19+\Delta$

Para mantener la optimalidad de la base actual, todos los costos reducidos deben ser no-negativos. Luego $-\frac{2}{3} \leq \Delta \leq 1$ para mantenernos en la base actual. En este caso la función objetivo se convertirá en $-19 - \Delta$ en la forma estándar, y en $19 + \Delta$ en el problema original.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Considere una empresa de confección de ropa que produce 4 productos: pantalones (x_1), camisas (x_2), chaquetas (x_3) y vestidos (x_4). Para la producción de estos 4 productos se requieren 3 insumos: horas-hombre, rollos de tela, botones. La empresa cuenta para esta semana con 600 horas-hombre, 480 rollos de tela y 400 botones. La siguiente tabla muestra la cantidad que se necesita de cada recurso para producir una unidad de cada producto.

	Horas-Hombre	Rollos de Tela	Botones
Pantalones	3	4	5
Camisas	6	8	1
Chaquetas	5	4	8
Vestidos	1	2	2

La empresa durante la semana debe producir para enviar a mercado al menos 150 unidades (independiente de que producto envía).

Finalmente, se sabe que por cada pantalón, camisa, chaqueta y vestido producido y enviado a mercado (asuma que el mercado recibe y paga por todo lo que la empresa le envíe) la empresa obtiene utilidades por 8, 5, 7 y 2 respectivamente.

a) (1 punto) Basándose en el información anterior, construya un modelo de programación lineal continua que permita determinar la cantidad de unidades de cada producto que deben ser producidos (y entonces x_1, x_2, x_3 y x_4) durante esta semana de manera de maximizar la utilidad total.

b) (6 puntos) La empresa le ha entregado las siguientes soluciones que cree resuelven el problema planteado en a):

	x_1	x_2	x_3	x_4
Solución 1	120	0	0	0
Solución 2	0	0	0	150
Solución 3	25	17	4	104
Solución 4	40	30	0	0
Solución 5	0	30	0	120

Determine y justifique claramente si alguna de las soluciones entregadas en la tabla anterior es la solución óptima del problema planteado en a).

c) (3 puntos) Basándose en la información de la tabla de soluciones, entregue la mejor cota inferior y la mejor cota superior de la solución óptima del problema planteado en a).

Pauta Parte A (10 puntos)

a) (1 punto) Las variables para modelar el problema son: x_1 cantidad de pantalones producidos, x_2 cantidad de camisas producidas, x_3 cantidad de chaquetas producidas y x_4 cantidad de vestidos producidos.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcll}
\text{máx} & 8x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & & & \\
 & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \leq & 600 & \text{R1-Restricción de horas-hombre} \\
 & 4x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 480 & \text{R2-Restricción de rollos de tela} \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & \leq & 400 & \text{R3-Restricción de botones} \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \geq & 150 & \text{R4-Restricción de producción} \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & \text{Naturaleza de variables}
\end{array}
$$

b) (6 puntos) Al revisar la tabla de soluciones entregadas se tiene que:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Valor función objetivo	Factibilidad
Solución 1	120	0	0	0	960	No cumple R3 y R4
Solución 2	0	0	0	150	300	Factible
Solución 3	25	17	4	104	521	Factible
Solución 4	40	30	0	0	470	No cumple R4
Solución 5	0	30	0	120	390	Factible

En consecuencia, las soluciones 3, 5 y 2 son candidatas a óptimo, dispuestas en orden por el valor de la función objetivo. De estas 3 soluciones, solamente la solución 5 y 2 son puntos extremos. Para verificar esto, construyamos la forma estándar del problema.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcrcll}
\text{mín} & -8x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & - & 2x_4 & & & & & & & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & & & = & 600 & \text{R1} \\
 & 4x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & + & x_6 & & & & & = & 480 & \text{R2} \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & & & & & + & x_7 & & & = & 400 & \text{R3} \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & - & x_8 & = & 150 & \text{R4} \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & - & x_8 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Tipo
Solución 2	0	0	0	150	450	180	100	0	Punto extremo
Solución 3	25	17	4	104	299	20	18	0	Punto interior
Solución 5	0	30	0	120	300	0	130	0	Punto extremo

El mejor candidato, por valor de la función objetivo es la solución 3, sin embargo es un punto interior. Para que este sea solución óptima del problema, la solución debe ser múltiple (sabemos que la solución de un problema de programación lineal en variables continuas, si existe, se encuentra al menos en un punto extremo). En este caso, la solución no puede ser múltiple pues la función objetivo no es paralela a ninguna de las restricciones (condición para la existencia de múltiples soluciones). En consecuencia, como un punto interior posee mejor valor de función objetivo que las soluciones que se encuentran en puntos extremos, se puede asegurar que la solución óptima del problema de la parte a) (si es que existe) no se encuentra entre las soluciones entregadas.

c) (3 puntos) La cota inferior para el valor de la función objetivo la entrega el mejor valor de la función objetivo para un punto factible del primal. En este caso, esa cota vale 521 (entregada por la solución 3).

Para determinar una cota superior para el valor de la función objetivo de la solución óptima del problema de la parte a) se debe verificar si alguna de las soluciones infactibles del primal es una solución factible en el dual. Entonces, construyamos el dual:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcll}
\text{mín} & 600y_1 & + & 480y_2 & + & 400y_3 & + & 150y_4 & & & \\
 & 3y_1 & + & 4y_2 & + & 5y_3 & + & y_4 & \geq & 8 & \text{R1-Restricción de horas-hombre} \\
 & 6y_1 & + & 8y_2 & + & y_3 & + & y_4 & \geq & 5 & \text{R2-Restricción de rollos de tela} \\
 & 5y_1 & + & 4y_2 & + & 8y_3 & + & y_4 & \geq & 7 & \text{R3-Restricción de botones} \\
 & y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & \geq & 2 & \text{R4-Restricción de producción} \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & & & \geq & 0 & \text{Naturaleza de variables} \\
 & & & & & & & y_4 & \leq & 0 & \text{Naturaleza de variables}
\end{array}
$$

donde el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria queda:

$$
\begin{aligned}
&(3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 - 600) \cdot y_1 = 0 \\
&(4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 480) \cdot y_2 = 0 \\
&(5x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 400) \cdot y_3 = 0 \\
&(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 150) \cdot y_4 = 0 \\
&(3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_4 - 8) \cdot x_1 = 0 \\
&(6y_1 + 8y_2 + y_3 + y_4 - 5) \cdot x_2 = 0 \\
&(5y_1 + 4y_2 + 8y_3 + y_4 - 7) \cdot x_3 = 0 \\
&(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 - 2) \cdot x_4 = 0
\end{aligned}
$$

La solución 4 es la que podría entregar la mejor cota superior, ya que es infactible en el primal. Sin embargo, no es un punto extremo. La solución 1 también es infactible en el primal y es punto extremo. Luego, basta verificar si es factible en el dual para que entregue una cota superior. Para obtener el valor de las variable duales de esta solución ocupamos el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria. Reemplazando la solución $x_1 = 120$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ en el sistema de ecuaciones del teorema de holgura complementaria se tiene $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ e $y_2 = 2$, con lo que se tiene que la solución es dual factible. Luego, el teorema débil de dualidad nos asegura que 960 es una cota superior para el problema planteado en a).

Parte B (10 puntos)

Considere que se está resolviendo un problema de minimización entero binario, utilizando Branch and Bound, en el cual aún queda un solo nodo por revisar. El nodo en cuestión es el nodo 130.

Suponga que al simplificar el problema reemplazando el valor de las variables que ya fueron fijadas en el proceso de Ramificación que define el nodo considerado, se obtiene el siguiente problema con algunos parámetros:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{mín} & cx_1 + 4x_2 + 5 & \\
\text{s.a.} & ax_1 + 4x_2 & \geq 5 \\
& x_1, x_2 & \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Suponga que $c \geq 0$. Además, suponga que el valor del incumbente es igual a 60, y que los parámetros sólo toman valores enteros. Defina los rangos para los parámetros c y a de manera que se cumplan las condiciones del B&B para cada uno de los casos enumerados más abajo. Adicionalmente, evalúe cuál sería el valor de la función objetivo para cada uno de ellos.

i) (2 puntos) Nodo Infactible

ii) (4 puntos) Nodo con Solución Entera Mejor que el Incumbente.

iii) (4 puntos) Nodo con Solución No Entera Mejor que el Incumbente.

Pauta Parte B (10 puntos)

i) (2 puntos) Para que el nodo sea infactible, basta que $a + 4 \leq 4 \Rightarrow a \leq 0$. En tal caso, el nodo recién procesado se elimina. Luego, la solución óptima es igual a 60.

ii) (4 puntos) En este caso, basta con que el valor de la función objetivo del nodo 130 sea tal que $z_{130} \leq 59$, y sea entera, por lo que se actualiza el incumbente. Luego, se debe cumplir que $a + 4 \geq 5 \Rightarrow a \geq 1$ de modo de asegurar la factibilidad del problema.

Suponiendo que $\frac{c}{a} \leq \frac{4}{4}$ se tiene:

- ◇ Si $a \geq 5$ entonces $x_1 = \frac{5}{a}$ y $x_2 = 0$. Entonces para que la solución sea entera se tiene que imponer que $a = 5$, con lo que $x_1 = 1$, y entonces $z_{130} = 5 + c$.
- ◇ Si $a < 5$ entonces $4 \geq 5 - a$ con lo que $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{5-a}{4}$. Entonces para que la solución sea entera se tiene que imponer que $a + 4 = 5$, con lo que $x_2 = 1$, y entonces $z_{130} = 5 + c + 4$.

iii) (4 puntos) En este caso, basta con que el valor de la función objetivo del nodo 130 sea tal que $z_{130} < 60$ y sea fraccional, con lo que se generan 2 nuevos sub-problemas. Luego, se debe cumplir que $a + 4 \geq 5 \Rightarrow a \geq 1$ de modo de asegurar la factibilidad del problema.

Suponiendo que $\frac{c}{a} \leq \frac{4}{4}$ se tiene:

- ◇ Si $a \geq 5$ entonces $x_1 = \frac{5}{a}$ y $x_2 = 0$. Entonces para que la solución no sea entera se tiene que imponer que $a > 5$, con lo que $x_1 \in (0, 1)$, y entonces $z_{130} = 5 + c \cdot \frac{5}{a}$.
- ◇ Si $a < 5$ entonces $4 \geq 5 - a$ con lo que $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{5-a}{4}$. Entonces para que la solución no sea entera se tiene que imponer que $a + 4 > 5$, con lo que $x_2 \in (0, 1)$, y entonces $z_{130} = 5 + c + 4 \cdot \frac{5-a}{4}$.

Pregunta 3 (20 puntos)

Considere que su familia enfrenta una difícil tarea: la mudanza. Para realizarla debe planificar el embalaje de los N artículos que posee en el hogar, en un máximo de N cajas de cartón. Es decir, una caja por artículo en el peor de los casos. Cada caja es indivisible, soporta un peso de W [kg] y un volumen máximo de V [m^3]. Por otro lado, cada artículo posee un peso w_i [Kg] y volumen v_i [m^3] conocidos para todo $i = 1, .., N$. Como dato se sabe que $w_i < W$ [Kg] y además que $v_i < V$ [m^3]. Si usted no embala el artículo i (para todo $i = 1, \ldots, N$), entonces debe reemplazarlo en su nuevo hogar comprándolo a un costo $\$p_i$ una vez que termine la mudanza. Sin embargo, existen artículos que debe llevar, pues tienen carácter de *irremplazables* para usted. Denotemos este último conjunto como $I \subset 1, \ldots, N$.

Cada caja con artículos ya embalados debe ser cargada en uno de los T camiones disponibles. Cada uno tiene una capacidad de E_k cajas donde $k = 1, \ldots, T$. Interesa racionar el uso de camiones, pues arrendarlo posee un costo $\$C_k$.

Sin embargo, dado el alto costo de arriendo usted decide negociar con el dueño de los camiones y ha conseguido un descuento por volumen de camiones arrendados. Específicamente, si arrienda más de F_1 camiones se le hará un descuento por $\$B_1$, y si el número sobrepasa los F_2 camiones arrendados, con $F_2 > F_1$, el descuento será de $\$B_2$ (que es mayor al descuento anterior).

a) (12 puntos) Construya un modelo de programación lineal que le permita tomar las decisiones de la mudanza minimizando el costo total en el que deba incurrir.

b) (8 puntos) Ahora considere que al camión que lleve la carga más valiosa (costo de compra $\$p_i$) se le colocará un chip de seguridad. Este chip posee un costo que depende del camión y que corresponde a $\$S_k$.

Considerando la nueva información, modifique el modelo propuesto en la parte a) de manera de que las decisiones consideren este nuevo costo.

Pauta Pregunta 3 (20 puntos)

a) Se definen las siguientes variables.

Variables

x_{ij}: binaria que vale 1 si se carga el artículo i, con $i = 1, \ldots, N$, en la caja j, con $j = 1, \ldots, N$.
y_{jk}: binaria que vale 1 si se carga la caja j, con $j = 1, \ldots, N$, en el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.
z_k: binaria que vale 1 si se utiliza el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.
D_1: se alcanzó el primer nivel de descuento.
D_2: se alcanzó el segundo nivel de descuento.

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar el costo total de la mudanza.

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{T} c_k z_k - B_1 D_1 - B_2 D_2$$

Restricciones

R1) Cada artículo debe ser cargado en a lo más una caja.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

R2) Los artículos irremplazables deben ser llevados.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N : i \in I.$$

R3) Las cajas son cargadas en a lo más un solo camión.

$$\sum_{k=1}^{T} y_{jk} \leq 1\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

R4) Respetar la capacidad en volumen de las cajas.

$$\sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij} \leq V \sum_{k=1}^{T} y_{jk}\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

R5) Respetar la capacidad en peso de las cajas.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_{ij} \leq W \sum_{k=1}^{T} y_{jk}\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

R6) Respetar la capacidad en cajas de los camiones.

$$\sum_{j=1}^{N} y_{jk} \leq E_k z_k\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R7) Se puede estar a lo más en un tramo de descuento.

$$D_1 + D_2 \leq 1$$

R8) Activación variable de primer tramo de descuento.

$$F_2(D_1 + D_2) \leq \sum_{k=1}^{T} z_k$$

R9) Activación variable de segundo tramo de descuento.

$$F_2 D_2 \leq \sum_{k=1}^{T} z_k$$

R10) Naturaleza de las variables.

$x_{ij} \in \{0,1\}$, para artículo $i = 1, \ldots, N$ y caja $j = 1, \ldots, N$.
$y_{jk} \in \{0,1\}$, para caja $j = 1, \ldots, N$ y camión $k = 1, \ldots, T$.
$z_k \in \{0,1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$.
$D_1, D_2 \in \{0,1\}$.

b) La modificación debe incluir las siguientes variables adicionales.

Variables

γ_k: binaria que vale 1 si el camión k, con $k = 1, \ldots, T$, es el cargamento más valioso.

α_{kh}: binaria que vale 1 si el camión k, con $k = 1, \ldots, T$, en más valioso que el camión h, con $h = 1, \ldots, T$ y $k <> h$.

β_{ijk}: binaria que vale 1 si el artículo i, con $i = 1, \ldots, N$ cargado en la caja j, con $j = 1, \ldots, N$, va en el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.

La función objetivo queda modificada de la siguiente manera:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{T} c_k z_k - B_1 D_1 - B_2 D_2 + \sum_{k=1}^{T} S_k \gamma_k$$

Y finalmente, se deben agregar las siguientes restricciones:

R11) Construcción de variable β_{ijk}

$$\frac{x_{ij} + y_{jk}}{2} \geq \beta_{ijk} \geq x_{ij} + y_{jk} - 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N; \forall\, j = 1, \ldots, N; \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R12) Construcción de variable α_{kh}

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N} \beta_{ijk}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N} \beta_{ijh}\right)}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \leq \alpha_{kh}\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, T; \forall\, h = 1, \ldots, T \text{ con } k <> h.$$

R13) Construcción de variable γ_{kh}

$$\gamma_k \geq \left(\sum_{h=1}^{T} \alpha_{kh} \right) - (T-1), \quad \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R14) Debe haber un camión con cargamento más valioso.

$$\sum_{k=1}^{T} \gamma_k = 1$$

R15) Naturaleza de las variables nuevas.

$\gamma_k \in \{0, 1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$.
$\alpha_{kh} \in \{0, 1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$ y camión $h = 1, \ldots, T$ con $k <> h$.
$\beta_{ijk} \in \{0, 1\}$, para artículo $i = 1, \ldots, N$, caja $j = 1, \ldots, N$ y camión $k = 1, \ldots, T$.