PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2013
Profesores: P. Álvarez - A. Cataldo - R.Giesen
A. Lüer - V. Valdebenito

PAUTA TAREA

Fecha de entrega:

- Lunes 27 de Mayo, hasta las 16:00 hrs, en secretaria docente del 2° piso del edificio Raúl Deves.

Beneficio:

- La tarea tiene un puntaje máximo de 20 puntos (4 puntos por pregunta), los que serán agregados a la nota de la Interrogación 2.

Reglas de la tarea:

- **No se aceptarán tareas fuera del plazo** definido para la entrega.
- Es requisito para que la tarea sea revisada que se **adjunte la resolución completa –escrita a mano– de la Interrogación 2**.
- Se aceptarán solo aquellas tareas escritas a mano. Las tareas entregadas en editores de texto **NO serán consideradas ni revisadas**.
- Las tareas pueden ser entregadas por grupos de **a lo más 3 alumnos**.

Pregunta 1

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) ha decidido contratar a consultores en optimización para que mediante la utilización de modelos matemáticos diseñen el fixture (programa de enfrentamientos entre los equipos a lo largo del torneo) del Campeonato Apertura del fútbol chileno. Los datos que les hizo llegar la ANFP son los siguientes:

- Disputarán el campeonato 20 equipos que se enfrentarán todos contra todos a lo largo de 19 fechas. Cada fecha consta de 10 partidos donde juegan los 20 equipos del torneo, y cada enfrentamiento entre dos equipos se da exactamente una vez a lo largo del campeonato.
- Cada equipo debe jugar 9 o 10 partidos en condición de local (y el resto de sus partidos en condición de visita).
- Cada equipo puede jugar a lo más 2 partidos consecutivos como local y 2 partidos consecutivos como visita.
- Cuando la Universidad de Chile juega de local, Colo-Colo debe jugar como visita, y viceversa.
- Los clásicos (partidos entre sí de la Universidad de Chile, Colo-Colo y la Universidad Católica) deben jugarse de la fecha 10 en adelante.

Además, se sabe que la fecha 4 y la fecha 12 serán las únicas que se disputarán en miércoles (y no en fin de semana) y que los equipos prefieren no jugar de local los días miércoles porque las recaudaciones bajan sensiblemente. Es por ello que se ha pensado en minimizar el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local.

Con esta información se le pide que resuelva el mismo problema que los consultores intentan resolver. Para ello:

a) Diseñe un modelo de programación lineal entera que minimice el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local, respetando las condiciones solicitadas por la ANFP.

b) ¿Cómo variaría el modelo si se le pide ahora que además de las condiciones mencionadas se incorpore una más que diga que obligatoriamente cada equipo debe jugar un miércoles de local y otro miércoles de visita? (o sea que cada equipo debe ser local en la fecha 4 y visita en la 12, o viceversa).

Pauta Pregunta 1

a) *Variables de decisión*

- x_{ij}^t: variable binaria que toma valor 1 si el equipo i (es local)y el equipo j (es visita), con $i \neq j$, en la fecha t.
- w_i: variable binaria que toma valor 1 si el equipo i juega de local al menos una de las dos fechas de los miércoles.

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_i w_i$$

Restricciones

1) Cada equipo juega a exactamente una vez con cada uno de los demás equipos durante las 19 fechas.
$$\sum_t (x_{ij}^t + x_{ji}^t) = 1 \qquad \forall i, j : i \neq j.$$

2) Se programa exactamente 10 partidos en cada fecha.
$$\sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij}^t = 10 \qquad \forall t.$$

3) Cada equipo juega solamente una vez en cada fecha.
$$\sum_{j \neq i} (x_{ij}^t + x_{ji}^t) = 1 \qquad \forall i, t.$$

4) Cada equipo juega un mínimo y máximo de local.
$$9 \leq \sum_t \sum_{j \neq i} x_{ij}^t \leq 10 \qquad \forall i, t.$$

5) Cada equipo juega a lo más dos partidos consecutivos de local.

$$\sum_{j \neq i} x_{ij}^{t} + \sum_{j \neq i} x_{ij}^{t+1} + \sum_{j \neq i} x_{ij}^{t+2} \leq 2 \qquad \forall i, t \leq 17.$$

6) Cada equipo juega a lo más dos partidos consecutivos de visita.

$$\sum_{j \neq i} x_{ji}^{t} + \sum_{j \neq i} x_{ji}^{t+1} + \sum_{j \neq i} x_{ji}^{t+2} \leq 2 \qquad \forall i, t \leq 17.$$

7) Condiciones Universidad de Chile y Colo Colo.

$$\sum_{j \neq \text{ColoColo}} x_{\text{ColoColo},j}^{t} + \sum_{j \neq \text{U}} x_{j,\text{U}}^{t} = 1 \qquad \forall t.$$

$$\sum_{j \neq \text{ColoColo}} x_{j,\text{ColoColo}}^{t} + \sum_{j \neq \text{U}} x_{\text{U},j}^{t} = 1 \qquad \forall t.$$

8) Clásicos desde la fecha 10 en adelante.

$$\sum_{t \geq 10} (x_{\text{UC,ColoColo}} + x_{\text{ColoColo,UC}}) = 1$$

$$\sum_{t \geq 10} (x_{\text{UC,U}} + x_{\text{U,UC}}) = 1$$

$$\sum_{t \geq 10} (x_{\text{U,ColoColo}} + x_{\text{ColoColo,U}}) = 1$$

8) Construir variable w.

$$w_i \geq \left(\sum_{j \neq i} x_{ij}^{4} + \sum_{j \neq i} x_{ij}^{12} \right) - 1 \qquad \forall i.$$

9) Naturaleza de las variables

$$x_{ij}^{t} \in \{0, 1\}, \ \forall i, j : i \neq j, t.$$

$$w_i \in \{0, 1\}, \ \forall i.$$

b) En este caso, la función objetivo deja de ser relevante, luego, cualquier función objetivo es válida. Adicionalmente se debe agregar la siguiente restricción:

$$w_i = w_j \qquad \forall i, j : i \neq j.$$

Pregunta 2

La línea aérea ICS opera una única ruta entre Santiago y Buenos Aires (SCL-EZE) para la que ofrece 4 vuelos diarios que salen cada cuatro horas (8AM, 12PM, 4PM, 8PM). Los vuelos impares (primero y tercero) se realizan con la misma nave con capacidad para 80 pasajeros, y los vuelos pares (segundo y cuarto) con un avión con capacidad para 120 pasajeros.

Si cualquiera de los vuelos está sobrevendido y no existe espacio para acomodar a un pasajero, ICS puede hacer esperar a un pasajero el siguiente vuelo. ICS sólo compensa a aquellos pasajeros que esperan más de 4 horas de su itinerario original pagando un pasaje ida y vuelta Stgo.-Bs.As.-Stgo (US$ 300) más US$ 20 por hora adicional de espera. Los pasajeros que no puedan acomodarse en el último vuelo de ICS siempre pueden ser transportados en un vuelo de otra línea aérea a las 11PM. Suponga que para un día determinado los cuatro vuelos SCL-EZE de ICS tienen confirmados d1, d2, d3 y d4 pasajeros para los horarios 8AM, 12PM, 4PM, y 8PM respectivamente.

Formule el problema de decisión de la estrategia de ruteo más económico de pasajeros como un problema de flujo en redes a mínimo costo.

Pauta Pregunta 2

Para formular el problema como uno de flujo a costo mínimo construimos los siguientes nodos de oferta: G_1, G_2, G_3, G_4 y G donde G_i es un nodo que representa a los pasajeros del i-ésimo vuelo, y G representa un nodo auxiliar. Los nodos de demanda son: V_1, V_2, V_3, V_4 y VA, donde V_j representa el vuelo j-ésimo y VA es el vuelo de las 11PM en otra línea aérea.

La siguiente tabla es de las ofertas:

Nodo	G_1	G_2	G_3	G_4	G
Oferta	d_1	d_2	d_3	d_4	$\sum_i d_i = D$

La siguiente tabla es de las demandas:

Nodo	V_1	V_2	V_3	V_4	VA
Demanda	80	120	80	120	$2D - 400$

La siguiente tabla entrega entre cada par de nodos de la red:

Nodos	V_1	V_2	V_3	V_4	VA
G_1	0	$20 \cdot 4$	$300 + 20 \cdot 8$	$300 + 20 \cdot 12$	$300 + 20 \cdot 11$
G_2	0	0	0	0	0
G_3	0	$300 + 20 \cdot 8$	0	$20 \cdot 4$	$300 + 20 \cdot 7$
G_4	0	$20 \cdot 4$	0	0	$20 \cdot 3$
G_5	0	0	0	0	0

Las cotas inferiores son 0 y las superiores son ∞ para todo arco. Con esto, basta definir la variable de flujo f_{ij} que corresponden a la cantidad de pasajeros que estaban confirmados en el vuelo G_i (incluyendo el nodo G) que son programados en el vuelo V_i (incluyendo el vuelo VA). El resto, corresponde a la formulación típica de un problema de flujo a costo mínimo, y entonces: restricción de conservación de flujo en cada nodo, respetar las cotas mínimas y máximas, y que la función objetivo sea la minimización del costo de las decisiones de flujo tomadas.

Pregunta 3

Una panificadora tiene un conjunto L de locales, desde los cuales envía pan de molde a un conjunto M de minimarkets ubicados en Santiago. Se busca planificar la producción y distribución del pan de molde para un conjunto T de días de aquí en adelante.

Los costos de la empresa se descomponen son: unitarios de elaboración de pan de molde en el local $l \in L$, el día $t \in T$, denotados V_l^t; fijos de elaboración del pan de molde en el local $l \in L$, el día $t \in T$, denominados F_l^t; y fijos de distribución del pan desde el local $l \in L$ al minimarket $m \in M$ el día $t \in T$, llamados D_{lm}^t.

Se supone conocida la demanda de pan de molde en cada minimarket $m \in M$ cada día $t \in T$, que se denomina d_m^t, la que puede satisfacerse con pan entregado hasta E días antes, ya que el pan de molde dura más que eso, una vez envasado.

Además, cada local $l \in L$ tiene una capacidad máxima diaria de producción, llamada P_l, y pueden transportarse cada periodo a lo más C_{lm} panes de molde desde el local $l \in L$ al minimarket $m \in M$.

Por otra parte, un local no puede elaborar pan de molde más de $S < T$ días seguidos, para evitar saturar su capacidad de producir otros productos.

Finalmente, todo el pan producido en un día en un local tiene que ser despachado a los minimarkets asignados ese mismo día, es decir, no puede existir inventario en los locales.

Formule un problema de programación lineal entera mixta que entregue el plan de producción de mínimo costo total para la panificadora en el horizonte de planificación.

Pauta Pregunta 3

Conjuntos derivados

- D_a^t conjunto de los a periodos siguientes de $t \in T$, inclusive.
- A_e^t conjunto de los e periodos anteriores de $t \in T$, inclusive.

Variables de decisión

- X_{lm}^{uv}: cantidad de pan producido en $l \in L$ en el período $u \in T$ para satisfacer la demanda del período $v \in D_E^u$.
- Y_{lm}^t: 1, si se distribuye el pan producido en $l \in L$ para el minimarket $m \in M$ el día $t \in T$; 0, en otro caso.
- Z_l^t: 1, si se hace pan en $l \in L$ el período $t \in T$; 0, en otro caso.

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} F_l^t Z_l^t + \sum_{l \in L} \sum_{u \in T} \left(\sum_{m \in M} \sum_{v \in D_E^u} X_{lm}^{uv} \right) + \sum_{l \in L} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} D_{lm}^t Y_{lm}^t$$

Restricciones

1) Satisfacción de la demanda.

$$\sum_{l \in L} \sum_{u \in A_E^v} X_{lm}^{uv} = d_m^v, \ \forall m \in M, \ v \in T$$

2) Capacidad de producción.

$$\sum_{m \in M} \sum_{v \in D_E^u} X_{lm}^{uv} \leq P_l \cdot Z_l^u, \ \forall l \in L, \ u \in T$$

3) Capacidad de distribución.

$$\sum_{v \in D_E^u} X_{lm}^{uv} \leq C_{lm} \cdot Y_{lm}^u, \ \forall l \in L, \ m \in M, \ u \in T$$

4) Distribuir sólo si se produce.

$$Y_{lm}^u \leq Z_l^u, \forall l \in L, \ m \in M, \ u \in T$$

5) Periodos consecutivos de producción

$$\sum_{v \in D_S^u} Z_l^v \leq S, \ \forall u \in T$$

6) Naturaleza de las variables

$$X_{lm}^{uv} \geq 0, \ \forall l \in L, \ \forall m \in M, \ u \in T, \ v \in D_E^u$$

$$Y_{lm}^t \in \{0,1\}, \ \forall l \in L, \ m \in M, \ t \in T$$

$$Z_l^t \in \{0,1\}, \ \forall l \in L, \ t \in T$$

Pregunta 4

Frente a emergencias el uso de helicópteros se vuelve fundamental para socorrer a la población afectada. Por este motivo, en operaciones de ayuda frente a desastres es vital contar con herramientas que faciliten la planificación del uso de helicópteros una vez ocurrido el evento. Las principales decisiones, a un nivel superior, corresponden a: i) determinar la composición de la flota, es decir, asignar los helicópteros desde la base aérea en la que están (previo al evento) a la base de operaciones de emergencia, se debe considerar que los helicópteros tienen distintas características técnicas (una de ellas es su capacidad de carga CP_k); ii) asignar pilotos a helicópteros, dependiendo de las capacidades de los pilotos para manejar los distintos tipos de helicópteros (se conoce P_k, que corresponde al conjunto pilotos que pueden comandar helicópteros del tipo k), y iii) determinar el número de tours que cada helicóptero realizará (se conoce la cantidad máxima de tours UB_k que puede realizar un helicóptero del tipo k sin violar restricciones máximas de tiempo de vuelo).

Se sabe que el costo de asignar el helicóptero de tipo k que está en la base aérea i a la base de operaciones de emergencia es w_{ik}, por otra parte, el costo de asignar al piloto q que está en la base aérea m (no necesariamente la misma en donde está en helicóptero) al helicóptero tipo k en la base i es v_{qikm}. También se conoce la cantidad agregada de ayuda que debe ser enviada, TD.

Escriba un modelo de programación lineal entera mixta que encuentre la solución de costo mínimo para este problema.

Pauta Pregunta 4

Variables de decisión

- y_{ijk}: variable binaria que toma valor 1 si el helicóptero j del tipo k que está en la base aérea i es asignado a la base de operaciones de emergencia.

- x_{ijk}: número de tours que realizará el helicóptero j del tipo k que está en la base aérea i.
- z_{qijkm}: variable binaria que toma valor 1 si el piloto q de la base aérea m es asignado al helicóptero j del tipo k que está en la base aérea i.

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_i \sum_j \sum_k w_{ik} x_{ijk} + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m \sum_{q \in P_k} v_{qijkm} z_{qijkm}$$

Restricciones

1) Relación entre las variables.

$$2y_{ijk} = \sum_m \sum_{q \in P_k} z_{qijkm} \qquad \forall i, j, k.$$

2) Cada piloto puede ser asignado a lo más a una combinación helicóptero, tipo y base aérea.

$$\sum_i \sum_j \sum_k z_{qijkm} \leq 1 \qquad \forall q, m.$$

3) Respetar la cantidad máxima de tours.

$$x_{ijk} \leq UB_k y_{ijk} \qquad \forall i, j, k.$$

4) Entregar al menos el mínimo de ayuda requerida.

$$\sum_i \sum_j \sum_k CP_k x_{ijk} \geq TD$$

5) Naturaleza de las variables

$$x_{ijk} \geq 0, \text{ entera } \forall i, j, k.$$

$$y_{ijk} \in \{0, 1\}, \ \forall i, j, k.$$

$$z_{qijkm} \in \{0, 1\}, \ \forall q, i, j, k, m.$$

Pregunta 5

Suponga que usted es el dueño de una fábrica, y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D^t unidades para el mes t.

Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c^t para cada mes.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los períodos, y en cualquier período puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificará los costos unitarios de producción a c_a^t, con $c_a^t < c^t$, y la capacidad máxima de la empresa a Q_m^t. La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I.

Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.

Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de producto terminado a un precio de P, con $P > c^t$ para todo t. Con esta información responda:

a) Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda.

b) ¿Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo que el costo asociado de b^t por unidad almacena desde el período t al $t+1$, y un inventario máximo de B unidades?

Pauta Pregunta 5

a) **Variables:**

α^t: 1 si se decide producir en el mes t, 0 sino.

x^t: cantidad de unidades producidas con la tecnología antigua en el período t.

w^t: cantidad de unidades producidas con la tecnología nueva en el período t.

β^t: 1 si se decide cambiar la tecnología en el período t.

y^t: cantidad de unidades compradas a la competencia.

Función Objetivo:

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^{T} K\alpha^t + \sum_{t=1}^{T} Py^t + \sum_{t=1}^{T} c^t x^t + \sum_{t=1}^{T} c_a^t w^t + \sum_{t=1}^{T} I\beta^t$$

Restricciones:

1) Cambiar a lo más una vez de tecnología en el horizonte de evaluación.

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^t \leq 1$$

2) Satisfacer la demanda.

$$x^t + w^t + y^t \geq D^t \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

3) Producir solamente si se decide hacerlo.

$$M\alpha^t \geq x^t + w^t \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

con

$$M = D^t$$

4) No sobrepasar capacidad con tecnología antigua.

$$x^t \leq Q_m \left(1 - \sum_{\theta \leq t} \beta^t\right) \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

5) No sobrepasar capacidad con tecnología nueva.

$$w^t \leq Q_m^t \sum_{\theta \leq t} \beta^t \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

6) Naturaleza de las variables.

$$\alpha^t; \beta^t \in \{0, 1\} \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

$$x^t; y^t; w^t \geq 0 \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

b) En caso de que pueda manejarse inventario entre períodos es necesario agregar una nueva variable:

I^t: cantidad de inventario guardada desde el período t al período $t + 1$.

Las restricciones de satisfacción de demanda 2) y de naturaleza de variables se modifican quedando:

$$x^t + w^t + y^t + I^{t-1} \geq D^t + I^t \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

$$\alpha^t; \beta^t \in \{0, 1\} \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

$$x^t; y^t; w^t; I^t \geq 0 \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

Además, se debe agregar la restricción sobre la capacidad máxima de bodegaje en cada período:

$$I^t \leq B \qquad \forall\, t = 1, ..., T.$$

Por último, la función objetivo se modifica quedando:

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^{T} K\alpha^t + \sum_{t=1}^{T} Py^t + \sum_{t=1}^{T} c^t x^t + \sum_{t=1}^{T} c_a^t w^t + \sum_{t=1}^{T} I\beta^t + \sum_{t=1}^{T} b^t I^t$$