PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2012
Profesores: J. Vera, C. Prieto, M. Klapp
J.C. Muñoz, A. Cataldo

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas con 30 minutos.

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (4 puntos) En el curso hemos visto que si $f : \mathbf{R^n}^n \mapsto \mathbf{R}$ es una función convexa, entonces el conjunto de nivel $\{x \in \mathbf{R^n} : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo $\forall \alpha$. Indique si existe algún tipo de función que cumpla simultáneamente que el conjunto $\{x \in \mathbf{R^n} : f(x) \geq \alpha\}$ también sea convexo $\forall \alpha$. Justifique su respuesta.

RESPUESTA: Sí existe este tipo de funciones, un ejemplo son las funciones lineales en $\mathbf{R^n}$ y las funciones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes en $\mathbf{R}$. Los gráficos mostrados en la Figura 1 corresponden a una función que no cumple la condición y otra que si la cumple ya que es estrictamente creciente.

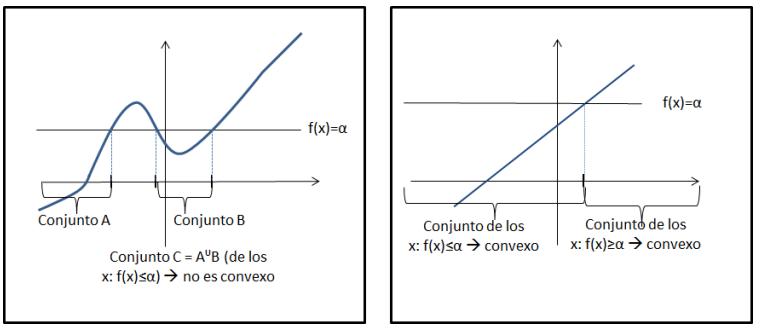


Figura 1: Gráfico pregunta 1, parte a).

b) (4 puntos) Considere el siguiente problema de producción en dos variables, con $x = (x_1, x_2)$, $c \geq 0, A \geq 0$, y $b \geq 0$:

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Un amigo le indica que los puntos $(0, 30)$, $(10, 15)$ y $(20, 10)$ son puntos extremos del problema. ¿Usted le cree? Justifique su respuesta.

RESPUESTA: Usted no lo cree. Dado que se trata de un problema de producción el $(0, 0)$ es un punto extremo del problema, si los tres puntos indicados por su amigo fueran puntos extremos

el dominio del problema sería no convexo, lo que no es posible en un problema lineal.

c) (4 puntos) Se tiene un problema de optimización lineal que en su forma estándar cuenta con 3 restricciones y 5 variables. Actualmente se encuentra en la segunda iteración del algoritmo de Simplex, en el punto $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 5$, y ha verificado que no es la solución óptima del problema. ¿Es posible que en la próxima iteración el algoritmo le lleve al punto $x_1 = 7$, $x_2 = 10$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$?. Justifique su respuesta.

RESPUESTA: No es posible que el algoritmo en una iteración salte del primer al segundo punto entregado. Esto se debe a que el algoritmo asegura pasar de un punto extremo a otro punto extremo adyacente (vecino) y mejor que el anterior. En este caso, se puede apreciar que ambos puntos no son adyacentes, ya que las variables básicas del primer punto son x_1, x_4 y x_5 y las del segundo son x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto, en una sola iteración se deberían ingresar dos variables a la base, lo que no es posible.

d) (4 puntos) Indique si el problema

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{f(x), g(x)\} \\ & s.a.\ x \in D \end{array}$$

es equivalente a resolver la siguiente secuencia de etapas:

i) Primero resolver min $f(x)$ s.a. $x \in D$, obteniendo x^*

ii) Luego resolver min $g(x)$ s.a. $x \in D$, obteniendo y^*, y

iii) Luego escoger el max $\{f(x^*), g(y^*)\}$

Justifique su respuesta.

RESPUESTA. El método propuesto no garantiza que entregará la misma solución óptima al problema original. Para esto basta considerar un contraejemplo: $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-1)^2$. La solución óptima al minimizar $f(x)$ es $x^* = 0$, mientras la solución óptima al minimizar $g(y)$ es $y^* = 1$. Ambos entregan un valor asociado igual a cero. Sin embargo la solución óptima al problema de min max$f(x), g(x)$ es $x = \frac{1}{2}$ con un valor óptimo de $\frac{1}{4}$.

e) (4 puntos) Sea P un poliedro en R^N contenido en el cubo convexo unitario, $P \subseteq [0,1]^N$. Sea $x \in P$ un punto del poliedro cuyas coordenadas son enteras, es decir $x_i \in \{0,1\}$ para todo $i = 1, \ldots, N$. Demuestre que x es un punto extremo.

RESPUESTA. Veamos que no es posible encontrar otros dos puntos $y, z \in P \backslash \{x\}$ tal que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Sea $x \in P$ con coordenadas enteras en $\{0, 1\}$. Entonces si tuviéramos dos puntos $y, z \in P \backslash \{x\}$ tales que $x = \lambda y_i + (1-\lambda)z_i$, entonces al menos deben diferir en una componente. Supongamos la i-ésima, luego se tendrá que $x_i = \lambda y_i + (1-\lambda)z_i$, y podemos decir que $y_i = x_i - \varepsilon$ y $z_i = x_i + \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$). Pero bien si $x_i = 0$, entonces $z_i < 0$ con lo que $z \notin P$, análogamente si $x_i = 1$, entonces $y_i > 1$ con lo que $y \notin P$. Por ende no es posible tener dos puntos $z, y \in P \backslash x$ tal que $x = \lambda y_i + (1-\lambda)z_i$. Así se concluye que x es efectivamente un punto extremo de P.

Bono (6 puntos)
Puede responder **una** de las siguientes preguntas para obtener una bonificación extra máxima de 6 puntos.

a) Suponga el siguiente problema de optimización no lineal con variables continuas:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \max & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{s.a.} & \\ & g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Con $f(x_1, \ldots, x_n)$ una función continua. Usted sabe que el siguiente problema admite solución óptima:

$$P_k) \quad \begin{array}{ll} \max & c \cdot x_k \\ \text{s.a.} & \\ & g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j \quad \forall j = 1, ..., n \end{array}$$

con cualquier $k = 1, \ldots, n$ y cualquier valor escalar de c. Demuestre que P) admite solución óptima.

RESPUESTA: El dominio es cerrado (sólo desigualdades no estrictas), la función objetivo es continua, el dominio es distinto del vacío (pues los problemas P_k tienen solución óptima con el mismo dominio). Falta demostrar que el dominio es acotado, para ello podemos considerar los siguientes problemas que son casos particulares de los problemas P_k:

$$\begin{array}{ll} \max & x_k \\ \text{s.a.} & \\ & g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j \quad \forall j = 1, ..., n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & x_k \\ \text{s.a.} & \\ & g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j \quad \forall j = 1, ..., n \end{array}$$

Como ambos problemas admiten solución, entonces cada una de las variables está acotada superior e inferiormente para dicho dominio. Luego, el dominio es acotado, y por lo tanto P) admite solución óptima

b) Suponga que se ha resuelto un problema de programación lineal, siendo su solución óptima única. Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

RESPUESTA: Supongamos que x_j es variable no básica en la solución óptima. Si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor:

$$\min_{\bar{a_{ij}}>0} \left\{ \frac{\bar{b_j}}{\bar{a_{ij}}} \right\} = \frac{\bar{b_p}}{\bar{a_{pj}}}$$

Sea $\bar{c_j} > 0$ el costo reducido de x_j en la última iteración (última forma canónica). Luego, al ingresar x_j a la base, la función objetivo aumentará en:

$$\bar{c_j} \cdot \frac{\bar{b_p}}{\bar{a_{pj}}} \qquad (1)$$

Para toda variable no básica se debe obtener el resultado (1). El menor de estos resultados determinará la variable que ingresará a la base, asegurando así que el aumento en la función objetivo es el menor entre todos los posibles. La variable que sale de la base se determina con el procedimiento de salida del algoritmo de simplex. Así, el procedimiento asegura la obtención de la solución básica factible pedida.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (8 puntos)

Considere el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 3x & + & 2y & & & & \\ s.a: & x & + & y & + & 5 & \geq & 0 \\ & 3x & - & y & + & 3 & \geq & 0 \\ & -2x & + & 3y & + & 10 & \geq & 0 \end{array}$$

a) (2 puntos) Haga el gráfico del problema.

b) En base a la solución gráfica del problema indique:

i) (1 punto) Solución óptima y valor óptimo.

ii) (1 punto) Restricciones activas e inactivas.

iii) (1 punto) Holguras asociadas a cada restricción.

c) (3 puntos) ¿Cuál es el rango de c_1, el coeficiente de x en la función objetivo, que hace que el problema no tenga solución?

Solución:

a) (2 puntos) El gráfico de la Figura 2 se muestra la solución del problema.

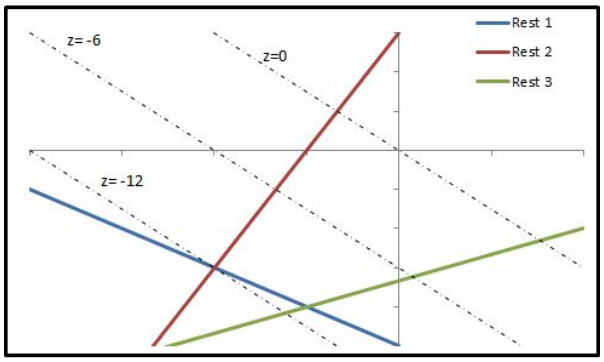


Figura 2: Gráfico pregunta 2, parte A.

En este gráfico se presentan las tres restricciones debidamente coloreadas y tres curvas de nivel para $z = 0$, $z = -6$ y $z = -12$.

b) En base a la solución gráfica del problema indique:

i) (1 punto) La solución óptima se observa en el punto de intersección de la primera y segunda restricción, es decir en $x = -2$, $y = -3$. El valor óptimo es -12.

ii) (1 punto) Las restricciones activas en el punto son la primera y la segunda. La tercera está inactiva.

iii) (1 punto) La holgura de las restricciones 1 y 2 es cero pues están activas en el óptimo. La holgura de la tercera restricción es $10 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 5$.

c) (3 puntos) Las curvas de nivel actuales tienen una pendiente de $\frac{-2}{3}$. Si aumenta el coeficiente c_1, las curvas de nivel reducen su pendiente manteniendo su valor negativo, es decir se vuelven más *verticales*. En ese caso la solución óptima no cambia.

Analicemos ahora que pasa si el coeficiente c_1 baja. En el rango $2 \leq c_1 \leq 3$ la solución óptima no cambia. En el rango $-\frac{4}{3} \leq c_1 \leq 2$ la solución óptima pasa a ser la intersección de la primera y tercera restricción. Si $-\frac{4}{3} \leq c_1$ entonces el problema deja de tener solución pues el valor óptimo no tendría cota.

Parte B (12 puntos)

Usted cuenta con la siguiente información sobre un problema de programación lineal en variables continuas que intentó resolver hace un tiempo y que nuevamente intentará resolver. Como ha pasado tanto tiempo, usted no tiene un registro del problema, sin embargo, recuerda perfectamente que la función objetivo original, en su forma estándar es $-3x_1 - 2x_2$, que todas las restricciones originales eran de desigualdad no estricta, y que las matrices B^{-1} y $\bar{R}$ (llamada $\bar{D}$ en algunas secciones del curso) son:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, de la vez que usted resolvió este problema sabe que un punto extremo de éste está dado por $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 0$.

a) (7 puntos) Con la información anterior construya la forma estándar del problema que desea resolver y que ha olvidado.

b) (5 puntos) Utilice como punto de partida el punto extremo que usted recordó, y encuentre la solución óptima del problema utilizando el algoritmo simplex.

Solución:

a) Calculemos B:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mapsto B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ahora obtengamos R usando $\bar{R}$.

$$\bar{R} = B^{-1}R \mapsto R = B\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mapsto R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mirando la función objetivo se obtiene información respecto a que las variables x_1 y x_2 no pueden ser variables de holgura (su costo es distinto de 0), y como además se menciona que las restricciones originales son de desigualdad no estricta, entonces se tienen dos variables de

holgura (las filas de B indican que son dos restricciones). Luego, la primera columna de B acompaña a x_3 y la segunda a x_1. La primera columna de R corresponde a x_2 y la segunda a x_4.

Falta determinar el vector del lado derecho b. Para ello, se tiene que $x_B = \bar{b} = B^{-1}b$, entonces:

$$x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \bar{b} = B^{-1}b \mapsto b = B\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, se tiene toda la información para construir el problema en forma estándar. Este queda:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{mín} & -3x_1 & - & 2x_2 & & & & & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 9 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Utilice como punto de partida el que usted recordó y encuentre la solución óptima del problema utilizando el algoritmo simplex.

Iteración 1:

- ◇ Criterio de Optimalidad.

$$\begin{pmatrix} \bar{c_2} & \bar{c_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Luego, la solución no es óptima pues uno de los costos reducidos es negativo.

- ◇ Criterio de Entrada.
  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, solo una lo tiene, luego entra la base x_2.

- ◇ Criterio de salida.
  Para ver que variable sale de la base se debe utilizar el siguiente criterio:

$$\min_{\bar{a_{i2}}>0} = \left\{ \frac{2}{\frac{2}{3}} \right\} = \{3\} \mapsto \text{ sale la variable } x_3.$$

Iteración 2:

Ahora las variables básicas son x_2 y x_1 y las no básicas son x_3 y x_4. Luego B^{-1} es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ahora obtengamos $\bar{R}$:

$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- ◇ Criterio de Optimalidad.

$$\begin{pmatrix} \bar{c_3} & \bar{c_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  Luego, la solución es óptima pues ambos costos reducidos son no negativos. Las coordenadas óptimas son $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 0$ y $x_4^* = 0$, y el valor óptimo de la función objetivo es $z^* = -12$.

Pregunta 3 (20 puntos)

La agencia de respuesta a epidemias de un cierto país necesita planificar la distribución de una medicina antiviral para hacer frente a una epidemia de influenza. Usted está en la primera semana, de un total de T semanas, para las cuales se debe implementar un plan de abastecimiento de dicho antiviral. La zona afectada está atendida por m consultorios los cuales son abastecidos desde n bodegas especiales. Antes de la epidemia, la bodega i dispone de un stock igual a C_i unidades del antiviral. Se ha estimado que en el consultorio j habrá una demanda igual a d_j^t unidades de antiviral en la semana t. Si bien la misión de la agencia es cubrir las necesidades de combate de la enfermedad, también debe ser eficiente en costos. Suponga que c_{ij}^t es el costo unitario de transporte desde la bodega i hasta el consultorio j en la semana t. Asuma que el transporte se realiza en unas pocas horas y para efectos del modelo puede ser considerado instantáneo. Sin embargo, existe una capacidad limitada de transporte semana a semana. Más específicamente, en la semana t, se pueden transportar a lo más L^t unidades de antiviral en total, considerando todos los pares bodega-consultorio. Los consultorios pueden acumular unidades de antiviral en inventario, de una semana para otra, pero en ese caso deben incurrir en un costo por almacenamiento en condiciones de temperatura y humedad controlada (no hay stock inicial de antiviral en los consultorios). Ese costo semanal es de g_j por unidad, para el consultorio j (este costo no lo incurren las bodegas ya que tiene todos sus productos en condiciones controladas y el antiviral no genera costos extras). Asuma que la capacidad total de transporte sobre las T semanas es suficiente para satisfacer la demanda total durante estas T semanas, y que la disponibilidad inicial del antiviral es también suficiente para enfrentar toda la epidemia.

a) (12 puntos) Construya un modelo de Programación Lineal que permita definir la planificación de envíos de antiviral desde las bodegas, semana a semana, de modo que se satisfaga la demanda y las otras restricciones, y el costo total incurrido por el sistema sea lo menor posible.

b) (8 puntos) Suponga ahora que se le informa que el operador logístico que usa la agencia impone como restricción que si en una semana cualquiera se debe enviar alguna cantidad de antiviral desde alguna bodega a algún consultorio, entonces la cantidad enviada debe ser igual al menos a una cantidad Q definida a priori (lote mínimo). Escriba las extensiones que debe hacer a su modelo de la parte a) para representar esta situación.

Solución:

a) Se definen las variables, la función objetivo y las restricciones.

Variables: Definamos las siguientes variables:

x_{ij}^t**:** cantidad transportada de la bodega i al consultorio j en la semana t.
Y_i^t**:** stock disponible de antiviral en la bodega i al final de la semana t.
I_j^t**:** inventario de antiviral en el consultorio j al final de la semana t.

Función objetivo : Se debe minimizar el costo total del plan de abastecimiento del antiviral.

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{j=1}^{n} g_j I_j^t \right\}$$

Restricciones:

R1) Inventario en bodega.

$$Y_i^t = Y_i^{t-1} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t \qquad \forall\ i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T$$

R2) Inventario en consultorio.

$$I_j^t = I_j^{t-1} + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^t - d_{jt} \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T$$

R3) Cantidad máxima de antivirales a transportar semanalmente.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t \leq L^t \qquad \forall\ t = 1, \ldots, T$$

R4) Inventario inicial en bodega y consultorio.

$$Y_i^0 = C_i; \quad I_j^0 = 0, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

R5) Restricción de naturaleza de variables.

$$x_{ij}^t \geq 0, \quad \forall\ i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T$$
$$Y_i^t \geq 0, \quad \forall\ i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T$$
$$I_j^t \geq 0, \quad \forall\ j = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T$$

b) Hay que introducir variables binarias que se relacionen con las variables de flujo y le impongan cotas mínimas.

Sea z_{ij}^t: $\begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij}^t > 0 \text{ con } i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Entonces, basta agregar el siguiente par de conjuntos de restricciones:

$$x_{ij}^t \leq M z_{ij}^t \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, t = 1, \ldots, T$$

$$Q z_{ij}^t \leq x_{ij}^t \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, t = 1, \ldots, T$$

donde M es un número suficientemente grande (por ejemplo, puede ser igual a $\sum_{i=1}^{m} C_i$).