PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquínez

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: Miércoles 22 de noviembre.

La tarea tiene un total de 62 puntos. Se necesitan solamente 60 puntos para llegar al 7.0, pudiendo obtener un 7.2 en caso de tener el puntaje máximo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ Esta Tarea **debe** ser desarrollada por el mismo grupo ya asignado para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ La respuesta debe tener **hojas separadas por pregunta**. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y es decisión del alumno escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenada**. En cada hoja se debe colocar **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Se debe hacer **una entrega independiente por pregunta** y las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas.
- ◇ El plazo es el día Miércoles 22 de noviembre a las 12:30 horas (impostergable). Aquellas Tareas no entregadas hasta la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **NO Entregadas**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría docente de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar cada pregunta en el buzón correspondiente. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ El desarrollo y discusión de la tarea debe ocurrir dentro de cada grupo. La tarea está construida con el propósito de desarrollar aprendizaje colaborativo y para entrenar al alumno antes de cada prueba. No se permite distribuir cada pregunta entre los integrantes del grupo y se espera que el grupo realize un trabajo conjunto. Está permitido discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar y desarrollar sus soluciones. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada por el equipo docente con consecuencias que podrían escalar a la **reprobación del curso** más la denuncia a las autoridades correspondientes (revisar medidas de programa con respecto a faltas a la ética).
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.

Problema 1. (19 puntos)

a) (1 punto) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} P) & \min y(x^2-y^2) & \\ s.a. & x(y-1) & \geq -1 \\ & x & \geq 0 \\ & y & \leq 1 \end{array}$$

¿Puede usted asegurar que este problema admite una solución óptima basado en los teoremas vistos en clase? Explique

b) (1 punto) Analice si los siguientes problemas son equivalentes:

$$P) \quad \min_{x,y} \quad \max\left\{\frac{1}{x^4-y^2}, \frac{1}{|x|+|y|}\right\}$$
$$\begin{array}{lll} s.a. & x^2 & \geq y \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

$$Q) \quad \max_{x,y} \quad \min\left\{x^4-y^2, |x|+|y|\right\}$$
$$\begin{array}{lll} s.a. & x^2 & \geq y \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

c) (2 puntos) Determine si la siguiente función es convexa, cóncava, estrictamente convexa, estrictamente cóncava o ninguna de estas opciones:

$$g(x) = f\left(\lfloor x \rfloor\right)(n+1-x) + f(\lfloor x+1 \rfloor)(x-n) \quad \text{si} \quad n \leq x \leq n+1$$

con $n \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa.

d) (1 punto) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Suponga que se encontró la solución óptima de un problema de optimización en forma estándar con $c < 0$ y que esta solución es única. Entonces, el dominio es necesariamente acotado."

e) (1 punto) Determine cómo encontrar con el algoritmo SIMPLEX casos de:

- ◇ vértices sobredeterminados
- ◇ infactibilidad
- ◇ múltiples soluciones

f) (1 punto) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} P) & \min c^T x & \\ s.a. & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. En el peor de los casos, ¿cuál es el máximo número de iteraciones que podría ejecutar el algoritmo SIMPLEX antes de encontrar la solución óptima (sin considerar las iteraciones de Fase I)?

g) (1 punto) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un problema de optimización lineal es factible, entonces necesariamente su dominio o el dominio de su dual es no acotado".

h) (2 puntos) Demuestre que el costo reducido de las variables de holgura de la solución óptima de un problema de optimización lineal estándar, es igual al valor de las variables duales en negativo.

i) (2 puntos) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Toda solución factible del dominio de un problema de optimización binario es un vértice de la envoltura convexa".

j) (1 punto) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rrcl} P) & \min x_1 - 2x_2 & & \\ s.a. & -4x_1 + 6x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & x & \geq & 0 \\ & x & \in & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

cuya solución óptima de su relajación lineal es: $(x_1, x_2) = (1.5, 2.5)$. Encuentre los cortes de Gomory necesarios para lograr una solución óptima entera.

k) (2 puntos) Considere que está ejecutando el algoritmo de Branch and Bound sobre un problema de optimización entero de maximización, y que en una iteración intermedia del algoritmo queda sólo una rama que no se ha podado ni ramificado aún. Suponga que el incumbente hasta el momento es z_1, que el óptimo de la relajación lineal del problema es z_0 y que el óptimo de la relajación lineal de la rama faltante es z_2. Además, asuma que detendrá el algoritmo cuando el gap sea menor o igual a $\epsilon > 0$.

i) (1 punto) Suponiendo que la rama faltante no debe podarse y que el óptimo del problema entero es z^*, construya todas las posibles desigualdades (estrictas o no estrictas) que relacionen todos los valores entregados.

ii) (1 punto) Indique para los siguientes casos si la rama faltante debe podarse, ramificarse, o si se debe detener el algoritmo:

- $\diamond$ $z_0 - z_1 \leq \epsilon, z_2 > z_1 + \epsilon$
- $\diamond$ $z_2 - z_1 \leq \epsilon, z_2 \geq z_1$
- $\diamond$ $z_0 - z_1 \leq \epsilon, z_2 \leq z_1$
- $\diamond$ $z_2 - z_1 > \epsilon, z_2 \geq z_1$
- $\diamond$ $z_0 - z_1 > \epsilon, z_2 = z_1$

l) (1 punto) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "En un problema de flujo en redes a costo mínimo con $\sum_{i \in N} b_i = 0$, necesariamente existe una solución básica factible".

m) (1 punto) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:"En un problema de flujo en redes a costo mínimo con cota máxima, se puede relajar la restricción de integralidad y no tener un cambio en la solución óptima".

n) (1 punto) Considere el problema de rutas mínimas sobre una red desde el nodo fuente s. Demuestre que si se toma $\pi_s = 0$, entonces $-\pi_i$ será el costo de la ruta mínima entre s e i, con π_i el valor de la variable dual correspondiente al nodo i en el óptimo.

o) (1 punto) Demuestre que si la solución óptima de un problema de flujo en redes a costo mínimo es única, entonces los arcos por los que circula flujo no pueden formar un ciclo.

Solución Problema 1.

a) Se deben comprobar los siguiente puntos:

- $\diamond$ Dominio Cerrado: El dominio es cerrado, pues tiene desigualdades irrestrictas.
- $\diamond$ Dominio no vacío: El origen pertenece al dominio
- $\diamond$ La función objetivo es continua porque es un polinomio de varias variables
- $\diamond$ Dominio no acotado y análisis de límites: EL dominio tiene sólo dos rayos de escape en que $||(x, y)|| = \infty$:

$$h_1 = (0, 1) + t(1, 0), h_2 = (0, 1) + t(0, -1), \forall t \geq 0$$

Para el primer rayo de escape: $\lim_{t\to\infty} 1(t^2-1) \longrightarrow \infty$

Para el segundo rayo de escape: $\lim_{t\to\infty} -t(0-(-t)^2) \longrightarrow \infty$

Con esto, se cumplen todas las condiciones del Teorema "de la Hipótesis Hz se demuestra que el problema tiene al menos una solución óptima.

b) El problema P) es equivalente a:

$$\begin{array}{lccc} P_1) & & \min \mu & \\ s.a. & \mu & \geq & \frac{1}{x^4-y^2} \\ & \mu & \geq & \frac{1}{|x|+|y|} \\ & x^2 & \geq & y \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Ahora,como $\mu \geq 0$ se puede transformar la F.O de P_1) al siguiente problema:

$$\begin{array}{lccc} P_2)) & & \min \dfrac{-1}{\mu} & \\ s.a. & \mu & \geq & \frac{1}{x^4-y^2} \\ & \mu & \geq & \frac{1}{|x|+|y|} \\ & x^2 & \geq & y \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Luego, haciendo la transformación min-max con el negativo de la F.O. y tomando $\mu = 1/\theta$ se tiene que el siguiente problema es equivalente a P_2):

$$\begin{array}{lccc} P_3) & & \max \theta & \\ s.a. & \theta & \leq & x^4-y^2 \\ & \theta & \leq & |x|+|y| \\ & x^2 & \geq & y \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Que finalmente es equivalente al problema:

$$\begin{array}{lccc} P_4) & \max\limits_{x,y} & \min\left\{x^4-y^2, |x|+|y|\right\} & \\ & s.a. & x^2 \geq y & \\ & & y \geq 0 & \end{array}$$

y P_4) es equivalente a Q), con lo que se demuestra que Q) y P) son equivalentes.

c) Se puede considerar $g(x)$ como una función lineal a trazos que "cubre" la función f. Entonces, como f es estrictamente convexa, por definición se tiene que $g(x) \geq f(x)$ para todo x. Ahora, para estudiar la convexidad de $g(x)$ es necesario tomar dos puntos x_1, x_2 tal que $\lfloor x_1 \rfloor = n_1, \lfloor x_2 \rfloor = n_2$ y ponerse en dos casos: $n_1 \neq n_2$ y $n_1 = n_2$

Tomando el primer caso, s.p.g. se puede asumir que $n_1 < n_2$

Supongamos que la función g no es convexa para este caso. Entonces existe un $\bar{\lambda} \in [0,1]$ tal que:

$$g(\bar{\lambda}x_1 + (1-\bar{\lambda})x_2) \quad > \bar{\lambda}g(x_1) + (1-\bar{\lambda})g(x_2)$$

Sea $n_3 = \lfloor \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \rfloor$ con cualquier $\lambda \in [0,1]$ y sea $\mu \in [0,1] : \mu n_1 + (1-\mu)n_2 = n_3$. Nótese que: $n_1 \leq n_3 \leq n_2$. Entonces, la desigualdad anterior implica que el punto $\bar{\lambda}g(x_1) + (1-\bar{\lambda})g(x_2)$ será mayor al tramo de recta $f(n_3)(n_3+1-x)+f(n_3+1)(x-n_3)$ evaluada en el punto $\bar{x} = \bar{\lambda}x_1+(1-\bar{\lambda})x_2$.

Ahora, como f es estrictamente convexa, se tiene que si $n_1 < n_3 < n_2$ necesariamente la combinación convexa entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ será mayor o igual a la combinación convexa entre $f(n_3)$ y $f(n_3+1)$. Matemáticamente:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq \mu f(n_3) + (1-\mu) f(n_3)$$

con $\lambda, \mu \in [0,1]$. Además, por lo que vimos al principio:

$$\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) \geq \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2)$$

con $\lambda, \mu \in [0,1]$. Finalmente, se tienq que:$\bar{\lambda} g(x_1) + (1-\bar{\lambda}) g(x_2)$ es menor que la combinación convexa $\bar{x} < \mu f(n_3) + (1-\mu) f(n_3)$ evaluada en $\bar{x}$, pero esto es menor o igual a $\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$ lo que claramente es una contradicción.
Se puede argumentar equivalentemente para el caso $n_3 = n_1, n_2$, con lo que se demuestra que necesariamente:

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \quad \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$$

con $\lambda \in [0,1]$. En otras palabras, se demostró que $g(x)$ es al menos convexa. Por otro lado, tenemos que si $n_1 = n_2$ el tramo de $g(x)$ que une ambos puntos es una línea recta, es decir, es convexa no estrica. Con lo que finalmente se concluye que $g(x)$ es una función convexa.

d) La afirmación es verdadera. Supongamos que existe una variable x_i no acotada. Entonces, como el problema está en formulación estándar, se tiene que $x \geq 0$. Luego, $c_j x_j \leq 0$ por enunciado, y por lo tanto, si $x_i \to \infty$ entonces $c_i x_i \to -\infty$ y el problema será no acotado siempre que exista al menos una variable no acotada.

e) Se pueden encontrar en las siguientes instancias:

- ◇ Se pueden encontrar vértices sobredeterminados si es que las variables básicas tienen valor 0
- ◇ La infactibilidad se determina si la solución de SIMPLEX Fase I es tal que su valor objetivo es positivo
- ◇ Se tiene un caso de múltiples soluciones, si es que en una iteración del algoritmo SIMPLEX (intermedia o final) se encuentra un costo reducido de alguna variable básica igual a 0

f) La máxima cantidad de iteraciones que puede realizar el algoritmo SIMPLEX sería recorrer todos los vértices factibles del dominio. Es decir, en el peor de los casos se realizarán $\binom{n}{m} - 1$ iteraciones.

g) Esta afirmación es verdadera. Si suponemos que el dominio del primal es no acotado, entonces con la misma demostración de la Tarea 3 ejercicio 1.d se puede demostrar que el dual es no acotado. Si suponemos que el dual es acotado, el caso es análogo. Con lo que se demuestra que la afirmación es verdadera

h) La estandarización de un problema lineal queda (s.p.g. supongamos que hay una variable h y que esta se encuentra en la fila k):

$$\begin{aligned} P) \qquad & \min c^T x \\ s.a. \quad [A|e_k](x,h) &= b \\ x, h &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, llamando $\bar{c_h}$ al costo reducido de la variables h, B a la base óptima de P) y $(B^{-1})_k$ su k-ésima columna, se tiene que:

$$\bar{c_h} = c_h^T - c_B^T B^{-1} e_k = -c_B^T (B^{-1})_k$$

Ahora, notemos que si $y = c_B^T B^{-1}$, entonces el valor de la función objetivo será: $b(c_B^T B^{-1}) = c_B^T (B^{-1} b)$ que es precisamente el valor óptimo del primal, por lo que $y = c_B^T B^{-1}$

Con lo que se demuestra que el valor del costo reducido de las variables de holgura (en negativo) es el valor de las variables duales en el óptimo.

i) Esta afirmación es verdadera. La envoltura convexa es el poliedro que envuelve a todas las soluciones enteras factibles y cuyos vértices son puntos enteros. Entonces, la envoltura convexa de un problema binario tendrá sólo vértices binarios, por lo tanto, basta demostrar que un punto binario no es combinación convexa de otros puntos binarios. Sea $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ y supongamos que $\bar{x}$ es combinación convexa de $x_1, x_2 \in \{0,1\}^n$ y que $\bar{x} \neq x_1, x_2$. Entonces existe $\lambda \in (0,1)$:

$$x_1\lambda + x_2(1-\lambda) = \bar{x} \longrightarrow \bar{x}^i = \lambda x_1^i + (1-\lambda)x_2^i, \forall i = 1, \ldots, n$$

Sin embargo, recordemos que $\bar{x}_i \in \{0,1\}, \forall i = 1, \ldots, n$, por lo tanto, la única posibilidad para que se cumpla la igualdad concluida es que $x_1 = x_2$. (Esto porque $\lambda \neq 0, 1$, entonces si $x_1^i \neq x_2^i$ $\bar{x}_i$ no será binario). Finalmente, con un argumento análogo se demuestra que $\bar{x}$ no puede ser combinación convexa de vértices binarios. Un vértice se define como cualquier punto perteneciente al dominio tal que no puede ser combinación convexa de otras soluciones, por lo tanto, si $\bar{x}$ pertenece a la envoltura convexa (es decir, es factible), entonces $\bar{x}$ es vértice de esta misma.

j) Primero, es necesario plantear el problema en su forma estándar:

$$\begin{array}{rrcl} P) & \text{mín } x_1 - 2x_2 & & \\ s.a. & -4x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 9 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = & 4 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Pivoteando se puede despejar la solución óptima:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 0.1x_3 + 0.6x_4 & = & 1.5 \\ x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4 & = & 2.5 \end{array}$$

Agregando un corte de Gomory a la segunda restricción:

$$(0.1 - \lfloor 0.1 \rfloor)\, x_3 + (0.4 - \lfloor 0.4 \rfloor)\, x_4 \geq 2.5 - \lfloor 2.5 \rfloor \rightarrow 0.1x_3 + 0.4x_4 \geq 0.5$$

El nuevo problema es:

$$\begin{array}{rrcl} P) & \text{mín } x_1 - 2x_2 & & \\ s.a. & -4x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 9 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = & 4 \\ & x_3 + 4x_4 - 10x_5 & = & 5 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

(Hasta aquí se considerará como buena la respuesta, se puede haber usado la restricción 1 también)

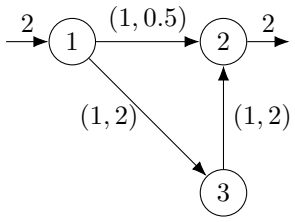
k) *i)* $z_0 \geq z_2 \geq z^* > z_1$
Es importante notar que la última desigualdad es estricta.

ii)
- ◇ Esta situación es imposible, pues si $z_2 > z_1$ necesariamente $z_0 \geq z_2 > z_1$ y alguna de las dos desigualdades no se cumplirá.
- ◇ El algoritmo se debe detener porque se cumple el criterio de parada
- ◇ El algoritmo se debe detener porque la primera desigualdad implica que $z_2 - z_1 \leq \epsilon$, es decir, se cumple el criterio de parada
- ◇ La primera desigualdad implica que $z_2 > z_1$, por lo que la rama faltante debe ramificarse.

◇ El algoritmo Branch and Bound podará la rama faltante por el criterio del incumbente y se detendrá.

l) Esta afirmación es falsa. El grafo puede ser no conexo.

m) Esta afirmación es falsa. Basta tomar el siguiente contrajemplo:



En que los valores sobre cada arco son $(costo, cota)$. En la solución óptima el flujo x_{12} será igual a 0.5, por lo que no se puede relajar la restricción de integralidad. (También se puede argumentar que la afirmación es verdadera si se consideran cotas enteras)

n) Sea R la unión de arcos que forma la ruta mínima entre s y t. Tomando el problema de rutas mínimas como uno de flujo a costo mínimo con una unidad de oferta/demanda el costo reducido de cada arco (i, j) que pertenezca a la ruta mínima será: $\bar{c_{ij}} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \rightarrow c_{ij} = \pi_i - \pi_j$. Finalmente, el costo de la ruta R será:

$$c_R = \sum_{(i,j)\in R} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in R} \pi_i - \pi_j = \pi_s - \pi_j$$

Finalmente, si $\pi_s = 0 \longrightarrow c_R = -\pi_t$ y se demuestra lo pedido.

o) Supongamos que circula flujo por un ciclo en la solución óptima. Esto significa que existen dos rutas distintas, digamos R_1 y R_2 que unen los nodos s y t. Ahora supongamos que $c_{R_1} > c_{R_2}$ s.p.g, entonces: $c_{R_1} = \sum_{(i,j)\in R_1} c_{ij} = \pi_s - \pi_t > c_{R_2} = \sum_{(i,j)\in R_2} c_{ij} = \pi_s - \pi_t$ (por lo demostrado en *n*)), lo que es imposible. Entonces, necesariamente $c_{R_1} = c_{R_2}$, pero como $x_a \geq 1, \forall a \in R_1 \wedge x_b \geq 1, \forall b \in R_2$ podemos tomar la solución $x'_a = x_a + 1, \forall a \in R_1 \wedge x'_b = x_b - 1, \forall b \in R_2$, que también será factible dado que las demandas y ofertas de los nodos se mantienen igual y además seguirá siendo óptima ya que $c_{R_1} = c_{R_2}$, pero esto niega el supuesto del enunciado de que existe una solución óptima única. Finalmente se demuestra lo pedido.

Problema 2. (15 puntos)

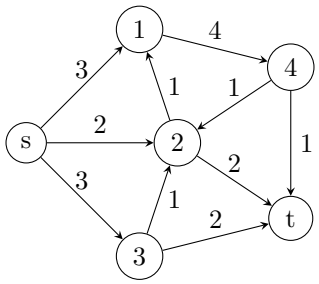
a) (3 puntos) Un taller de producción industrial cuenta con una máquina que debe ser reemplazada periódicamente, pues el uso provoca su desgaste. Mientras más vieja es esta máquina, se vuelve más cara de mantener y operar, y reduce su valor de reventa. Asuma que el taller debe operar con una máquina en todo momento por T años. Sea $t \in \{1, \ldots, T\}$, el índice de cada año. Se tiene la siguiente información: (1) Comprar una máquina nueva cuesta f_t dólares al comienzo del año $t = 1, \ldots, T$. (2) La ganancia por reventa de una máquina usada por x años es $r_{t,x}$ dólares al inicio del año t.(3) El costo anual de manutención de una máquina con x años de uso es m_x dólares. Asuma que el taller posee una máquina nueva al inicio del año 1.

Se le pide lo siguiente:

i) (1 punto) ¿Cuál es el costo (o beneficio dependiendo del signo) de comprar una máquina a comienzos del año $t_1 : 1 \leq t_1 < T$ y de operarla hasta venderla a comienzos del año $t_2 > t_1$ durante los años $t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2 - 1$?

ii) (2 puntos) Plantee un problema que determine una política de reemplazo de la máquina a mínimo costo **como un problema de ruta mínima**. Su modelo debe determinar en qué minutos reemplazar la máquina por una nueva de manera que el costo total sea mínimo. Defina nodos, arcos, costos por arco, nodos origen y destino.

b) (4 puntos) Considere el siguiente grafo, en que los números sobre los arcos indican sus respectivas cotas máximas:



i) (2 puntos) Encuentre el flujo máximo que puede circular entre s y t utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson y el corte de mínima capacidad que determina el cuello de botella.

ii) (2 puntos) Indique todos los cortes (s,t) y determine que la capacidad del corte mínimo es igual al flujo encontrado en *i*).

c) (6 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1 - 1} + \frac{x_2^2}{3} - x_1 - 2x_2$$

i) (1 puntos) ¿En qué región de x_1, x_2 esta función es convexa?

Para los ejercicios *ii*) y *iii*) no es necesario que desarrolle todo el detalle de los cálculos, para esto puede utilizar un software de propósito matemático. Considere como criterio de término $\|x^{k+1} - x^k\| \leq 0.05$.

ii) (3 puntos) Usando como punto de partida el origen, determine el mínimo de la función. Para esto, use el método de Newton básico (el que no resuelve el problema de minimización unidimensional).

iii) (2 puntos) Considere la siguiente función:

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 4)(x_1 - 3) + 2(x_2 - 6)(x_2 + 4)(x_2 + 8)$$

Usando como punto de partida $(x_1, x_2) = (1, -2)$, encuentre un punto mínimo (local o global) de g con el método del gradiente.

d) (2 puntos) Encuentre un contraejemplo que invalide cada una de las siguientes afirmaciones falsas:

- x^* es mínimo local de $f \iff H_{f(x^*)}$ es semidefinida positiva
- x^* es punto crítico de f y $H_{f(x^*)}$ es definida positiva $\iff$ x^* es mínimo local de f
- $H_{f(x)}$ es definida positiva, para todo $x \iff$ f es estrictamente convexa

Con $f \in C^2$ y H_f la matriz Hessiana de f.

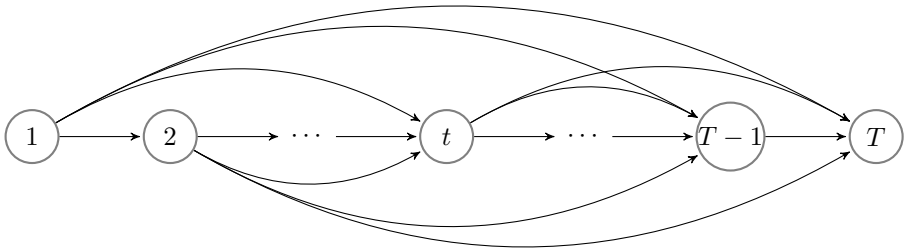
Solución Problema 2.

a) *i*) Sea $c(t_1, t_2)$ el costo pedido, entonces:

$$c(t_1, t_2) = f_{t_1} - r_{t_2, t_2 - t_1} + \sum_{t=1}^{t_2 - t_1} m_x$$

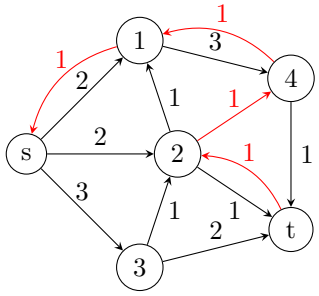
Se asume que si se vende una máquina en t, también se paga costo de manutención por el año anterior, pero como no está explícito en el enunciado, también se considerará bueno si se asume que no hay que pagarlo.

ii) Se puede plantear el siguiente grafo:

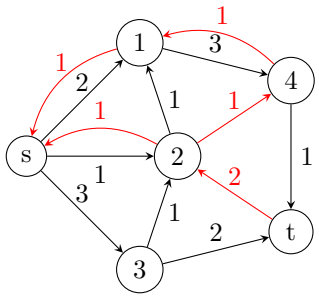


En que cada nodo corresponde a un período, y los costos de cada nodo serán $c_{ij} = c(i, j)$.

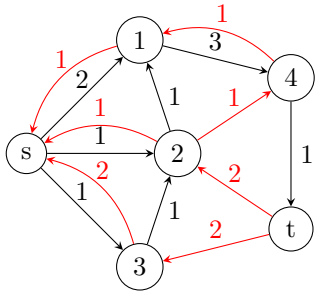
b) *i*) Para esto, debemos empezar a mandar unidades a través del grafo e ir construyendo el grafo residual. Primero, elegimos cualquier ruta, supongamos la ruta s-1-4-2t y mandamos una unidad por ahí. El grafo residual sería:



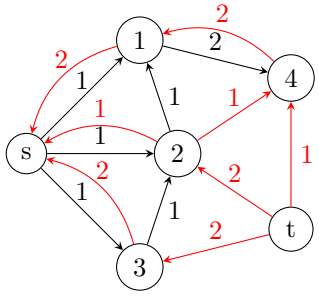
Elegimos ahora la ruta s-2-7 y mandamos 1 de flujo



Elegimos ahora la ruta s-3-t y mandamos 2 de flujo



Elegimos ahora la última ruta disónible s-1-4-t y mandamos 1 de flujo



Finalmente, no queda ninguna ruta entre s y t, el flujo máximo es de 5 y el corte de capacidad mínima es: $(\{s, 1, 2, 3, 4\}, \{t\})$

ii) Los cortes del grafo y su respectiva capacidad se enumera a continuación:

nodos $\in S$	nodos $\in T$	Valor del corte
s	1,2,3,4,t	8
s,2	1,3,4,t	9
s,3	1,2,4,t	8
s,4	1,2,3,t	10
s,1,2	3,4,t	9
s,1,3	2,4,t	9
s,1,4	2,3,t	7
s,2,3	1,4,t	8
s,2,4	1,3,t	10
s,3,4	1,2,t	11
s,1,2,3	4,t	8
s,1,2,4	3,t	6
s,1,3,4	2,t	7
s,2,3,4	1,t	9
s,1,2,3,4	t	5

De entre todos los cortes, el de menor capacidad es el corte $(\{s, 1, 2, 3, 4\}, \{t\})$ con valor de 5 y se verifica la solución obtenida en *i)*.

c) *i)* Para encontrar la región en que f es convexa, es necesario calcular su matriz Hessiana:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2 e^{x_1-1} - 1 \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = e^{x_1-1} + \frac{2x_2}{3} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = x_2 e^{x_1-1} \qquad \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{x_1-1}$$

Finalmente, se tiene que la matriz Hessiana de f es:

$$H_f = \begin{bmatrix} x_2 e^{x_1-1} & e^{x_1-1} \\ e^{x_1-1} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

El primer subdeterminante es no negativo si: $x_2 e^{x_1-1} \geq 0 \iff x_2 \geq 0$, y el determinante de la matriz completa es no negativo si:

$$\frac{2}{3} x_2 e^{x_1-1} - e^{2(x_1-1)} \geq 0 \iff x_2 \geq \frac{2e^{x_1-1}}{3}$$

La segunda condición es más restrictiva que la primera, por lo que f será convexa sólo en la región: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \frac{2e^{x_1-1}}{3}\}$

ii) Las ecuaciones para realizar el método de Newton:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [H_{f(x)}]^{-1}\nabla f(x)$$

En este caso específico corresponden a:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -e^{x_1^{(k)}-1} \\ -e^{x_1^{(k)}-1} & x_2^{(k)}e^{x_1^{(k)}-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(k)}e^{x_1^{(k)}-1} - 1 \\ e^{x_1^{(k)}-1} + \frac{2}{3}x_2^{(k)} - 2 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}x_2^{(k)}e^{x_1^{(k)}-1} - \left(e^{x_1^{(k)}-1}\right)^2 \right)^{-1}$$

Finalmente, los resultados son:

k	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	-0.489474	2.71828	-1.87112
2	0.255469	2.4098	-1.99481
3	0.148178	2.364	-2.00478
4	0.138821	2.36603	-2.00481
5	0.138821	2.36603	-2.00481
⋮	⋮	⋮	⋮

iii) Las ecuaciones para realizar el método del gradiente son las siguientes:

$$d^k = -\nabla f(x^k) = -\left(3(x_1^k)^2 + 6x_1^k - 10, 6(x_2^k)^2 + 24x_2^k - 80\right)$$

$$\lambda^k : \min_{\lambda^k \geq 0} f(x^k + \lambda^k d^k), x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$$

Finalmente, los resultados son:

k	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	1	-2	-222
1	0.97261	2.16316	-510.62581
2	0.97261	2.16319	-510,62581
⋮	⋮	⋮	⋮

Finalmente, el problema convergió en dos iteraciones.

d) Se tienen los siguientes contraejemplos:

- $\diamond$ x^* es mínimo local de $f \iff H_{f(x^*)}$ es semidefinida positiva
  Se puede tomar el caso de $f(x) = x^3$, en que $H_f = [6x]$ es semidefinida positiva en $x = 0$, pero este punto no es un mínimo local.
- $\diamond$ x^* es punto crítico de f y $H_{f(x^*)}$ es definida positiva $\iff$ x^* es mínimo local de f
  Un contraejemplo puede ser $f(x) = x^4$, en que $H_f(x) = 12x^2$ no es definida positiva en $x = 0$, pero este punto sí es un mínimo local.
- $\diamond$ $H_{f(x)}$ es definida positiva, para todo $x \iff f$ es estrictamente convexa
  Nuevamente, se puede considerar $f(x) = x^4$ que no es definida positiva en $x = 0$, pero sí es estrictamente convexa.

Problema 3. (15 puntos)

a) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización.

$$P) \qquad \text{máx}\, c^T x$$

$$s.a. \quad (x-\bar{x})^T Q(x-\bar{x}) \quad = \quad 1$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica y definida positiva, y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es fijo y conocido. Determine la solución óptima de este problema.

b) (4 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} P) & \text{mín}(x_1+3)^2+(x_2-1)^2 & & \\ s.a. & x_2+x_1^2 & \leq & 5 \\ & x_2-e^{-x_1/5} & \geq & 0 \\ & x_1 & \leq & 0 \end{array}$$

i) (1 punto) Grafique el problema original, indicando claramente las restricciones y la región de soluciones factibles.

ii) (1 punto) Haciendo uso del gráfico, encuentre la solución y el valor óptimo del problema. Indique claramente las curvas de nivel de la función objetivo.

iii) (2 puntos) Corrobore gráficamente que en la solución óptima encontrada en *ii*) se cumplen las condiciones de KKT, y que no se cumplen en los vértices $(0,1)$ y $(0,5)$.

c) (6 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} P) & \text{mín}\, 2x_1^2+x_2^2-3x_1x_2 & & \\ s.a. & x_1^2+x_2^2 & \leq & 4 \\ & 2x_1-x_2 & \leq & 3 \\ & x_1x_2 & = & 1 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

i) (1 punto) Plantee el langrangeano del problema y sus respectivas condiciones de KKT.

ii) (3 puntos) Encuentre todos los puntos que cumplen las condiciones descritas en *i*).

iii) (2 puntos) Determine con las condiciones de segundo orden si los puntos encontrados en *ii*) son mínimos locales de P).

d) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización P, en que f es no lineal.

$$\begin{array}{lrcl} P) & \text{mín}\, f(x) & & \\ s.a. & & & \\ & Ax & \leq & b \end{array}$$

Investigue y comente sobre algún algoritmo que permita resolver P). No es necesario que entre en el detalle matemático, sino sólo explicar a grande ragos cómo funciona y cuál es el concepto detrás del algoritmo.

Solución Problema 3.

a) El Lagrangeano del problema es:

$$L(x,\lambda) = c^T + \lambda((x-\bar{x})^T Q(x-\bar{x})-1)$$

Tenemos que calcular el gradiente de este Lagrangeano:

$$\nabla_x L(x,\lambda) = c + 2\lambda Q(x-\bar{x})$$

Igualando a 0 la ecuación anterior obtenemos que:

$$x^* = \bar{x} - \frac{1}{2\lambda} Q^{-1} c$$

y reemplazando $(x^* - \bar{x})$ en la restricción tenemos:

$$(x^* - \bar{x}) Q (x^* - \bar{x}) = \frac{1}{a\lambda^2} c^T Q^{-1} Q Q^{-1} c = 1$$

de donde

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^T Q^{-1} c}$$

y basta elegir el λ que dé el mejor valor de la función objetivo.

b) *i)* El gráfico del problema es el siguiente:

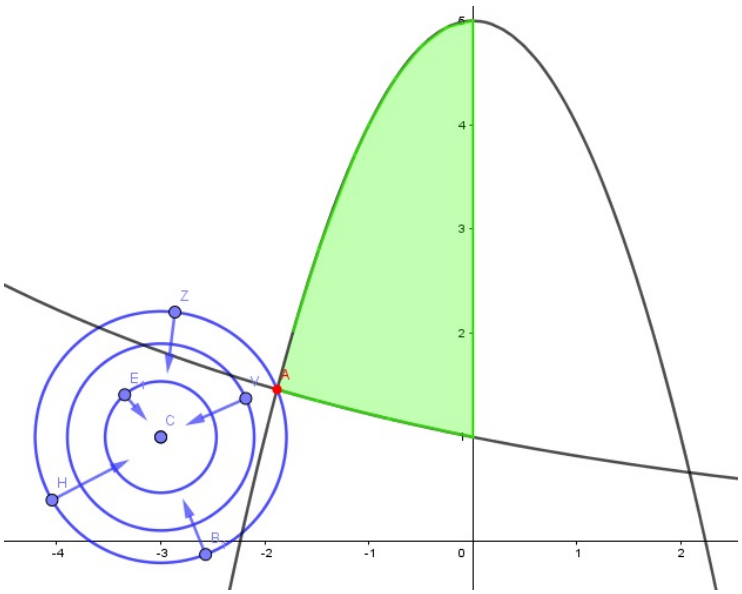


Figura 1: Dominio 3.b)

La región de soluciones factibles se encuentra en verde, y en azul se encuentran las curvas de nivel de la funció objetivo.

ii) Gráficamente se obtiene que la solución se encuentre en la intersección de las dos restricciones, es decir: $5 - x_1^2 = e^{-\frac{x_1}{5}} \rightarrow (x_1, x_2) = (-1.88, 1.46)$

iii) Los gradientes correspodientes serán:

$$\nabla f(x) = (2x_1 + 6, 2x_2 - 2), \nabla g_1(x) = -(2x_1, 1), \nabla g_2(x) = (e^{-x_1/5}, -1), \nabla g_3(x) = (1, 0)$$

Los gradientes respectivos para los tres puntos serán:

- x^*: $-\nabla f = (-2.24, -0.92), \nabla g_1 = (-3.76, 1), \nabla g_2 = (-1.45, -1)$
- $(0, 1) : -\nabla f = (-6, 0), \nabla g_2 = (1, -1), \nabla g_3 = (1, 0)$
- $(0, 5) : -\nabla f = (-6, -8), \nabla g_1 = (0, 1), \nabla g_3 = (1, 0)$

Gráficamente se ve así:

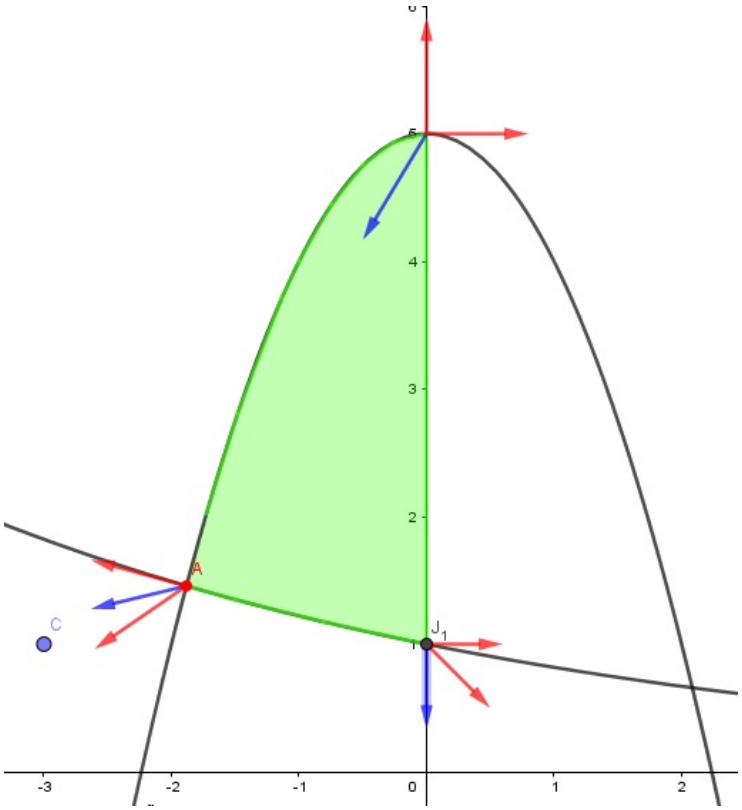


Figura 2: Dominio 3.b.iii)

En rojo se encuentran los gradientes de las restricciones activas, y en azul el negativo de los gradientes de la función objetivo. Lo que dicen las condiciones de KKT es que en un punto el negativo del gradiente de la función objetivo pertenecerá al cono formado por los gradientes de las restricciones activas si y solo si ese punto es el óptimo (excepto en el caso de puntos interiores), y esto es precisamente lo que se puede ver en el gráfico.

c) *i*) El Lagrangeano del problema es:

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - 3) + \lambda_3(x_1x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0 \rightarrow 4x_1 - 3x_2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 x_2 \geq 0 \tag{1}$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow x_1 \left(4x_1 - 3x_2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 x_2\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0 \rightarrow 2x_2 - 3x_1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 + \lambda_3 x_1 \geq 0 \tag{3}$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_2(2x_2 - 3x_1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 + \lambda_3 x_1) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \tag{5}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0 \rightarrow 2x_1 - x_2 - 3 \leq 0 \tag{7}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \rightarrow \lambda_2(2x_1 - x_2 - 3) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 \rightarrow x_1 x_2 - 1 = 0 \tag{9}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{10}$$

ii) Para esto, se deben considerar diversas posibilidades:
Por la restricción (9), $x_1, x_2 \neq 0$. Entonces, para cumplir las restricciones (6) y (8), primero se considerará:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, 2x_1 - x_2 - 3 = 0$$

Con lo que $x_1^2 + x_2^2 - 4 = x_1^2 + (2x_1 - 3)^2 = 5x_1^2 - 6x_1 + 9 = 0$, pero esta ecuación no tiene solución real, por lo que las condiciones propuestas son infactibles. Ahora, se considera:

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0, \lambda_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17},$$

Al último resultado se llegó considerando nuevamente (9), pero sólo es positivo uno de los resultados, por lo tanto, $(x_1, x_2) = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \frac{4}{3+\sqrt{17}}\right)$
De (4) y (2):

$$2\left(\frac{4}{3+\sqrt{17}}\right) - 3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) - \lambda_2 + \lambda_3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) = 0$$

$$4\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) - 3\left(\frac{4}{3+\sqrt{17}}\right) + 2\lambda_2 + \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\lambda_3 = 0$$

de esto $\lambda_2 = -3.22, \lambda_3 = 0.56$, pero por la restricción (10) esto es infactible. Por último, se considera:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

Entonces, reemplazando (9) en (1) y (9) en (3):

$$4x_1 - \frac{3}{x_1} + \lambda_3 x_2 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 3 - 4x_1^2$$

$$-3x_1 + \frac{2}{x_1} + \lambda_3 x_1 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 3 - \frac{2}{x_1^2}$$

Igualando se obtiene:

$$(x_1, x_2) = (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}), \lambda_3 = 3 - \sqrt{8}$$

Finalmente, reemplzando estos valores en las restricciones (5) y (7):

$$-1.8787 \leq 0, -2.5 \leq 0$$

Por lo que cumple las restricciones y el punto $(x_1, x_2) = (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2})$ es el único que cumple las restricciones de KKT.

iii) Reduciendo el problema sólo a la tercera restricción (pues en el óptimo las otras no están activas), el Hessiano del Lagrangeano es:

$$H_L = \begin{bmatrix} 4 & -3 + \lambda_3 & x_2 \\ -3 + \lambda_3 & 2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Evaluado en el óptimo será:

$$H_L = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{8} & \sqrt[4]{2} \\ -\sqrt{8} & 2 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \sqrt[4]{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no es semi-definida postiva, porque el subdeterminante de de 3×3 de H_L es negativo, por lo tanto, no se puede afirmar que el punto encontrado sea mínimo local. Entonces, es necesario evaluar si H_L es semidefinido positivo para las direcciones factibles, es decir:

$$d^T H_L d \geq 0$$

con d cualquier dirección factible. (Hasta acá el problema se considera como bueno)

d) Dos posibles algoritmos para resolver el problema propuesto son:

- ◇ Método de Direcciones Proyectadas y Conjuntos Activos: El método consiste en moverse en la dirección del negativo de la proyección del gradiente de f, que es una dirección factible. A continuación se muestra un ejemplo de la proyección de f y se ve que efectivamente es dirección de descenso.

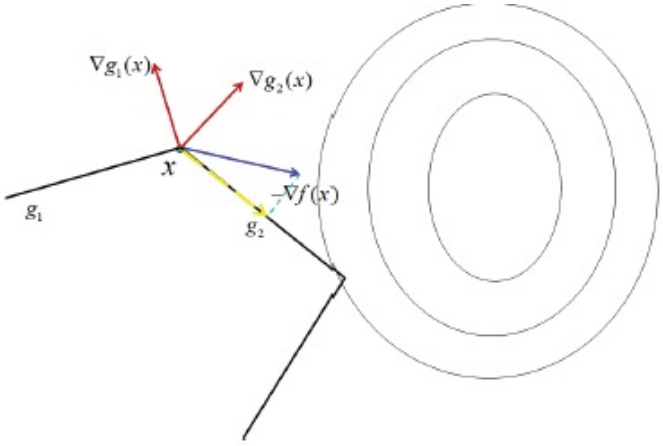


Figura 3: Método de Direcciones Proyectadas

- ◇ Método de Frank Wolfe: El método consiste en minimizar la aproximación del primer orden de la función objetivo. Esta aproximación es igual a $f(x) + \nabla f(x)^T u$, pero si consideramos que x_k es constante dentro de cada iteración, el problema a resolver en cada iteración equivale a:

$$P') \qquad \text{mín } \nabla f(x^k)^T u$$

$$s.a.$$
$$Au \leq b$$

Cualquier respuesta que haya explicado algo similar (sin necesariamente haber entrado en detalles) a estos algoritmos, será considerada buena. También existen otras alternativas de algoritmos.

Problema 4. (13 puntos)

La Cooperativa de Regadío del Valle está interesada en construir un embalse en un valle como el de la figura, entre los pueblos A y B.

Es posible simplificar la geografía del valle como la de dos planos que se intersectan en una recta por la que fluye el río y sobre la cual están ubicadas A y B. En este contexto, el valle se inicia en el km 0, y en el km 10 se encuentra A y en el km 30 se encuentra B (sobre la línea recta en la que fluye el río).

El objetivo de la Cooperativa es retener el agua que trae el río año a año durante la temporada de otoño-invierno, ya que en la temporada de primavera-verano hay sequía total y es en esa época que se debe regar las plantaciones cercanas. Esto significa que no se puede empezar a utilizar el agua mientras se llena la presa, sino que debe terminar de entrar agua para empezar a descargar. Suponga que se hizo un estudio fluvial de la cantidad de agua que traerá el río durante los T próximos años, y se determinó que serán d_t m^3 en el año t, con $t = 1, \ldots, T$. Considere que el beneficio por m^3 retenido de agua es $\$b$.

Por otra parte, el costo de construir la represa puede dividirse en tres partes: un costo fijo $\$c_f$, un costo proporcional a la superficie inundada entre los dos planos respectivos del valle de c_s ($\$/m^2$) y un costo proporcional al volumen de la pared del embalse c_v ($\$/m^3$).

La pared del embalse debe ser suficientemente ancha para sostener el peso de todo el embalse. Se le informa que su grosor debe crecer con la raíz del volumen de agua sostenida de acuerdo a la siguiente relación $grosor[m] = k\sqrt{volumen[m^3]}$. Asuma que la presa se construye perpendicular (en el sentido de la gravedad) y con un grosor uniforme en cada punto.

Además, hay que agregar el costo de transporte de los materiales que deben subir desde B. El costo será proporcional a las toneladas de material que haya que transportar para construir la pared del embalse y a la distancia recorrida. Considere un costo de c_T ($\$/m^3/km$).

Por restricciones ambientales y de seguridad es necesario ubicar el embalse y su zona inundada a más de 1 km de cada pueblo.

La Cooperativa le ha pedido a usted como ingeniero diseñar la presa (su altura) y ubicación en el valle, de modo de maximizar las ganancias de la empresa respetando las restricciones ambientales y de construcción. Las ganancias de la empresa se consideran como los beneficios del agua retenida por la presa cada año menos todos los costos asociados. Considere que la cantidad de agua que la presa puede retener está limitada por su altura, es decir, si el agua d_t que llegó en el año t sobrepasa el volumen delimitado por el valle y la altura de la presa, esta agua se pierde. Por último, asuma que la decisión de construir la presa se toma sólo una vez y empieza a estar operativa en el año 1.

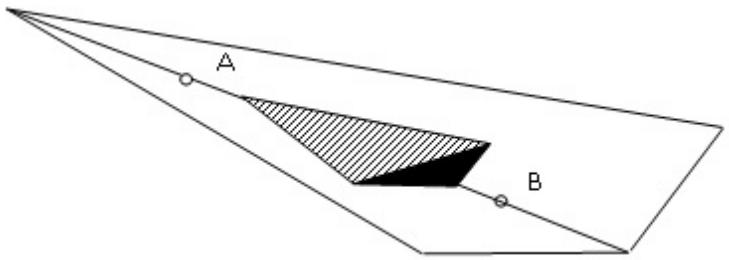


Figura 4: Representación valle

Usted debe tener en cuenta las siguientes condiciones del terreno: las laderas del valle tienen una pendiente de un 10 %, es decir, por cada 10 m de avance horizontal, la ladera sube 1 m. El fondo del valle tiene una

pendiente más suave (pendiente entre A y B), también constante, de 5 %.

La tecnología disponible no permite construir un muro de más 200 m de altura, y por último, valle abajo el terreno es cada vez más valioso por lo que inundarlo resulta menos conveniente. Para reflejar este costo se asumirá que el beneficio futuro por metro cúbico de agua ($\$b$) aumentará $0.01b$ por cada kilómetro que la presa se aleja de B (es decir, si se ubicara el embalse en el kilómetro 27, el beneficio de TODA el agua sería $\$1.03b$) medido a través de la línea recta en la que fluye el río.

Escriba un modelo de optimización que permita resolver el problema planteado por la Cooperativa dentro de un perído de T años.

Hint: El volumen de cualquier pirámide se calcula como la superficie de la base por su altura, divido por tres.

Solución Problema 4.

Variables de decisión:

$$h = \text{Altura del embalse (metros)}$$

$$x = \text{Posición de la presa desde el inicio del valle (kms)}$$

$$V_t = \text{Volumen de agua retenido por la represa en el año } t$$

$$a_t = \text{Altura del nivel del agua retenida en el año } t$$

Variables auxiliares: Son sólo expresiones para simplificar la F.O.

El costo por superficie inundada en el año t:

$$CS_t = c_s \frac{a_t\sqrt{101}a_t\sqrt{401}}{2}2 = c_s a_t^2\sqrt{40501}$$

El costo por volumen de la pared:

$$CV = c_v \frac{20h^2}{2} k\sqrt{\frac{h(20h)^2}{6}} = c_v k 200h^3\sqrt{\frac{h}{6}}$$

El costo por transportar material:

$$CT = c_T(30-x)\frac{20h^2}{2} k\sqrt{\frac{h(20h)^2}{6}} = c_T k(30-x)200h^3\sqrt{\frac{h}{6}}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \left(b\left(1+\frac{30-x}{100}\right)V^t - CS_t \right) - C_f - CV - CT$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

(1)Debe situarse a más de un kilómetro de cada pueblo:

$$x \leq 29$$
$$x \geq 11$$

(2)Altura máxima de la represa:

$$h \leq 200$$

(3)Definición de V_t

$$V_t = \text{mín}\left\{d_t, \frac{200h^3}{3}\right\} \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

(4)Definición de a_t

$$a_t = \text{mín}\left\{h, \sqrt[3]{\frac{3d_t}{200}}\right\} \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

(5) Naturaleza de las variables:

$$h \geq 0$$