PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
M.Fuentes - D.Pozo - J.Vera

Pauta Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) (**6 puntos**) Responda brevemente las siguientes preguntas sobre problemas de flujo en redes.

(i) (**1 punto**) ¿Es cierto o no que en cada iteración del Simplex especializado en Redes se requiere calcular el valor de cada una de las variables duales del problema? Justifique brevemente su respuesta.
Respuesta: NO, sólo las de la zona del circuito que está definiendo el cambio de base.

(ii) (**2 punto**) ¿Es correcto decir que en un problema de Flujo Máximo, la capacidad de un corte (S, T) que separa el origen del destino (donde el origen queda en S y el destino en T) es igual a la capacidad de los arcos que van de S a T menos los que van de T a S? Justifique brevemente su respuesta.
Respuesta: No, son sólo los arcos que van en el sentido del origen al destino. Si hubiera cotas inferiores al flujo, ahí si se restan los otros (esto no lo vimos en clases).

(iii) (**1 punto**) Explique brevemente la importancia de mantener un puntero al nodo predecesor en el algoritmo de Dijkstra.
Respuesta: Esto permite reconstruir la ruta.

(iv) (**2 punto**) De un ejemplo de una situación que se modele como flujo en redes, pero en donde los arcos tengan restricción de tener un flujo mínimo (es decir, cotas inferiores).
Respuesta: Hay muchos ejemplos, deben hacer sentido. Por ejemplo, tuberías de fluidos que deben mantener una presión mínima siempre.

(b) (**5 puntos**) Comente justificadamente la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) (**2 punto)** En un problema no lineal sin restricciones, donde la función objetivo es de clase $C^{(2)}$ (2 veces continuamente diferenciable), el método de Newton garantiza convergencia a un mínimo local.
Respuesta: No, a menos que hayan hipótesis adicionales como convexidad. En general, sólo hay convergencia si se parte suficientemente cerca.

(ii) (**3 punto)** Queremos resolver el problema mín $f(x)$. Un punto $\bar{x}$ es un punto estacionario (o crítico) de $f(x)$ si $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \nabla f(\bar{x}) = 0$ y, además, se puede decir que es un mínimo global si $H(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x})$ es una matriz semi-definida positiva.
Respuesta: No, para decidir que sea mínimo, la matriz debe ser definida positiva. La función $f(x) = x^3$ entrega el ejemplo más simple, $x = 0$ es punto crítico y $f''(0) = 0 \geq 0$ (o sea, semi-definido positivo), pero el punto no es mínimo local.

(c) (**3 puntos**) Explique cómo se plantea un problema de ruta más corta en una red, como un problema de Flujo a Costo Mínimo en esa misma red.
Respuesta: Se hace poniendo oferta igual a 1 en el nodo origen y demanda igual a -1 en el destino, con los costos dados. El flujo a costo mínimo entregará como solución un árbol en donde habrá una ruta completa que lleva la unidad desde el origen al destino.

(d) (**2 puntos**) Considere el problema de Optimización con restricciones de igualdad:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a. & h_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Explique por qué es necesario, en el Teorema de Lagrange, que la matriz Jacobiana de las funciones $h_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, m$ en el punto que se postula como solución del problema, tenga rango completo.
Respuesta: Es necesario para que tenga sentido despejar tanto las variables como los multiplicadores de Lagrange desde el sistema que se forma con la condición $\nabla L = 0$ y las restricciones. De otra forma, permite despejar algunas variables en función de otras.

Pregunta 2 (16 puntos)

(a) (**5 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización no lineal sin restricciones:

$$\text{mín}\, 4x_1^2 + 20x_2^2$$

(i) (**3 puntos**) Queremos aplicar el método del gradiente a este problema y vamos a partir del punto $(x_1^0, x_2^0) = (4, 4)$. Describa la primera iteración del método del gradiente a partir de ese punto (no determine en forma exacta el valor del paso de avance, pero sí indique cómo lo obtendría).
Respuesta: Tenemos que

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 \\ 40x_2 \end{pmatrix}$$

Luego, en el punto inicial $(4, 4)$ se tiene que la dirección de descenso es:

$$h = -\begin{pmatrix} 32 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Luego, el nuevo punto es:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 32 \\ 160 \end{pmatrix}$$

donde λ se obtiene de la minimización unidireccional. Acá eso se hace resolviendo el problema cuadrático que resulta de reemplazar este punto en la función objetivo.

(ii) (**2 puntos**) Un amigo le propone que mejor resuelva el problema usando un cambio de variables, específicamente le propone que use, en vez de usar (x_1, x_2) tal cual , use $(x_1, x_2) = (y_1/2, y_2/4)$, transforme el problema y lo resuelva en (y_1, y_2) con el método del gradiente. ¿Tiene razón su amigo en el sentido de que posiblemente lo resolverá en menos iteraciones? Explique justificadamente por qué.

Respuesta: Si se hace el reemplazo lo que se obtiene es minimizar

$$f(y_1/2, y_2/4) = 4\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 20\left(\frac{y_2}{4}\right)^2 = y_1^2 + \frac{5}{4}y_2^2$$

Acá lo que hay que comparar es la estructura de valores propios de la matriz del problema cuadrático. Como acá no hay términos cruzados, en la formulación original los valores propios son 4 y 20. El condicionamiento es igual a $20/4 = 5$. En el segundo caso es $5/4$, que es menor y producirá una convergencia más rápida, así que el amigo sí tiene razón.

(b) (**6 puntos**) Considere la siguiente función en $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \log(\alpha_j + x_j)$$

("log" es el logaritmo natural, aunque es irrelevante) que es una forma de función de "entropía". Aquí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son parámetros conocidos, todos > 0. En diversas aplicaciones interesa encontrar el mínimo de esta función, la cual está definida sólo para valores x tales que $x_j > -\alpha_j$.

(i) (**3 puntos**) Muestre que esta función es estrictamente convexa en su dominio.
Respuesta: Acá hay que calcular el gradiente y el Hessiano. Tenemos:

$$\frac{\partial f}{x_j} = \log(\alpha_j + x_j) + \frac{x_j}{\alpha_j + x_j}$$

y el Hessiano es una matriz diagonal, cuyo elemento (j, j) es:

$$\frac{2\alpha_j + x_j}{(\alpha_j + x_j)^2}$$

Dado que $(\alpha_j + x_j) > 0$ y $\alpha_j > 0$ se tiene que esos términos diagonales son > 0 y entonces el Hessiano es definido positivo, implicando que la función es convexa.

(ii) (**3 puntos**) Describa brevemente cómo se aplicaría el Método de Newton para minimizar esta función (indique las etapas y qué hay que calcular en cada una de ellas, no haga iteraciones).
Respuesta: Acá es poner la descripción del método, nada más:

Método de Newton:

0. Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n, k = 0$.
1. Sea $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$
2. Verificar criterio de parada y STOP si se cumple.
3. Sea λ^k solución óptima de
$$\min_{\lambda \geq 0} f(x^k + \lambda d^k)$$
4. Sea $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$, $k = k + 1$, Go to 1.

Como $\nabla^2 f(x^k)$ es una matriz definida positiva, entonces d^k es una dirección de descenso. El paso se determina con algún método de búsqueda o minimización unidireccional.

(c) (**5 puntos**)Encuentre la solución óptima del siguiente problema, usando el Método de Lagrange:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1^2 + 5x_2^2 = 30 \end{array}$$

Respuesta:

El Lagrangeano es:

$$x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + 5x_2^2 - 30)$$

Derivando e igualando a 0 se tiene:

$$x_1 = -\frac{1}{2\lambda} \ , \ x_2 = -\frac{1}{10\lambda}$$

Reemplanzado en la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{20\lambda^2} = \frac{3}{10\lambda^2} = 30$$

de donde se obtiene $\lambda = \pm\frac{1}{10}$. Basta escoger el valor que da el máximo, que es es con signo negativo.

(d) (**Bono: 6 puntos extras**) Sea Q una matriz simétrica de $n \times n$ y definida positiva. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. El conjunto:

$$Ell(Q, z) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - z)^T Q(x - z) \leq 1\}$$

se llama el "elipsoide" de centro z y definido por la matriz Q. Sea $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$. Nos interesa encontrar el punto en la superficie del elipsoide que entrega el mayor valor para $f(x) = a^T x$. Encuentre explícitamente el punto que cumple esa propiedad.

Respuesta: El problema a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & a^T x \\ s.a. & (x - z)^T Q(x - z) = 1 \end{array}$$

El Lagrangeano es:

$$L(x, \lambda) = a^T x + \lambda((x - z)^T Q(x - z) - 1)$$

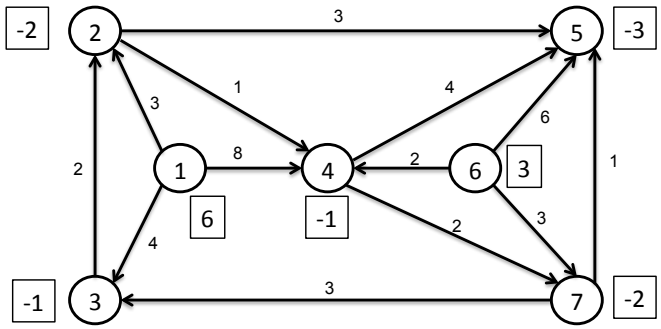
Derivando e igualando a 0:

$$a + \lambda Q(x - z) = 0$$

de donde se tiene

$$x = z - \frac{1}{\lambda} Q^{-1} a.$$

Para determina λ reemplazamos en la restricción y se obtiene que $\lambda^2 = a^T Q^{-1} a$. ´De aquí se obtiene la solución.

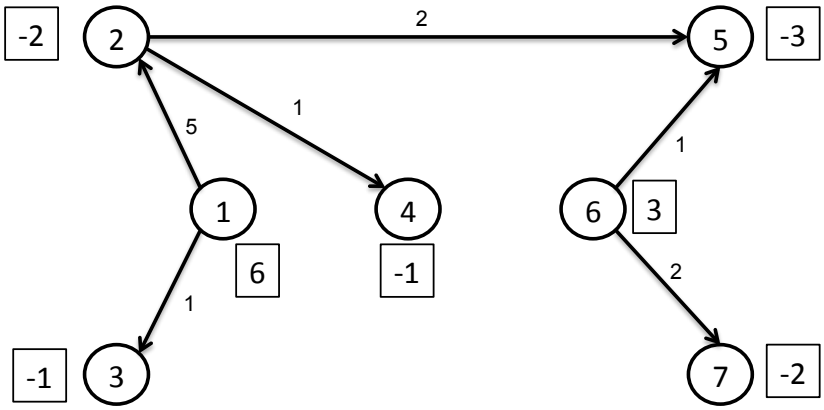


Pregunta 3 (16 puntos)

(a) (**9 puntos**) La siguiente figura representa una red donde las demandas y ofertas de cada nodo están representadas junto a cada nodo y los costos de cada arco están dados sobre estos.

(i) (**5 puntos**) Resuelva el problema de flujo a costo mínimo correspondiente utilizando el algoritmo del simplex aplicado a redes. Considere la solución factible inicial dada por: $f_{12} = 5, f_{13} = 1, f_{24} = 1, f_{25} = 2, f_{67} = 3, f_{75} = 1$.

Respuesta: Partimos de la solución inicial factible dada por el enunciado y que forma un árbol generador (ver siguiente figura).



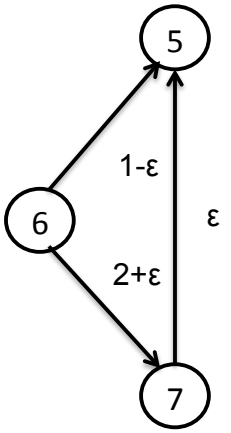
Calculamos las variables duales.

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 = 0 \\ \pi_1 - \pi_2 = 3 \\ \pi_2 - \pi_4 = 1 \\ \pi_1 - \pi_3 = 4 \\ \pi_2 - \pi_5 = 3 \\ \pi_6 - \pi_5 = 6 \\ \pi_6 - \pi_7 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = -3 \\ \pi_3 = -4 \\ \pi_4 = -4 \\ \pi_5 = -6 \\ \pi_6 = 0 \\ \pi_7 = -3 \end{array}$$

Calculamos los costes reducidos de los arcos no básicos.

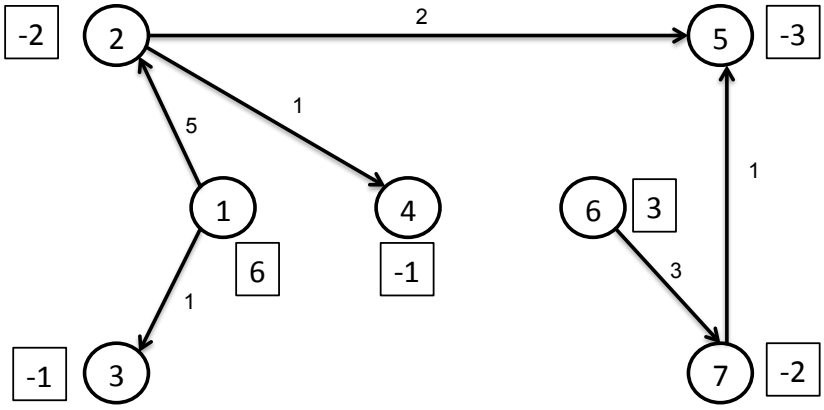
$$
\begin{aligned}
\overline{c}_{14} &= 8-(0)+(-4)=4\\
\overline{c}_{32} &= 2-(-4)+(-3)=3\\
\overline{c}_{47} &= 2-(-4)+(-3)=3\\
\overline{c}_{45} &= 4-(-4)+(-6)=2\\
\overline{c}_{64} &= 2-(0)+(-3)=-1\\
\overline{c}_{73} &= 3-(-3)+(-4)=2\\
\overline{c}_{75} &= 1-(-3)+(-6)=-2
\end{aligned}
$$

El arco (7-5) entra en la base. Estudiamos el arco que sale de la base y la reasignación de flujo.



El arco (6,5) sale de la base y la reasignación de flujos es: $f_{75}=1, f_{67}=3$.

Iteración 2. La solución básica factible de la que partimos en la siguiente iteración está dada por el siguiente árbol generador.



Calculamos las variables duales.

$$
\left.
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0\\
\pi_1-\pi_2 &= 3\\
\pi_2-\pi_4 &= 1\\
\pi_1-\pi_3 &= 4\\
\pi_2-\pi_5 &= 3\\
\pi_7-\pi_5 &= 1\\
\pi_6-\pi_7 &= 3
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0\\
\pi_2 &= -3\\
\pi_3 &= -4\\
\pi_4 &= -4\\
\pi_5 &= -6\\
\pi_6 &= -2\\
\pi_7 &= -5
\end{aligned}
$$

Calculamos los costes reducidos de los arcos no básicos.

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{14} &= 8-(0)+(-4)=4\\
\overline{c}_{32} &= 2-(-4)+(-3)=3\\
\overline{c}_{47} &= 2-(-4)+(-5)=1\\
\overline{c}_{45} &= 4-(-4)+(-6)=2\\
\overline{c}_{64} &= 2-(-2)+(-4)=0\\
\overline{c}_{73} &= 3-(-5)+(-4)=4\\
\overline{c}_{65} &= 6-(-2)+(-6)=2
\end{aligned}$$

Puesto que no hay ningún coste reducido menor que cero, esta solución es óptima.

(ii) (**2 puntos**) ¿Es posible que existan soluciones alternativas? Justifique su respuesta (en caso afirmativo, sólo justifique, no la encuentre).

Respuesta: Sí podría haberlas dado que hay un costo reducido de variable no básica que es igual a 0.

(ii) (**2 puntos**) ¿En que rango puede variar el costo del arco (2,4) para que la solución siga siendo la misma?

Respuesta: Partiendo de la solución 1 del apartado anterior, calculamos las variables duales asociadas considerando que el costo del arco (2,4) es c.

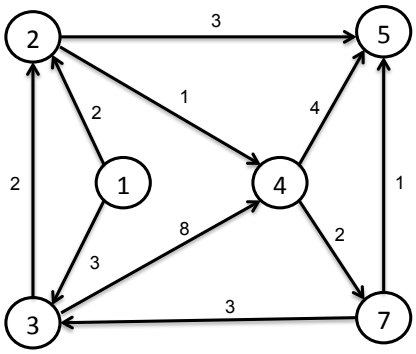
$$\left.\begin{aligned}
\pi_1 &= 0\\
\pi_1-\pi_2 &= 3\\
\pi_2-\pi_4 &= c\\
\pi_1-\pi_3 &= 4\\
\pi_2-\pi_5 &= 3\\
\pi_7-\pi_5 &= 1\\
\pi_6-\pi_7 &= 3
\end{aligned}\right\}\quad
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0\\
\pi_2 &= -3\\
\pi_3 &= -4\\
\pi_4 &= -3-c\\
\pi_5 &= -6\\
\pi_6 &= -2\\
\pi_7 &= -5
\end{aligned}$$

Calculamos los costes reducidos de los arcos no básicos. Para que la solución no cambie, todos los costes reducidos tienen que ser mayor o igual a cero.

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{14} &= 8-(0)+(-3-c)=5-c\geq 0\\
\overline{c}_{32} &= 2-(-4)+(-3)=3\\
\overline{c}_{47} &= 2-(-3-c)+(-5)=c\geq 0\\
\overline{c}_{45} &= 4-(-3-c)+(-6)=1-c\geq 0\\
\overline{c}_{64} &= 2-(-2)+(-3-c)=1-c\geq 0\\
\overline{c}_{73} &= 3-(-5)+(-4)=4\\
\overline{c}_{65} &= 6-(-2)+(-6)=2
\end{aligned}$$

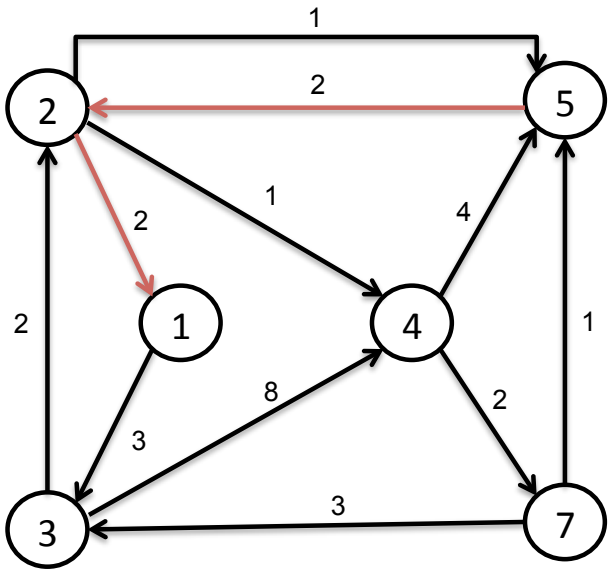
Por tanto, el coste asociado al arco (2,4) puede tomar valores $0\leq c\leq 1$.

(b) (**7 puntos**) La siguiente figura representa una red donde se quiere calcular la cantidad máxima de flujo que se puede mandar desde el nodo 1 al nodo 5. Sobre cada uno de los arcos está representada su capacidad de flujo máximo. Utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson encuentre la solución del problema. Considere la solución inicial dada por: $f_{12}=2, f_{25}=2$.

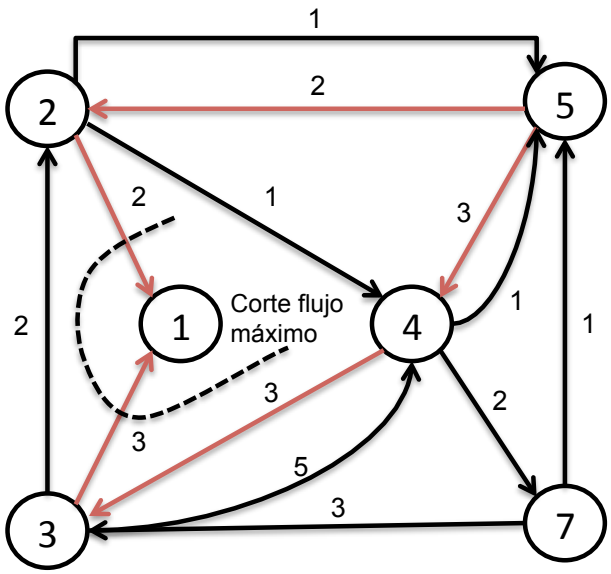


Respuesta:

A partir de la solución inicial dada calculamos el grafo de capacidades residuales.



Donde se pueden apreciar varias rutas incrementales de capacidad 3. Entre ellas está la ruta 1-3-4-5. Incorporando este flujo incremental, el grafo de capacidades residuales queda como se muestra en la siguiente figura.



No existen más rutas incrementales de 1 a 5, por lo tanto la solución obtenida es óptima con un valor de flujo máximo de 5.

Pregunta 4 (15 puntos)

A una planta de tratamiento de aguas servidas llegan requerimientos por tratamiento, de un conjunto E de empresas diferentes sobre un horizonte de T períodos de tiempo. Sea Q_{it} [litros] el requerimiento de la empresa $i \in E$, en el período t, $t = 1, \ldots, T$..

Para tratar aguas, la planta puede combinar varios procesos, y definiremos el conjunto P de los procesos. Estas combinaciones las llamaremos "protocolos", y se ha definido un conjunto R de protocolos. Un protocolo está conformado por un conjunto de procesos que deben ser realizados en secuencia. De este modo, el protocolo r realiza un conjunto $K_r \subseteq P$ de procesos. Se sabe que cualquiera de los procesos demora exactamente un período de tiempo en ser realizado, y que se puede procesar simultáneamente hasta un máximo de W_p litros de aguas en el proceso $p \in P$. También se conoce el orden en el que son realizados los procesos para un protocolo específico, y eso está indicado por un parámetro α^r_{pj} que toma valor 1 si el proceso j se realiza en el período inmediatamente anterior al del proceso p, en el protocolo r. Es importante destacar que un requerimiento cualquiera puede ser dividido en diferentes protocolos.

Un requerimiento por procesamiento de una empresa, que ha sido colocado en el período t, debe ser satisfecho a más tardar en el período $t + 2$. De no ser posible, la planta de tratamiento debe contratar un servicio externo de tratamiento de aguas servidas para poder procesar la cantidad que no alcanza a cubrir.

(a) (**10 puntos**) Construya un modelo de programación lineal que permita determinar cómo atender la totalidad de requerimientos que recibirá esta planta en los T períodos de tiempo, considerando que el objetivo de la empresa es minimizar la cantidad total de agua que debe ser enviada al servicio externo de tratamiento.

(b) (**5 puntos**) Modifique el modelo anterior de manera de que le permita determinar los N protocolos (con $N < |R|$, donde $|R|$ denota la cardinalidad del conjunto R) que deben ser usados para atender los requerimientos de las empresas en el conjunto E. Considere que estos protocolos deben ser seleccionados de manera de asegurar que un proceso cualquiera no es utilizado en más de G de los protocolos (con $G < N$) y que la diferencia entre el protocolo que utiliza más etapas y el que utiliza menos etapas no sea mayor a β.

(a) El modelo pedido es:

- ◇ *Variables de decisión*

  y^{rl}_{it}: cantidad del requerimiento de la empresa i arribado en el período t que que comenzará el protocolo r durante el período l.

  f^{rpl}_{it}: cantidad del requerimiento de la empresa i arribado en el período t que que utilizando el protocolo r realiza el proceso p durante el período l.

- ◇ *Función objetivo* Consiste en minimizar la cantidad total de agua que debe ser enviada al servicio externo de tratamiento.

$$\text{mín} \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in E} \left(Q_{it} - \sum_{l=t}^{t+2} \sum_{r \in R} y^{rl}_{it} \right)$$

- ◇ *Restricciones*

(R1) No se debe asignar más del requerimiento total de cada empresa en cada período.

$$\sum_{l=t}^{t+2} \sum_{r \in R} y_{it}^{rl} \leq Q_{it} \qquad \forall i \in E, t \leq T-2.$$

(R2) Relacionar las variables de asignación de flujo: y_{it}^{rl} y f_{it}^{rpl}.

$$y_{it}^{rl} = f_{it}^{rpl} \qquad \forall i \in E, t, l = 1, \ldots, T, r \in R, p \in K_r : \sum_{j \in K_r} \alpha_{pj}^{r} = 0.$$

(R3) Conservación de flujo entre procesos en las asignaciones de cada protocolo.

$$f_{it}^{rjl} = f_{it}^{rpl+1} \qquad \forall i \in E, t = 1, \ldots, T, l = 1, \ldots, T-1, r \in R, p \in K_r : \alpha_{pj}^{r} = 1.$$

(R4) Respetar la capacidad máxima de litros que puede procesar un proceso en un mismo período.

$$\sum_{i \in E} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=t}^{T} f_{it}^{rpl} \leq W_p \qquad \forall p \in P$$

(R5) Naturaleza de las variables

$$y_{it}^{rl}, f_{it}^{rpl} \geq 0 \qquad i \in E, t, l = 1, \ldots, T, r \in R, p \in P.$$

(b) En este caso, se debe agregar la siguiente variable:

x^r: variable binaria que toma el valor 1 si el protocolo r es seleccionado y 0 en otro caso.

Además, se agregan las siguientes restricciones:

(R6) Se deben seleccionar exactamente N protocolos.

$$\sum_{r \in R} x^r = N$$

(R7) Un proceso cualquiera no puede estar en más de G de los protocolos seleccionados.
Para esto, se deben registrar todos los protocolos en los que está el proceso p. Para esto, se construye el parámetro:

$$h_p^r = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in K_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sum_{r \in R} x^r h_p^r \leq G \qquad \forall p \in P.$$

(R8) Asegurar que la diferencia en la cantidad de etapas (procesos) que requiere cada uno de los protocolos seleccionados es a lo más β.

$$|K_r| x^r - |K_n| x^n \leq \beta \qquad \forall r, n \in R : r \neq n.$$

(R9) Relacionar la variable de selección de protocolos con la asignación a flujos.

$$y_{it}^{rl} \leq Q_{it} x^r \qquad \forall i \in E, t, l = 1, \ldots, T, r \in R.$$

(R10) Naturaleza de las variables

$$x^r \in \{0, 1\} \qquad r \in R.$$