PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2019 - 1
Profesores: : A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - P. Guajardo

Interrogación 3

Duración: 2 horas 30 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, deje cada cuadernillo en su puesto para que sean retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (15 puntos)

En una región compuesta por dos ciudades vecinas se ha desatado una enfermedad muy contagiosa. Para combatir la enfermedad, los médicos han propuesto un conjunto K de posibles tratamientos, de los cuales se puede escoger como máximo uno por ciudad en cada periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$. Si en el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ se aplica el tratamiento $k \in K$ en la ciudad $i \in \{1, 2\}$, entonces el número de infectados se reduce en $\alpha_{i,k}$ % para el inicio del siguiente período. Se sabe que el equipo disponible de médicos permite tratar como máximo a una ciudad por periodo. También, cada vez que el tratamiento k es aplicado, se incurre en un costo $\$c_k$, y se cuenta para el total de periodos con un presupuesto disponible igual a $\$b$.

Asuma que al comienzo de la planificación, cada ciudad posee $s_i \geq 0$ enfermos, $i \in \{1, 2\}$. Si no hay tratamiento, el proceso de contagio es el siguiente: en cada ciudad, para el comienzo del siguiente periodo, se infectará un individuo más por enfermo en la ciudad que había en el periodo anterior, más $\beta \in (0, 1)$ individuos por enfermo que había en la ciudad vecina en el periodo anterior. El parámetro β modela el grado de contagio cruzado entre ciudades. Una ciudad con tratamiento en el periodo t queda inmune al contagio entre el periodo t y el $t + 1$.

Formule un modelo de programación lineal entera mixto que permita planificar la política de tratamiento que minimice la cantidad de personas enfermas al finalizar el período T.

Ayuda: Asuma que las poblaciones son suficientemente numerosas para que una contabilización de individuos en valores continuos sea suficiente.

Solución:

Los primeros 13 puntos se distribuyen así:

- Variables (4 puntos):
  - $x_{k,i,t} \in \{0, 1\}$: si aplica tratamiento $k \in K$ en ciudad $i \in \{1, 2\}$ durante el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$
  - $y_{i,t} \geq 0$: individuos enfermos al comienzo del periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ para la ciudad $i \in \{1, 2\}$

- $w_{i,t} \geq 0$: individuos sanados en el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ para la ciudad $i \in \{1, 2\}$
- $z_{i,t} \geq 0$: individuos infectados en el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ para la ciudad $i \in \{1, 2\}$

◇ Objetivo (1 punto):

$$\min_{x,y,w,z} \sum_{i=1}^{2} (y_{i,T} + z_{i,T} - w_{i,T})$$

◇ Restricciones (8 puntos):

R1) Máximo un tratamiento por periodo (1p):

$$\sum_{k \in K} x_{k,1,t} + \sum_{k \in K} x_{k,2,t} \leq 1 \quad \forall t \in T$$

R2) Presupuesto (1p):

$$\sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{i \in \{1,2\}} c_k \cdot x_{k,i,t} \leq b$$

R3) Inventario de enfermos (1p):

$$y_{i,1} = s_i, \quad \forall i = \{1, 2\}$$

$$y_{i,t+1} = y_{i,t} + z_{i,t} - w_{i,t}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, t \in \{2, \ldots, T-1\}$$

R4) Cota superior de personas curadas (1p):

$$w_{i,t} \leq M \sum_{k \in K} x_{k,i,t}, \quad \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$w_{i,t} \leq \alpha_{i,k} y_{i,t} + M \cdot (1 - x_{k,i,t}), \quad \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}, k \in K$$

R5) Cota inferior de Infectados (2p):

$$z_{1,t} \geq y_{1,t-1} + \beta \cdot y_{2,t-1} - M(\sum_{k \in K} x_{k,1,t}), \quad \forall t \in \{2, \ldots, T\}$$

$$z_{2,t} \geq y_{2,t-1} + \beta \cdot y_{1,t-1} - M(\sum_{k \in K} x_{k,2,t}), \quad \forall t \in \{2, \ldots, T\}$$

R6) Naturaleza variables (1p)

$$x_{k,i,t} \in \{0, 1\}, \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}, k \in K$$

$$y_{i,t} \geq 0, \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$w_{i,t} \geq 0, \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$z_{i,t} \geq 0, \forall i = \{1, 2\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

Los 2 puntos finales se dan si es que el modelo es 100 % funcional y logra (en teoría) una solución óptima.

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere el siguiente problema P de producción formulado como un modelo de programación lineal continua:

$$\begin{array}{lllll} \text{máx} & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 & & \\ s.a. & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \geq & 15 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 12 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq & 18 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) **(3 puntos)** Formule otro problema de optimización lineal en forma estándar que tenga al origen del dominio de P como vértice factible de su dominio y que un vértice inicial factible para P sea una solución óptima para este problema.

(b) **(12 puntos)** Suponga que una solución óptima para P es $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 6)$. Considere que e_1 es el exceso de la primera restricción y que h_2, h_3 son las holguras de la segunda y tercera restricción, respectivamente. Una reformulación equivalente del problema anterior despejado en una base asociada a la solución óptima obtenida es:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & -30 + 3x_1 + x_2 + \frac{5}{2}h_2 & & \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}h_2 & = & 6 \\ & x_1 + x_2 + e_1 + 2h_2 & = & 9 \\ & -2x_1 + x_2 - \frac{3}{2}h_2 + h_3 & = & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, h_2, h_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Responda:

(i) **(3 puntos)** ¿Cuál es el beneficio mínimo en P por unidad producida de x_3 (actualmente igual a 5) para que convenga producirlo?

(ii) **(3 puntos)** ¿Sigue siendo óptima la solución óptima actual si el beneficio unitario de x_2 (actualmente en 4) aumenta en una unidad? ¿Hay solución múltiple después del cambio?

(iii) **(3 puntos)** ¿Cuánto podría aumentar el recurso asociado a la tercera restricción (actualmente en 18) para que la configuración básica de la solución óptima no cambie?

(iv) **(3 puntos)** Considere ahora el siguiente problema:

$$\begin{array}{lllll} \text{máx} & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 & & \\ s.a. & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 & \geq & 15 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \leq & 12 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Encuentre una solución óptima y justifique su elección.

Solución:

(a) Lo solicitado es el problema de Fase I:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & t & & \\ s.a. & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - e_1 + t & = & 15 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + h_2 & = & 12 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + h_3 & = & 18 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, h_2, h_3, t & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Para las siguientes preguntas, deducimos que una base óptima es $B = \{x_3, e_1, h_3\}$ que define una solución degenerada pues $h_3 = 0$. También $D = \{x_1, x_2, h_2\}$.

(i) Supongamos que v_3 el beneficio que deseamos identificar. Veamos las condiciones para que sea conveniente producir ($x_3 > 0$). Estudiemos los costos reducidos en forma estándar:

$$\begin{aligned} r^T &= c_D^T - c_B^T \bar{A}_D \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -v_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 & v_3 & \frac{1}{2}v_3 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Una opción para que sea conveniente seguir produciendo, es que la solución óptima se mantenga. Esto se logra si todos los costos reducidos son no negativos, es decir, si $v_3 \geq 4$.
Hasta aquí se da todo el puntaje de la pregunta.
Sin embargo, no es una condición necesaria, puesto que si $v_3 < 4$, entonces la base óptima cambia, pero no implica necesariamente que x_3 sale de la base. Si $v_3 < 4$, el costo reducido de x_2 se hace negativo y entraría a la base. ¿Quien sale?: Saldría mín$\{6/1, 9/1, 0/1\} = 0$, es decir, h_3. La nueva base sería $B = \{x_3, e_1, x_1\}$ y del problema despejado entregado podemos rápidamente encontrar el nuevo despeje sobre esta base restando la tercera restricción a las primeras dos y reemplazando x_2 por $2x_1 + \frac{3}{2}h_2 - h_3$ en el objetivo:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & -30 + 5x_1 + 4h_2 - h_3 & & \\ s.a. & x_3 + 3x_1 + 2h_2 - h_3 & = & 6 \\ & e_1 + 3x_1 + \frac{7}{2}h_2 - h_3 & = & 9 \\ & x_2 - 2x_1 - \frac{3}{2}h_2 + h_3 & = & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, h_2, h_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Del sistema se obtiene que para la nueva base $B = \{x_3, e_1, x_2\}$ con $D = \{x_1, h_2, h_3\}$:

$$\bar{A}_D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7/2 & -1 \\ -2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$r_D^T = [5, 4, -1]$$

Para que esta base sea óptima después del cambio de costos, se debe cumplir que el nuevo vector de costos reducidos r' sea no negativo. Se cumple que:

$$r_D'^T = c_D^T - (c_B + \Delta C_B)^T \bar{A}_D = r_D^T + \Delta v_3^T \bar{A}_D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \Delta v_3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Así, $-\frac{5}{3} \leq \Delta v_3 \leq -1$. Es decir, $\frac{10}{3} \leq \Delta v_3 \leq 4$.
Qué sucede si $v_3 < 10/3$, entonces, el costo reducido de x_1 se hace negativo y convendría que entre a la base. Siguiendo el criterio de salida mín$\{6/3, 9/3\}$, la variable que sale es x_3.
En conclusión, $v_3 \geq \frac{10}{3}$ para que $x_3 \geq 0$ en el óptimo.
Un estudiante que se de cuenta que $v_3 \geq 4$ no es condición necesaria tendrá un punto de bono extra. Por calcular $v_3 \geq 10/3$ se dará 2 puntos extra adicionales de bono.

(ii) Sabemos que el costo reducido de x_2 es 1. Por lo tanto, si el beneficio mejora en una unidad, la solución óptima actual seguirá siendo óptima, con el costo reducido de x_2 igual

a cero. Sin embargo, no se puede concluir de inmediato que existen múltiples soluciones, porque la solución es degenerada.

Verificaremos si la otra base óptima es un punto distinto o es el mismo. Para esto, entraremos a la base la variable x_2, que tiene costo reducido igual a cero. Al hacer esto, vemos el criterio de salida:

$$\text{mín}\{\frac{6}{1}, \frac{9}{1}, \frac{0}{1}\} = \frac{0}{1}$$

Es decir, la variable que sale es h_3, que justamente es la variable igual a cero, entonces x_2 entrará a la base con un valor igual a 0. Por lo tanto, **no** hay múltiples soluciones.

(iii) Realizamos análisis de sensibilidad sobre el recurso b_3. Como la función objetivo no cambia, hay que verificar que la base sigue siendo factible:

$$A_B^{-1} b \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -18 + b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

De esta forma, podemos ver que $b_3 \geq 18$ es la condición para que la estructura de la solución no cambie. Así que puede aumentar infinitamente y la configuración básica de la solución óptima no cambiará.

(iv) El problema equivale al mismo problema anterior con una variable adicional cuya columna de coeficientes de restricciones es igual a x_2, pero con un beneficio menor. Dado que x_2 tiene costo reducido positivo en el problema de minimización equivalente, x_4 también lo tendrá.

Pregunta 3 (15 puntos)

Responda cada pregunta de forma independiente:

(a) **(5 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal continua:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & 7x_1 + x_2 + c_3 x_3 & \\ s.a. & x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq \quad b_1 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq \quad 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq \quad 0 \end{array}$$

Una vértice óptimo es $(x_1^*; 28/5; x_3^*)$ con una solución óptima dual asociada $(11/5; y_2^*)$.

(i) **(1 puntos)** Encuentre los valores faltantes de la solución óptima dual. Justifique.
(ii) **(2 puntos)** Encuentre los valores faltantes de la solución óptima primal. Justifique.
(iii) **(2 puntos)** Encuentre los valores faltantes de c_3 y de b_1. Justifique.

Solución: El problema dual asociado es:

$$\begin{array}{lll} \text{mín}_{y \geq 0} & b_1 y_1 + 6 y_2 & \\ s.a. & y_1 + 5y_2 & \geq \quad 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \geq \quad 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \geq \quad c_3 \end{array}$$

Las siguientes observaciones permiten obtener todos los valores solicitados:

- La segunda variable primal $x_2^* = 28/5 > 0$ es el precio sombra de la segunda restricción dual. Al ser diferente de 0, implica que la restricción está activa: $-y_1^* + 2y_2^* = 1 \Rightarrow y_2^* = 8/5$
- El exceso de la primera restricción dual (costo reducido de x_1) es $y_1^* + 5y_2^* - 7 = 16/5$. Implica que $x_1^* = 0$.
- La segunda variable dual $y_2^* > 0$ es el precio sombra de la segunda restricción primal. Al ser diferente de 0, implica que la restricción está activa: $5x_1^* + 2x_2^* - x_3^* = 6 \Rightarrow x_3^* = 26/5$
- La segunda variable primal $x_3^* > 0$ es el precio sombra de la tercera restricción dual. Al ser diferente de 0, implica que la restricción está activa: $3y_1^* - y_2^* = c_3 \Rightarrow c_3 = 5$
- La primera variable dual $y_2^* > 0$ es el precio sombra de la primera restricción primal. Al ser diferente de 0, implica que la restricción está activa: $x_1^* - x_2^* + 3x_3^* = b_1 \Rightarrow b_1^* = 10$

(b) **(5 puntos)** Considere que usted dispone de un servicio web que cobra \$1000 pesos por resolver un sistema de cualquier tamaño formado por desigualdades lineales. Si hace uso del servicio para hacer cada uno de sus cálculos, ¿cuál es el mínimo presupuesto que requiere para resolver un problema de optimización lineal continuo en forma estándar con n variables y m restricciones de igualdad. Justifique.

Solución: Una solución del sistema a continuación resuelve cualquier problema de optimización lineal continuo de la forma $\text{mín}_{x \geq 0} \{c^T x : Ax = b\}$:

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &\leq 0 \\ b^T y - c^T x &\leq 0 \\ Ax &\leq b \\ -Ax &\leq -b \\ -x &\leq 0 \\ -A^T y &\leq -c \end{aligned}$$

Por lo tanto, necesita $1000 para optimizar.

(c) **(5 puntos)** Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada y simétrica, y el siguiente un problema de optimización lineal continua:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & c^T x & \\ s.a. & Ax & \geq c \\ & x & \geq 0, \end{array}$$

con $c \in \mathbb{R}^n$.

Argumente que un punto $x^* \geq 0$ tal que $Ax^* = c$ es solución óptima del problema.

Solución: El problema dual de este problema es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & c^T y & \\ s.a. & Ay & \leq c \\ & y & \geq 0, \end{array}$$

Luego, una solución $x^* \geq 0$ tal que $Ax^* = c$ es primal y dual factible con objetivo c^T. Es decir, sirve de solución y de condición de optimalidad a la vez.

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(5 puntos)** Sea $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ el dominio de algún problema P de optimización lineal entera compuesto por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ ax_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Determine para qué rango de valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el valor óptimo de mín$\{c^T x : x \in \mathbb{X}\}$ es igual al valor óptimo de su relajación lineal, independiente del valor de $c \in \mathbb{R}^2$. Justifique.
Solución: Todos los vértices factibles del problema deben ser enteros en x_1, x_2. Es decir, toda base debe generar un vértice entero en x_1, x_2 o bien ser infactibles

(i) $B = \{h_1, h_2\}$: siempre es entera igual a $(h_1, h_2) = (10, 8)$.
(ii) $B = \{h_1, x_2\}$: siempre es entera igual a $(h_1, x_2) = (2, 8)$.
(iii) $B = \{h_2, x_2\}$: siempre es infactible igual a $(h_2, x_2) = (-2, 10)$.
(iv) $B = \{h_1, x_1\}$: es igual a $(h_1, x_1) = (2, 8/a)$, por lo tanto $8/a \in \mathbb{Z}$ ó $a < 0$.
(v) $B = \{h_2, x_1\}$: es igual a $(h_2, x_1) = (8 - 10a, 10)$, no hay problema.
(vi) $B = \{x_1, x_2\}$: es igual a $(x_1, x_2) = (2/(1-a), 10 - 2/(1-a))$, por lo tanto $a > 8/10$ ó $2/(1-a) \in \mathbb{Z}$.

Es decir hay 3 casos que funcionan:

(i) $a < 0$, $2/(1-a) \in \mathbb{Z}$
(ii) $0 \leq a \leq 8/10$, $8/a \in \mathbb{Z}$, $2/(1-a) \in \mathbb{Z}$
(iii) $a > 8/10$, $8/a \in \mathbb{Z}$

(b) **(4 puntos)** Comente las siguientes afirmaciones justificando su veracidad.

(i) **(2 puntos)** Al utilizar Branch&Bound, un *gap* de 1 % entre el incumbente y la cota mínima es razonable para detener el algoritmo.
Solución: Incierto, un 1 % puede ser razonable o no dependiendo del contexto del problema y del tiempo que se tenga para resolverlo. Si responde falso y justifica bien también es válido.

(ii) **(2 puntos)** En el algoritmo Branch&Bound, una estrategia de exploración en profundidad (DFS) asegura reducir el gap entre incumbente y cota mínima más rápido que una estrategia de exploración horizontal (BFS).
Solución: Falso. Antes de resolver un problema, no se sabe si una estrategia DFS o BFS reducirá más rápido el gap, por lo que no se puede asegurar que una sea mejora que la otra.

(c) **(6 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

La solución óptima de su relajación lineal es $x_1 = 0{,}4$ y $x_2 = 8{,}8$, con valor óptimo igual a $v^R = 9{,}2$.

Ejecute el algoritmo Branch&Bound hasta encontrar su solución óptima justificando toda poda en el árbol cuando corresponda. Resuelva cada nodo como usted prefiera. En cada paso, actualice (si corresponde) el incumbente y la mejor cota superior disponible para el valor óptimo del problema entero.

Solución: Hay varios caminos posibles. Este es el más directo ramificando en x_1:

P1:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1 \leq 0 \end{array}$$

$x_1^* = 0$ $x_2^* = 9$ $v^* = 9$

P2:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 1 \end{array}$$

$x_1^* = 1$ $x_2^* = 7$ $v^* = 8$

Por lo tanto, la solución óptima del problema original es: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 9$, $v^* = 9$

Camino haciendo branch en x_2:

P1:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq 8 \end{array}$$

$x_1^* = \frac{2}{3}$ $x_2^* = 8$ $v^* = \frac{26}{3}$

Podría hacer branch en x_1, aunque si resuelve P2 primero, no sería necesario.

P11:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 0 \end{array}$$

$x_1^* = 0$ $x_2^* = 8$ $v^* = 8$

P12:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 1 \end{array}$$

$x_1^* = 1$ $x_2^* = 7$ $v^* = 8$

P2:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 9 \end{array}$$

$x_1^* = 0$ $x_2^* = 9$ $v^* = 9$

Por lo tanto, la solución óptima del problema entero es: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 9$, $v^* = 9$