PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Optimización
Semestre: 02-2011
Profesores: Claudia Prieto - Alejandro Cataldo
Mathias Klapp - Germán Paredes

Pauta Interrogación 3

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras programables y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Cada una de las siguientes partes de esta pregunta tiene el mismo valor.

a) Para la minimización de las siguientes funciones, ¿qué método recomendaría, Newton o Gradiente? Justifique su respuesta.

i) $f(x, y) = x^4 + 3y^2$
ii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

Pauta Parte a)

i) La función es de forma cuadrática y (estrictamente) convexa, por lo tanto Newton termina en una iteración en la búsqueda del óptimo.
ii) La función es de forma elipsodial, por lo tanto el método del gradiente presenta una convergencia lenta. En consecuencia es recomendable utilizar el método de Newton.

b) Considere el siguiente problema de optimización:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 3(x_1 x_2)^4$$

Podemos asegurar que el método del Gradiente convergerá al mínimo de $f(x_1, x_2)$? De converger, ¿lo haría a un mínimo local o a uno global? Justifique su respuesta.

Pauta Parte b)

La función es convexa, basta verificar que

$$H_f = \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 36x_1^2x_2^4 + 2 & 48x_1^3x_2^3 \\ 48x_1^3x_2^3 & 36x_1^4x_2^2 \end{bmatrix}$$

cuyo primer determinante es > 0 para todo valor de x_1 y x_2. El segundo determinando es $72x_1^4x_2^2 - 1008x_1^6x_2^6$ que es ≥ 0 o ≤ 0 dependiendo los valores de x_1 y x_2 que se tomen. Luego, la solución existe, por lo que el método del gradiente converge a un mínimo global.

c) Considere el problema de minimización irrestricto dado por:

$$\text{mín} \quad x^2 + \frac{y^2}{4} - 4x - \frac{3y}{2}$$

i) Realice una iteración del método del gradiente comenzando desde el punto (2,5).

ii) Comente el resultado. ¿Puede garantizar optimalidad?

Pauta Parte c)

i) El gradiente de la función es:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x - 4, \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

luego,

$$\nabla f(2,5) = (0,1)$$

entonces, se tiene que $(x^1, y^1) = (2,5) - \lambda(0,1)$, con lo que el problema de determinación del paso óptimo queda:

$$\min_{\lambda} \quad f(2, 5-\lambda) = 2^2 + \frac{(5-\lambda)^2}{4} - 4 \cdot 2 - \frac{3(5-\lambda)}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{(\lambda - 5)}{2} + \frac{3}{2} = 0 \mapsto \lambda = 2$$

con lo que $(x^1, y^1) = (2,3)$.

ii) El punto encontrado (2,3) anula el gradiente de la función objetivo. Por ello cumple con las condiciones necesarias de primer orden. Además, al ser convexa la función objetivo en todo el dominio, podemos asegurar que es mínimo global del problema. Este resultado es producto de que el gradiente (en negativo) de la función objetivo evaluada en el punto de partida tenía dirección al óptimo global, y el problema de determinación del paso óptimo ajusta la distancia necesaria para llegar al óptimo. Luego, la condición suficiente se cumple, basta con verificar que el hessiano es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

que es definido positivo para todo x_1, x_2.

d) Considere un problema de rutas mínimas sobre un grafo $G(N, A)$, en el cual hay varios arcos con costo negativo. Usted desea resolverlo mediante el algoritmo de Dijkstra, pero sabe que el algoritmo no aplica en este problema.

Se le ocurre una idea para aplicar el algoritmo mencionado: sumará al costo de cada arco el valor absoluto del costo más negativo. De esta manera tendrá sólo costos no negativos y mantendrá los costos relativos entre todas las rutas del grafo. ¿Funciona la idea para lograr la misma solución óptima? ¿Y el mismo valor óptimo? Explique.

Pauta Parte d)

Por ningún motivo se logrará el mismo valor óptimo, ya que se **está sumando más costo**. Con respecto a la misma solución óptima, ésta se asegurará sólo si todas las rutas desde el nodo origen a cada destino poseen el mismo número de arcos, pues de este modo sólo se suma una constante a la función objetivo. Si no se da este caso, al subir el costo de cada arco se favorecerá artificialmente a las rutas que poseen menor cantidad de arcos, pues se les sumarán menos costos a ellas.

e) El procesador de textos LaTeX usa una rutina de optimización para justificar un párrafo a la izquierda y a la derecha. Esto es, el editor tiene que decidir cómo romper cada línea de un párrafo para que su apariencia sea lo más atractiva posible. En concreto, un párrafo consiste en n palabras ordenadas de la 1 a la n. El procesador calcula automáticamente el atractivo de una línea que empieza con la palabra i y termina con la palabra j. Este valor (costo) se denota por c_{ij}: cuanto más grande más *fea* es la línea asociada.

El objetivo del procesador es conseguir descomponer un párrafo en varias líneas para que dicho párrafo sea lo más atractivo posible. Dados todos los costos c_{ij} de cada posible línea a crear en un párrafo, formule el problema de encontrar el párrafo más atractivo como uno de flujo en redes.

Pauta Parte e)

La red consiste en n nodos (uno por cada palabra) ordenados, donde cada nodo está conectado con todos los siguientes (palabras que siguen en le siguen en el texto). El costo de cada arco es c_ij. La descomposición óptima es equivalente a encontrar el camino mínimo del primer nodo al último. Cada parte del camino coincide con una línea a descomponer. La suma de los costos de cada parte da lugar al atractivo total del párrafo. Por lo tanto, el camino mínimo es equivalente al párrafo más atractivo.

Pregunta 2 (20 puntos + 4 puntos de Bonificación)

Parte A (10 puntos)

El administrador de *Pizzas Mocchiato* desea ser lo más eficiente posible con sus tiempos de reparto hacia sus clientes. Por ello, ha considerado ciertas zonas en donde los clientes están concentrados, y además, que existen calles (conexiones) que unen a estas zonas de clientes. El administrador desea conocer cuáles son los tiempos y rutas mínimas de reparto para ir desde la pizzería (ubicada en la zona 1) hacia cada una de las zonas de clientes.

El administrador le entrega la siguiente información:

Zona\Zona	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6
Zona 1	-	2	3	-	-	-
Zona 2	-	-	-	-	4	-
Zona 3	-	-	-	2	-	-
Zona 4	-	-	-	-	1	5
Zona 5	-	-	-	-	-	3
Zona 6	-	-	-	-	-	-

Estos datos corresponden a tiempos de conexión entre las distintas zonas. Por ejemplo, para ir desde la zona 1 hasta la zona 3, se toma un tiempo de 3 [unidades de tiempo]. Hay arcos que no existen, y que se reflejan con un guión en la tabla.

a) (2 punto) Construya la red de nodos y arcos que representa el problema anterior como uno de rutas de tiempo mínimo.

b) (6 puntos) Determinar, mediante el algoritmo de Dijkstra, las rutas de tiempo mínimo de reparto desde la pizzería ubicada en la zona 1 (nodo 1), hasta todas las zonas de clientes. Muestre claramente el árbol de rutas más cortas a partir de la zona 1.

c) (2 punto) Si agregara un arco desde el nodo 3 hacia el nodo 5, con costo 1, ¿debe aplicar todo el algoritmo nuevamente, o le sirve parte de lo que hizo en b)?

Pauta Parte A (10 puntos)

a) La red asociada al problema se muestra en la Figura 1.

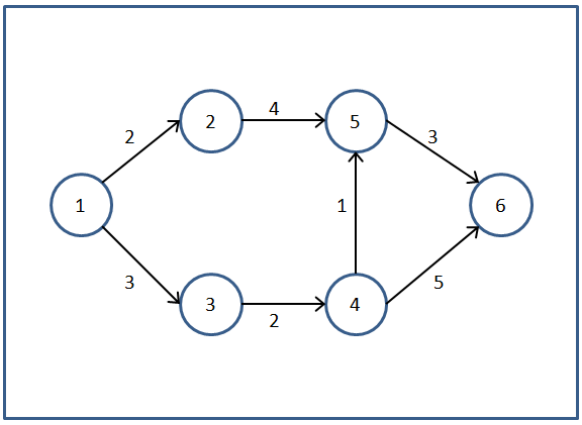


Figura 1: Árbol básico en iteración 2.

donde encima de cada arco se entrega el tiempo de desplazamiento en minutos.

b) En las Figuras 2 a 8 se detalla el algoritmo de Dijkstra. Cada Figura representa una iteración, y asociado a cada nodo se encuentra d_1 (mínima distancia conocida hasta ese momento) y l_i (predecesor en la ruta mínima actual). Además, los nodos que se van seleccionando aparecen de color gris.

Luego, se tienen dos rutas óptimas, por lo que habrán dos árboles de rutas más cortas, que se muestran en las Figuras 9 y 10.

c) Para verificar si la solución cambia si se agrega un arco entre el nodo 3 y 5, basta con comparar el $d_5 = 5$ actual (de la solución óptima encontrada en b)) con la posibilidad de que el nuevo arco construya una ruta más atractiva, y entonces, con $d_5^N = d_3 + c_{35} = 3 + 1 = 4$. Como resulta más atractiva la nueva ruta, se cambia el $l_5 = 3$ y se actualiza el costo de la ruta desde el nodo 3 en adelante, en $d_5 - d_5^N = 5 - 4 = 1$ (el árbol de rutas más cortas desde el nodo 3 aguas abajo no sufre cambio).

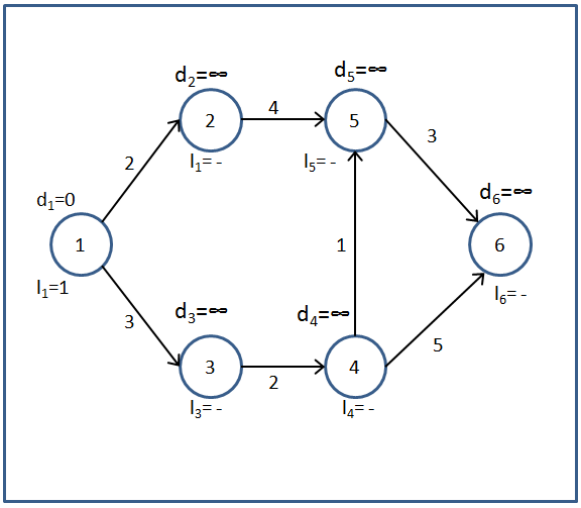


Figura 2: Inicialización.

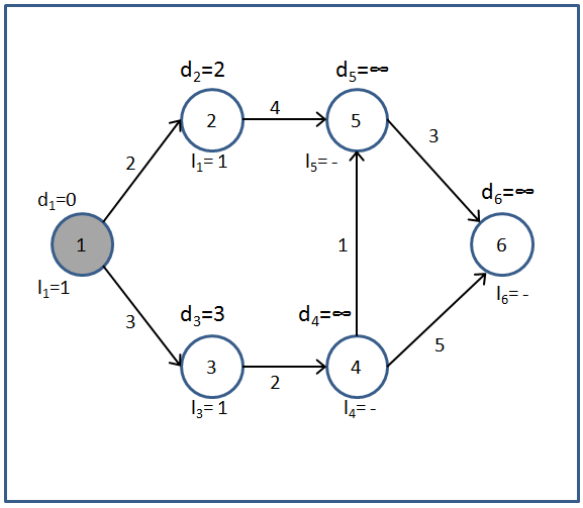


Figura 3: Iteración 1.

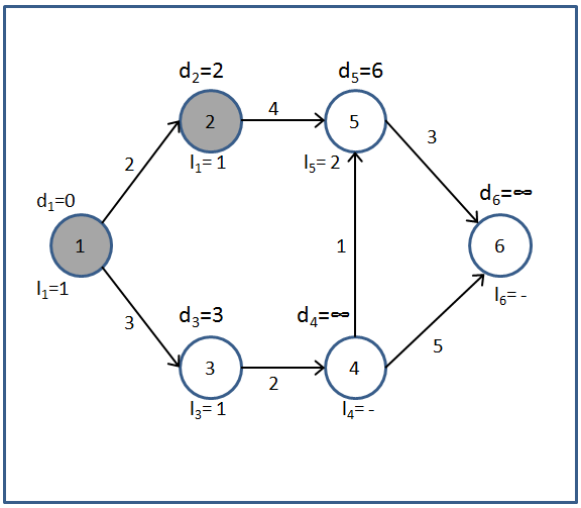


Figura 4: Iteración 2.

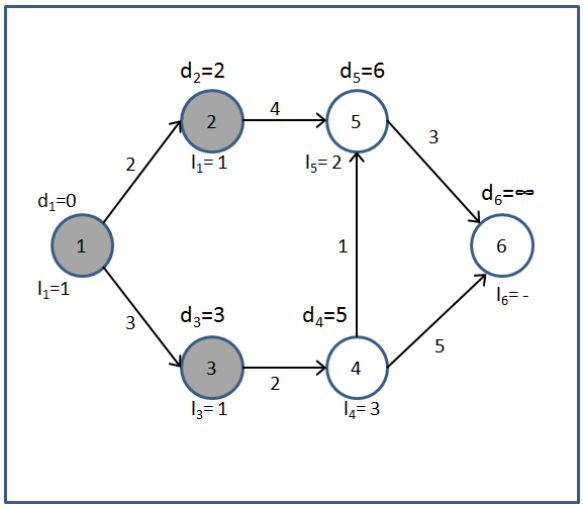


Figura 5: Iteración 3.

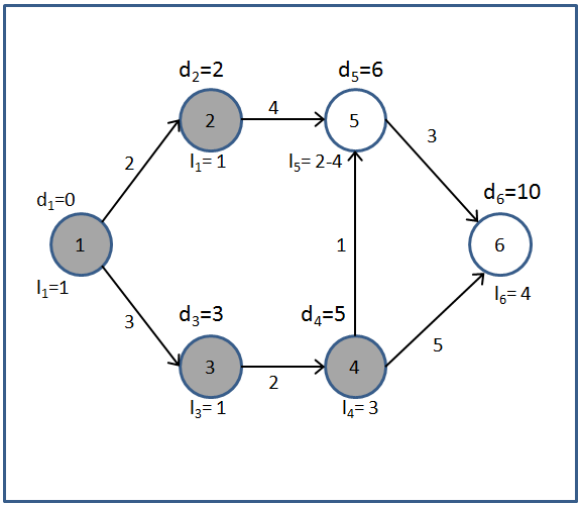


Figura 6: Iteración 4.

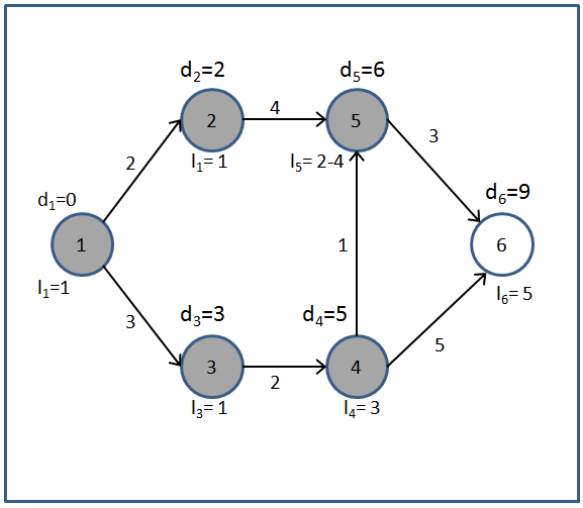


Figura 7: Iteración 5.

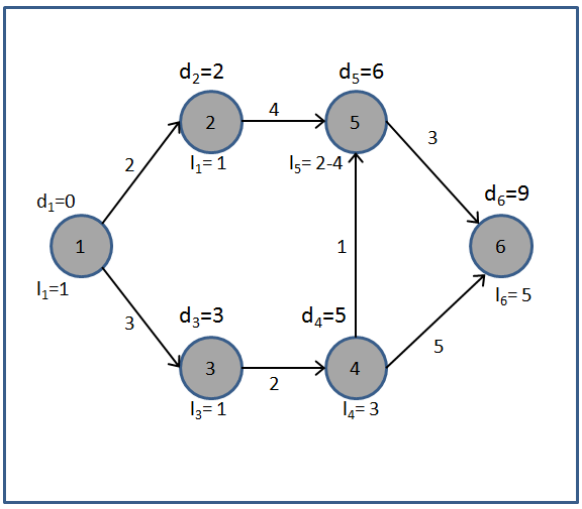


Figura 8: Iteración 6.

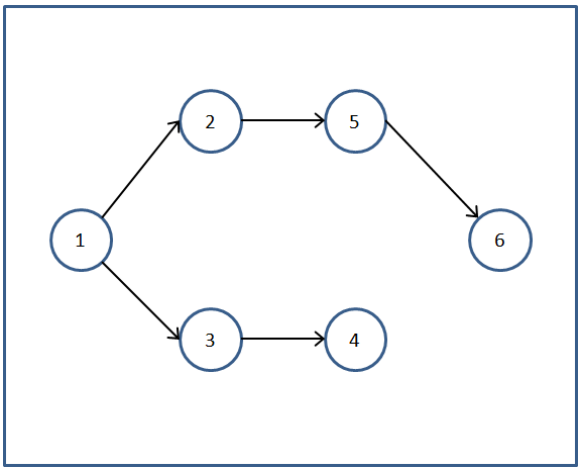


Figura 9: Árbol rutas más cortas con origen en nodo 1 (solución 1).

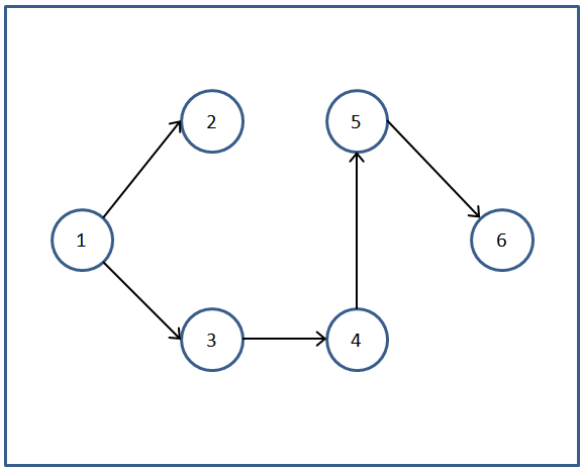


Figura 10: Árbol rutas más cortas con origen en nodo 1 (solución 2).

Parte B (10 puntos + 4 puntos de Bonificación)

Una empresa familiar es la única encargada de repartir paltas a tres Poblados vecinos. La demanda para el día de hoy es de 20, 15 y 40 kilos, para los Poblados 1, 2 y 3 respectivamente.

Los caminos disponibles (todos rurales) y los costos de transporte que debe cancelar la empresa se muestran en la siguiente tabla:

Camino	Costo por kilo de palta transportado
Empresa $\mapsto$ Poblado 1	4
Empresa $\mapsto$ Poblado 2	8
Poblado 1 $\mapsto$ Poblado 2	1
Poblado 1 $\mapsto$ Poblado 3	7
Poblado 2 $\mapsto$ Poblado 3	1

Las condiciones de transporte entre poblados hace que no exista límite a la cantidad de kilos que se pueden transportar entre la empresa y los diferentes poblados, ni entre poblados.

El día de ayer, la empresa realizó el despacho de la siguiente manera: toda la demanda del Poblado 1 fue enviada directamente desde la empresa, la totalidad de la demanda del Poblado 2 se envió desde el Poblado 1 y la totalidad de la demanda del Poblado 3 fue enviada desde el Poblado 1.

a) (5 puntos) Construya un grafo que represente el problema antes descrito como uno de flujo a costo mínimo, y utilice el algoritmo de simplex especializado en redes para encontrar el despacho óptimo bajo la condición de satisfacción total de la demanda. Utilice como solución factible inicial la política utilizada por la empresa el día de ayer.

Ahora, la empresa enfrenta otro problema al momento de determinar su política de despacho. La seguridad de los caminos se ha visto afectada, ya que el camino que va desde el Poblado 2 al Poblado 3 es **siempre** asaltado por una bandolera conocida como *La Doña de las Tostadas*. *La Doña* ha forjado una reputación de buena persona dado su modus operandi: si el transporte lleva 5 kilos o menos de paltas ella se lleva la totalidad de las paltas que carga el camión, pero si el camión lleva más de 5 kilos sólo roba los 5 que requiere para su propio consumo diario. O sea, *La Doña* nunca robará más de 5 kilos de paltas pues es el máximo que puede comer durante un día.

b) (5 puntos) Construya un grafo que represente la nueva situación (con asalto) como un problema de flujo a costo mínimo que permita a la empresa determinar la forma de distribución de hoy, considerando que se debe satisfacer toda la demanda. Asuma que no existe costo asociado por las paltas robadas.

c) (Bonificación: 4 puntos) Determine visualmente la solución óptima del problema ¿Qué particularidad se obtiene? y ¿qué implicancia tiene esto para el algoritmo simplex especializado en redes?

Pauta Parte B (10 puntos)

a) La siguiente Figura 11 muestra la red de flujo a costo mínimo que representa la nueva situación en los asaltos y la solución básica factible inicial utilizada por la empresa el día de ayer. En la Figura 12 se observa el árbol básico asociado a esta solución inicial.

   Luego, calculamos el valor de las variables duales ($\pi's$).

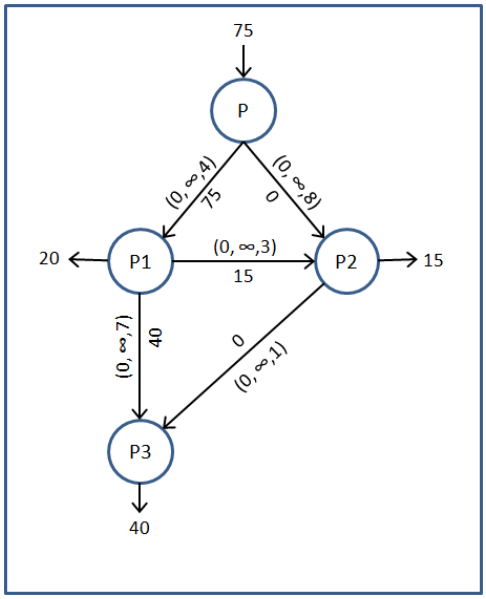


Figura 11: Grafo y solución básica factible de la parte a).

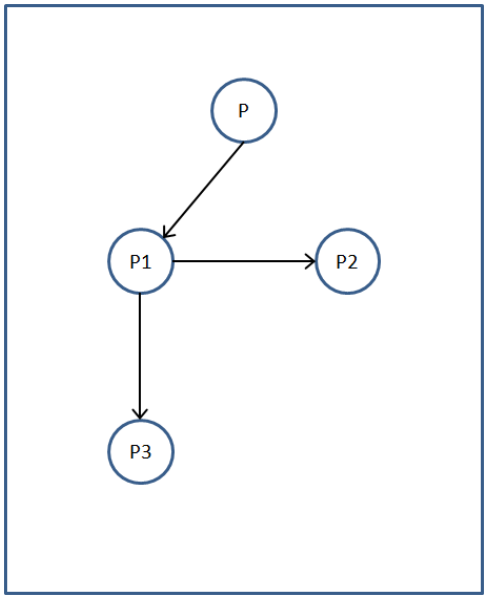


Figura 12: Árbol generador básico asociado a la solución inicial.

◇ Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{PP1} = 4 - \pi_P + \pi_{P1} = 0$$

$$\bar{c}_{P1P2} = 1 - \pi_{P1} + \pi_{P2} = 0$$

$$\bar{c}_{P1P3} = 7 - \pi_{P1} + \pi_{P3} = 0$$

considerando, arbitrariamente $\pi_P = 0$ se tiene que $\pi_{P1} = -4, \pi_{P2} = -5$ y $\pi_{P3} = -11$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de los flujos no básicos.

◇ Cálculo de costos reducidos de los flujos no básicos.

$$\bar{c}_{PP2} = 8 - (0) + (-5) = 3 > 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{P2P3} = 1 - (-5) + (-11) = -5 < 0 \text{ (en cota inferior)}$$

Luego, la solución no es óptima y el flujo f_{P2P3} debe entrar a la base.

En la Figura 13 se observa con una línea punteada el flujo que ingresa al árbol (flujo f_{P2P3}) y con línea roja la reasignación de flujo para determinar el flujo que sale de la base.

El flujo saliente es el f_{P1P3}, permitiendo una reasignación de 40 kilos de paltas. La Figura 14 muestra la nueva solución factible.

Cuya base se observa en la Figura 15.

Calcular el valor de las variables duales ($\pi's$).

◇ Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{PP1} = 4 - \pi_P + \pi_{P1} = 0$$

$$\bar{c}_{P1P2} = 1 - \pi_{P1} + \pi_{P2} = 0$$

$$\bar{c}_{P2P3} = 1 - \pi_{P2} + \pi_{P3} = 0$$

considerando, arbitrariamente $\pi_P = 0$ se tiene que $\pi_{P1} = -4, \pi_{P2} = -5$ y $\pi_{P3} = -6$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de los flujos no básicos.

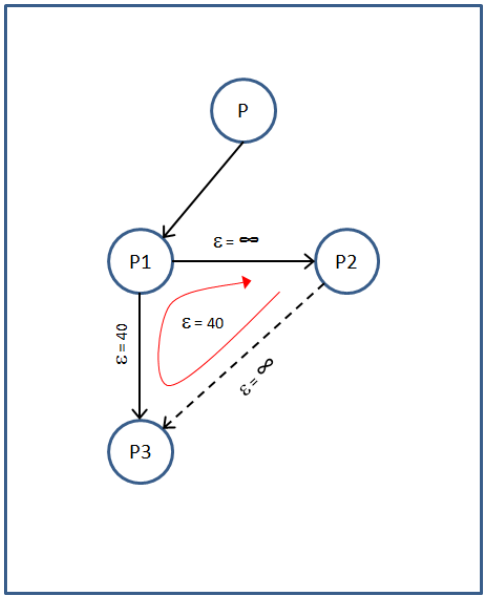


Figura 13: Reasignación de flujo en iteración 1.

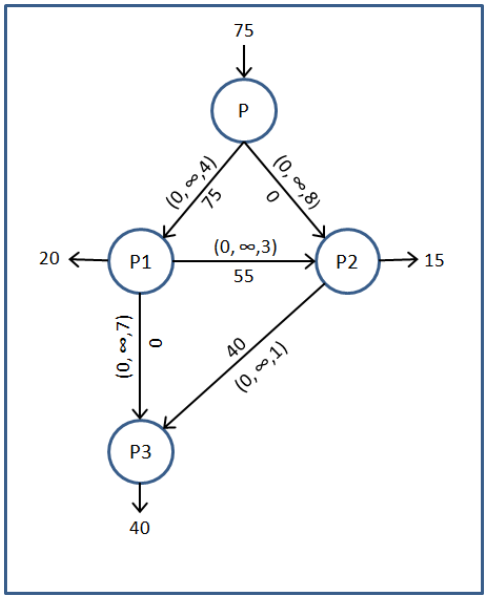


Figura 14: Árbol generador básico asociado a la nueva solución (iteración 2).

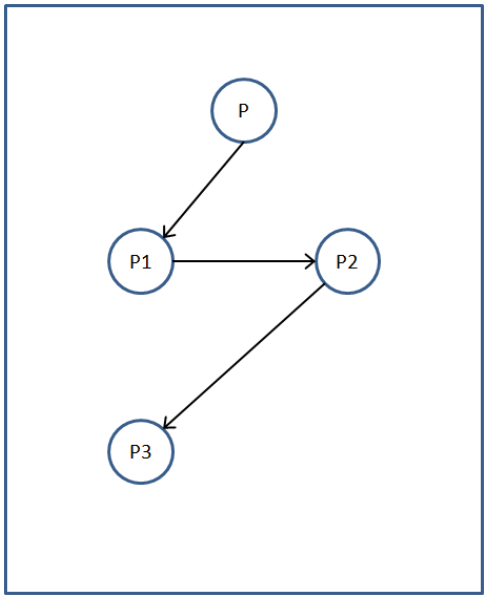


Figura 15: Árbol básico en iteración 2.

◇ Cálculo de costos reducidos de los flujos no básicos.

$$\bar{c}_{PP2} = 8 - (0) + (-5) = 3 > 0 \text{ (en cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{P1P3} = 7 - (-4) + (-6) = 5 > 0 \text{ (en cota inferior)}$$

Luego, la solución es óptima. Entonces, el despacho óptimo de la empresa debe transportar es 75 kilos de palta desde la planta al Poblado 1 (dejando los 20 kilos demandados por ese Poblado), desde el Poblado 1 transportar 55 kilos de palta al Poblado 2 (dejando los 15 kilos demandados por ese Poblado) y transportando desde el Poblado 2 al Poblado 3 los 40 kilos

de paltas restantes para satisfacer la demanda del Poblado 3. Todo esto a un costo mínimo de 505.

b) El grafo mostrado en la Figura 16 representa el problema como uno de flujo a costo mínimo.

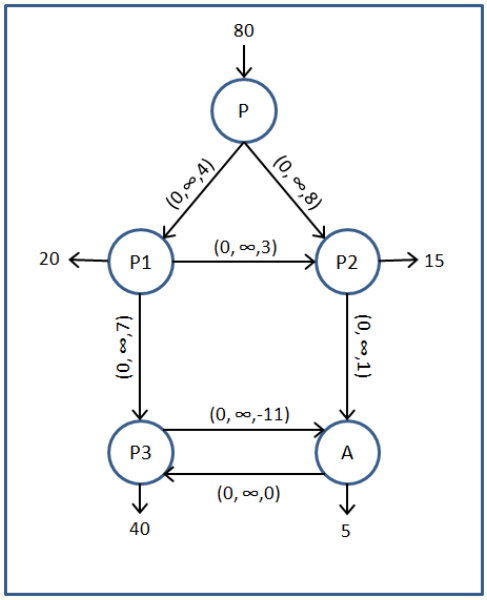


Figura 16: Grafo asociado al problema considerando a La Doña.

c) La solución óptima se observa en la siguiente Figura 17.

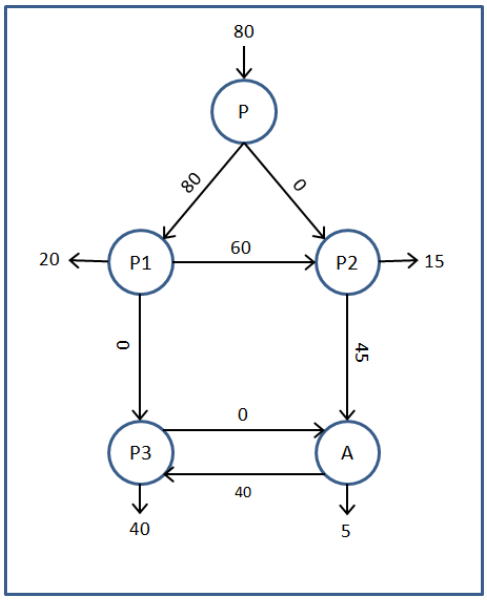


Figura 17: Grafo que muestra la solución considerando a La Doña.

La solución obtenida (a pesar de que visualmente sabemos que es la solución óptima) no cumplirá con el criterio de optimalidad de simplex en redes pues tiene un ciclo de costo total negativo.

Pregunta 3 (20 puntos)

El profesor de un curso de la Escuela quiere definir sus horas de atención de alumnos, de modo que la mayor cantidad de éstos tenga disponibilidad horaria para asistir a al menos uno de dichos módulos. Suponga que en cada día de Lunes a Sábado hay M módulos horarios y que el curso cuenta con N alumnos. Para cada alumno se dispone de información de su carga académica, de modo que se conocen los módulos horarios en que cada uno tiene clases. Por lo tanto, en esos módulos el alumno no podría asistir al horario de atención de alumnos establecido por este profesor. Suponga que esta información está registrada en base al siguiente parámetro:

$$\alpha_{ijk} \quad : \quad \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } i = 1, \ldots, N \text{ tiene libre el módulo } j = 1, \ldots, M \text{ del día } k = 1, \ldots, 6. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por otro lado, el profesor tiene destinados algunos módulos horarios para desarrollar su investigación, por lo que en esos módulos no podrá atender alumnos. Esta información se encuentra registrada en el siguiente parámetro:

$$\beta_{jk} \quad : \quad \begin{cases} 1 & \text{si el profesor tiene libre el módulo } j = 1, \ldots, M \text{ del día } k = 1, \ldots, 6. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El desea destinar Q módulos horarios para la atención de alumnos durante esta semana, de modo de maximizar el número de alumnos que tiene libre al menos uno de esos módulos. Además, la asignación debe asegurar que la carga durante la semana es balanceada. Para ello, la cantidad de módulos asignados durante los tres primeros días (Lunes a Miércoles) no puede tener más de γ unidades de diferencia con la cantidad de módulos asignados para los últimos tres días (Jueves a Sábado).

a) (12 puntos) Formule el problema que enfrenta el profesor como un modelo de programación lineal.

Mirando la solución que le entrega el modelo formulado en la parte a), este profesor tiene algunas consideraciones que desea incorporar en la confección de estos horarios de atención. Quiere que el calendario final de atenciones no tenga más de 3 módulos consecutivos de atención de alumnos (lo que le permite evitar posibles dolores de cabeza). Además, quiere que en aquellos casos en que tenga que atender alumnos durante 3 módulos consecutivos, los dos módulos inmediatamente siguientes no deberán ser asignados a atención de alumnos (esto incluso si estos módulos son los últimos de un día y los primeros del día siguiente). También tiene como regla que si atiende alumnos en el último módulo de un día no atenderá en el penúltimo módulo de ese mismo día.

b) (8 puntos) Considerando las nuevas consideraciones realizadas por este profesor, modifique el modelo formulado en la parte a).

Pauta Pregunta 3 (20 puntos)

a) El modelo de la parte a) es:

Variables

x_{jk}: binaria que vale 1 si se destina para atención de alumnos el modulo j, con $j = 1, \ldots, M$, del día k, con $k = 1, \ldots, 6$.

y_i: binaria que vale 1 si el alumno i, con $i = 1, \ldots, N$, puede asistir a algún modulo dispuesto por el profesor.

Función objetivo La función objetivo consiste en maximizar la cantidad de alumnos que podrán asistir a al menos uno de los módulos de atención de alumnos dispuesto por el profesor:

$$\text{máx} \quad \sum_{i=1}^{N} y_i$$

Restricciones

R1) Construir variable y_i en función de la calendarización de módulos de atención de alumnos y la disponibilidad del alumno.

$$y_i \leq \sum_{k=1}^{6} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} \cdot \alpha_{ijk} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

R2) Posibilitar la elección de módulos por parte del profesor sólo en aquellos en que tiene disponibilidad.

$$x_{jk} \leq \beta_{jk} \quad \forall\, j = 1, \ldots, M; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

R3) Asignar todos los módulos deseados.

$$\sum_{k=1}^{6} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} = Q$$

R4) Asegurar que la asignación respete la condición de balanceo dentro de la semana.

$$\sum_{k \in \{L,Ma,Mi\}} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} - \sum_{k \in \{J,V,S\}} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} \leq \gamma$$

$$\sum_{k \in \{J,V,S\}} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} - \sum_{k \in \{L,Ma,Mi\}} \sum_{j=1}^{M} x_{jk} \leq \gamma$$

R5) Naturaleza de las variables.

$x_{jk} \in \{0, 1\}$, para módulo horario $j = 1, \ldots, M$ y día $k = 1, \ldots, 6$.
$y_i \in \{0, 1\}$, para alumno $i = 1, \ldots, N$.

b) Al modelo de la parte a) se le deben agregar las siguientes restricciones.

R6) Asegurar que no serán asignados más de 3 días consecutivos.

$$\sum_{j=m}^{m+3} x_{jk} \leq 3 \quad \forall\, m = 1, \ldots, M-3; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

$$\left(\sum_{j=M-2}^{M} x_{jk} \right) + x_{1(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$\left(\sum_{j=M-1}^{M} x_{jk} \right) + \sum_{j=1}^{2} x_{j(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$x_{Mk} + \sum_{j=1}^{3} x_{j(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

R7) Asegurar que si se calendarizan 3 módulos seguidos, los siguientes 2 estén libres (en realidad bastaría sólo con asegurar solamente el segundo día libre).

$$2 \cdot \left(3 - \sum_{j=m}^{m+2} x_{jk} \right) \geq x_{(m+3)k} + x_{(m+4)k} \quad \forall\, m = 1, \ldots, M-4; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

$$2 \cdot \left(3 - \left(\sum_{j=M-1}^{M} x_{jk} \right) + x_{1(k+1)} \right) \geq x_{2(k+1)} + x_{3(k+1)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$2 \cdot \left(3 - x_{Mk} + \sum_{j=1}^{2} x_{j(k+1)} \right) \geq x_{3(k+1)} + x_{4(k+1)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

R8) Asegurar que no se asignan el penúltimo y el último módulo.

$$x_{(M-1)k} + x_{Mk} \leq 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$