PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2026 - 2
Profesores: R. Cuadrado - M. Klapp - J.C. Muñoz - M. Villafranca - J. Villavicencio

Interrogación 1
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 1" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, pues se corregirá sobre el documento escaneado. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregarla físicamente** como respaldo al equipo de ayudantes. Si no se recibe el respaldo físico de la prueba, esta será calificada con nota 1.
- La prueba es estrictamente individual. Si es sorprendido mirando trabajos de otros compañeros, se penalizará con nota 1
- Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
- Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

Pregunta 1 (12 puntos)

Considere el problema de optimización:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

(a) **(2 puntos)** ¿Es el dominio de $(\mathcal{P})$ un conjunto compacto? Justifique su respuesta.

(b) **(4 puntos)** Basándose en teoremas de existencia, demuestre que $(\mathcal{P})$ tiene una solución óptima.

(c) **(6 puntos)** Identifique gráficamente a todo el conjunto de soluciones óptimas de $(\mathcal{P})$. ¿Cuál es el valor óptimo? Explique su respuesta.

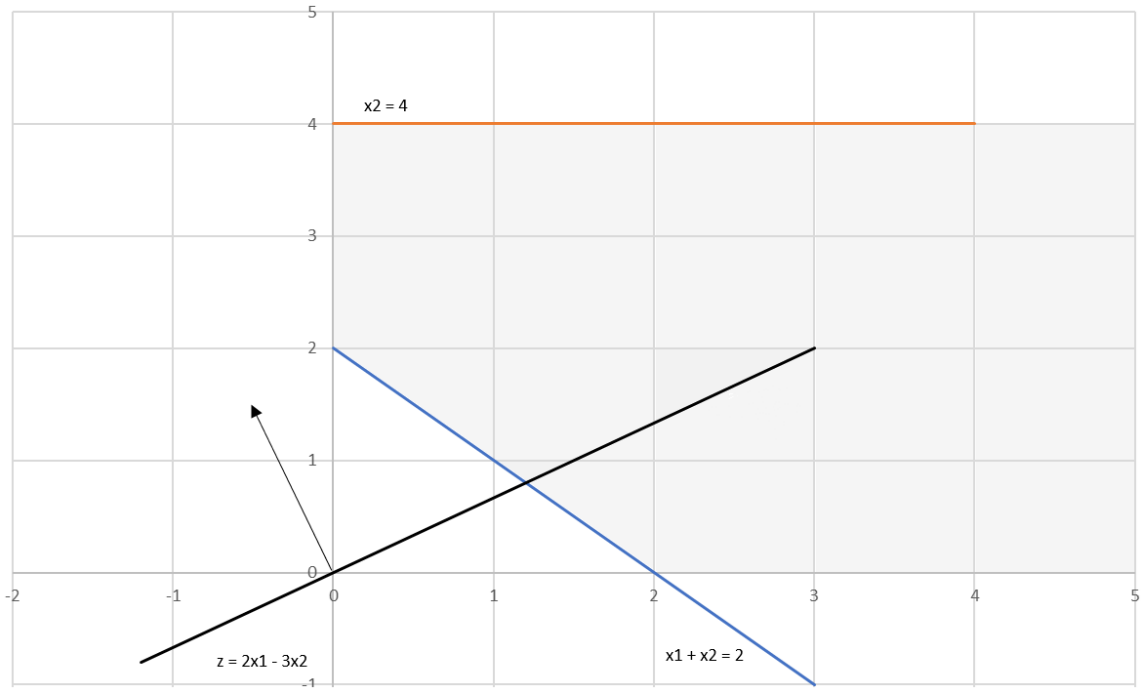
Solución:

(a) El dominio no es acotado y, por lo tanto, no es compacto (acotado y cerrado). Por ejemplo, la solución $(t+2, 0)$ es factible para todo $t \geq 0$.

(b) Cláramente, la función objetivo es continua (lineal), el dominio es factible (el punto $(4, 0)$ es factible) y cerrado (contiene sus bordes). Falta probar que la función objetivo sea coercitiva. Hay dos formas de hacerlo:

- ◇ Probar directamente por definición En este caso, el conjunto de puntos factibles puede describirse como (a, b) con $b \in [0, 4]$ y $a \in [\text{máx}\{2 - b, 0\}, \infty]$.
  . Luego,
  $$\lim_{|x|\to\infty, x\in D} f(x) = \lim_{a\to\infty} 2 \cdot a - 3 \cdot b \to \infty$$
  .
- ◇ Probar que está acotada inferiormente (variante de B-W para LP). Esto se cumple pues
  $$z(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \geq -3x_2 \geq -12$$
- ◇ Un argumento gráfico también es válido, siempre y cuando se explique que la función se va al infinito cuando x_1 tiende al infinito.

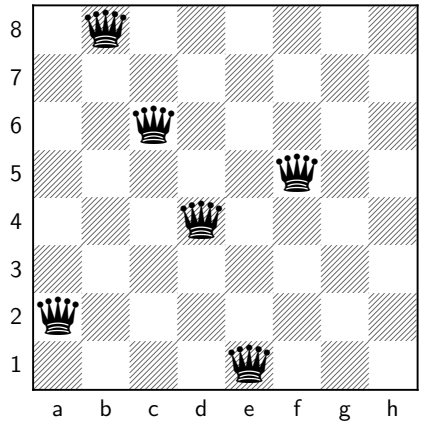
(c) Gráficamente, la solución óptima es única e igual a $x^* = (0, 4)$ con $v^* = -12$.


x2 = 4
z = 2x1 - 3x2
x1 + x2 = 2
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Pregunta 2 (16 puntos)

Un tablero de ajedrez tiene 8×8 casillas. Formule un problema de programación lineal entera que ubique sobre el tablero el mayor número posible de reinas, una por casilla, de modo que ninguna pueda atacar a otra. En el ajedrez, una reina puede atacar a otra si ambas comparten la misma fila, la misma columna o la misma diagonal en el tablero. Note que, en el tablero, existen 15 diagonales ascendentes y 15 descendentes.

EJEMPLO: En el tablero a continuación se han ubicado seis reinas sin posibilidad de ataque entre sí. Esta es una solución factible de valor objetivo igual a 6.



Solución:

Variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se ubica una reina en la casilla } (i,j), \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad i,j = \{1,...,8\}.$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_{i,j \in \{1,...,8\}} x_{i,j}.$$

Maximiza el número de reinas en el tablero.

Restricciones: sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \leq 1, \qquad \forall i = \{1, ..., 8\}, \qquad \text{(1 x fila)} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i,j} \leq 1, \qquad \forall j = \{1, ..., 8\}, \qquad \text{(1 x columna)} \tag{2}$$

$$\sum_{i,j \in \{1,...,8\}: i-j=d} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall d \in \{-6, \ldots, 6\}, \qquad \text{(1 x diagonal ascendente)} \tag{3}$$

$$\sum_{i,j \in \{1,...,8\}: i+j=s} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall s \in \{3, \ldots, 15\}, \qquad \text{(1 x diagonal descendente)} \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in \{1, ..., 8\}, \qquad \text{(naturaleza)} \tag{5}$$

- ◇ **Nota de corrección**: 3 puntos por las variables de decisión.
- ◇ **Nota de corrección**: 2 puntos por la F.O.
- ◇ **Nota de corrección**: 11 puntos por restricciones (2p x fila, 2x columna, 3 x diagonales ascendentes, 3 x diag desc. y 1p x naturaleza).
- ◇ **Nota de corrección**: Las diagonales no son triviales de obtener algebráicamente. Dar puntaje parcial (máx 2 puntos de los 3) si alguien las expresa de forma extensiva sin escribirlas todas. Es decir como: $x_{11} \leq 1, x_{21} + x_{12} \leq 1, x_{31} + x_{22} + x_{13} \leq 1, ..., x_{88} \leq 1$
- ◇ **Nota de corrección**: Notar que se omiten algunas diagonales por redundancia (las 4 esquinas). No afecta al puntaje.
- ◇ **Nota de corrección**: Las diagonales también se pueden modelar así:

  Ascendentes

$$\sum_{j=0}^{8-k} x_{k+j,j+1} \leq 1, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, 8\}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{8-k} x_{j,j+k} \leq 1, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, 7\}. \tag{7}$$

  Descendentes

$$\sum_{j=1}^{9-k} x_{j,10-j-k} \leq 1, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, 8\}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=k+1}^{8} x_{j,9-j+k} \leq 1, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, 7\}. \tag{9}$$

◇ **Nota de corrección**: A gregar variables o restricciones que sobrerrestringen el problema se penaliza con al menos 3 puntos por caso, a criterio del corrector.

Pregunta 3 (16 puntos)

Dinoco es una empresa que produce mensualmente un único tipo de combustible, mezclando diferentes cantidades de múltiples insumos. Esta empresa debe planificar su abastecimiento y almacenaje de insumos, así como su producción de combustible para los próximos T meses. Para ello, requiere determinar cuánto comprar de cada tipo de insumo cada mes y cómo combinarlos para producir el combustible que posteriormente venderá.

En cada mes $t \in \{1, \ldots, T\}$, Dinoco puede comprar la cantidad deseada de cada uno de los n insumos disponibles. El costo de abastecimiento por litro del insumo $i \in \{1, \ldots, n\}$ es $\$c_{it}$ y puede utilizarse en el mismo mes de compra o almacenarse para su uso en meses posteriores. Para ello, Dinoco dispone de un estanque con una capacidad total de V litros. El estanque puede subdividirse de cualquier forma, lo que permite almacenar simultáneamente cualquier combinación de los insumos disponibles sin que se mezclen. Almacenar un litro del insumo i desde el final del mes t hasta el mes $t+1$ tiene un costo de inventario $\$k_{it}$. El entanque comienza vacío y debe terminar vacío al final del mes T.

Un litro de combustible se fabrica mezclando insumos, pero cuidando de cumplir con requisitos de calidad medidos en K atributos distintos. Por ejemplo, la cantidad de azufre en el combustible es un atributo. En particular, un litro de mezcla de combustible debe contener cada atributo $k \in K$ en un nivel entre l_k y u_k mililitros por litro, respectivamente. La composición del combustible depende de los insumos empleados en la mezcla. Se sabe que cada litro del insumo i contiene a_{ik} mililitros del atributo k. Cada mes, Dinoco debe producir y entregar d_t litros de combustible a sus clientes.

Formule un modelo de programación lineal continua que ayude a planificar la compra de insumos y la producción de combustible para minimizar el costo total de Dinoco durante los próximos T meses.

Solución:

Variables de decisión:

- $x_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Litros del insumo $i \in \{1, \ldots, n\}$ comprados en el mes $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- $y_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Litros del insumo $i \in \{1, \ldots, n\}$ almacenados al final del mes $t \in \{0, \ldots, T\}$.
- $z_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Litros del insumo $i \in \{1, \ldots, n\}$ utilizados en la producción de combustible del mes $t \in \{1, \ldots, T\}$.

Función Objetivo:

Minimizar los costos de compra y almacenamiento de los insumos.

$$\text{mín} \quad \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,t} x_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} k_{i,t} y_{i,t} \right)$$

Restricciones:

$$y_{i,t-1} + x_{i,t} = z_{i,t} + y_{i,t} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \tag{10a}$$

$$y_{i,0} = y_{i,T} = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{10b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i,t} \leq V \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \tag{10c}$$

$$l_k \leq \frac{1}{d_t} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} z_{i,t} \qquad \forall k \in K,\ \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \tag{10d}$$

$$\frac{1}{d_t} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} z_{i,t} \leq u_k \qquad \forall k \in K,\ \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \tag{10e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{it} = d_t \qquad \forall t = \{1, ..., T\} \tag{10f}$$

$$x_{i,t}, y_{i,t}, z_{i,t} \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall t \in \{1, \ldots, T\}. \tag{10g}$$

Nota de corrección:

- ◇ 5 puntos por las variables de decisión (1 por z, 2 por x, 2 por y).
- ◇ 2 puntos por la función objetivo.
- ◇ 3 puntos por modelar el inventario de insumos.
- ◇ 1 punto por restricción de estanque.
- ◇ 3 puntos por modelar mezclas.
- ◇ 1 punto por demanda.
- ◇ 1 punto por naturaleza

Pregunta 4 (16 puntos)

Un centro de esquí busca planificar la contratación de instructores para las W semanas de la siguiente temporada, definidas en el conjunto $\mathcal{W} = \{1, \ldots, W\}$, para cubrir la oferta de clases de esquí. Las clases pueden impartirse en cuatro niveles de aprendizaje: principiante (1), intermedio (2), avanzado (3) y experto (4). Sea $\mathcal{N} = \{1, ..., 4\}$ el conjunto de niveles de clase.

Específicamente, se pronostica un requerimiento de d_{nw} horas de instructores haciendo clase en el nivel $n \in \mathcal{N}$ en la semana $w \in \mathcal{W}$. Asuma que las horas son perfectamente divisibles, es decir, que la demanda de un nivel en una semana puede repartirse entre varios instructores, y un mismo instructor puede dictar horas de más de un nivel en una misma semana. Las horas que no se cubran con instructores propios deben tercerizarse a través de una escuela externa, a un costo de c por hora para el centro de esquí.

Para esta temporada, considere que existe un conjunto $\mathcal{I}$ que incluye a todos los instructores candidatos a ser contratados. Cada instructor $i \in \mathcal{I}$ solo está habilitado para enseñar en el conjunto de niveles $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$. Si se contrata a un instructor i, se le debe contratar en semanas completas, consecutivas y por al menos m semanas, a un salario semanal de $\$s_i$. Cada semana que trabaje, esta persona estará disponible para impartir H_i horas de clase.

Formule un modelo de optimización lineal entera mixta que determine a qué instructores contratar y en qué semanas para minimizar el costo total asociado a cubrir los requerimientos de clases de esquí durante la próxima temporada. Defina claramente sus variables de decisión, la función objetivo y las restricciones.

Solución: Hay varias formas de modelar este problema. Acá hay dos:

Forma 1: variables por ventana de contratación (elegante).

Sean:

- $P := \{(u, w) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} : m \leq w - u + 1\}$; conjunto de ventanas de contratación factibles.
- $P_t := \{(u, w) \in P : u \leq t \leq w\}$; conjunto de ventanas de contratación factibles y activas en la semana $t \in \mathcal{W}$.
- $\bar{s}_{i,(u,w)} := s_i \cdot (w - u + 1)$; un parámetro auxiliar que denota el salario de un instructor i al ser contratado en la ventana $(u, w) \in P$.

Variables:

- $z_{i,a} \in \{0, 1\}$: 1 si se contrata a instructor $i \in \mathcal{I}$ en la ventana $a \in P$.

- $h_{i,n,w} \geq 0$: horas dictadas por $i \in \mathcal{I}$ en nivel $n \in \mathcal{N}$ en semana $w \in \mathcal{W}$;
- $q_{n,w} \geq 0$: horas del nivel $n \in \mathcal{N}$ tercerizadas en semana $w \in \mathcal{W}$.

Función objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{a \in P} s_{i,a} \cdot z_{i,a} + c \cdot \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{w \in \mathcal{W}} q_{n,w}$$

Restricciones:

R1) Cobertura:	$\sum_{i \in \mathcal{I}:\, n \in \mathcal{N}_i} h_{inw} + q_{nw} = d_{nw},$	$\forall n \in \mathcal{N},\ w \in \mathcal{W}$
R2) Concordancia trabajo:	$\sum_{n \in \mathcal{N}} h_{int} \leq H_i \cdot \sum_{a \in P_t} z_{ia}$	$\forall i \in \mathcal{I},\ t \in \mathcal{W}$
R3) Rest de trabajo:	$\sum_{a \in P} z_{ia} \ \leq \ 1,$	$\forall\, i \in \mathcal{I}$
Naturaleza:	$z \in \{0,1\},\ h, q \geq 0$	

Forma 2: Contratación con variables que marcan presencia.

Variables:

- $y_{i,w} \in \{0,1\}$: 1 si instructor $i \in \mathcal{I}$ está contratado en semana $w \in \mathcal{W}$
- $x_{i,w} \in \{0,1\}$: 1 si instructor $i \in \mathcal{I}$ comienza su contrato en semana $w \in \mathcal{W}$
- $h_{i,n,w} \geq 0$: horas dictadas por $i \in \mathcal{I}$ en nivel $n \in \mathcal{N}$ en semana $w \in \mathcal{W}$;
- $q_{n,w} \geq 0$: horas del nivel $n \in \mathcal{N}$ tercerizadas en semana $w \in \mathcal{W}$.

Función objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{w \in \mathcal{W}} s_i \cdot y_{i,w} + c \cdot \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{w \in \mathcal{W}} q_{n,w}$$

Restricciones:

R1) Cobertura:	$\sum_{i \in \mathcal{I}:\, n \in \mathcal{N}_i} h_{inw} + q_{nw} = d_{nw},$	$\forall n \in \mathcal{N},\ w \in \mathcal{W}$
R2) Concordancia trabajo:	$\sum_{n \in \mathcal{N}} h_{int} \leq H_i \cdot y_{iw}$	$\forall i \in \mathcal{I},\ t \in \mathcal{W}$
R4) Rest. trabajo 1:	$y_{i,w} \leq y_{i,w-1} + x_{i,w}$	$\forall i \in \mathcal{I}, w \in \mathcal{W} : w > 1$
R5) Rest. trabajo 2:	$y_{i,1} \leq x_{i,1}$	$\forall i \in \mathcal{I}$
R6) Rest. trabajo 3:	$\sum_{w \in \mathcal{W}} y_{i,w} \geq m \cdot \sum_{w \in \mathcal{W}} x_{i,w}$	$\forall i \in \mathcal{I}$
R6) Rest. trabajo 4:	$\sum_{w \in \mathcal{W}} x_{i,w} \leq 1$	$\forall i \in \mathcal{I}$
Naturaleza:	$x, y \in \{0, 1\},\ h, q \geq 0$	

Nota de corrección:

- ◇ 6 puntos por variables
- ◇ 2 puntos por f.o.
- ◇ 2 puntos por rest. de cobertura
- ◇ 2 puntos por rest. de concordancia
- ◇ 4 puntos por modelar rest. de trabajo (cualquiera de los dos formatos)