PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2014
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
H.Larraín - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 3

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado, **con letra clara y legible**. *Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**6 puntos**) Con respecto a un problema de programación lineal entera de *maximización*, responda en forma breve pero precisa:

(i) (**1 punto**) Al ir bajando en el árbol de Branch and Bound, ¿cómo se comporta el valor de la función objetivo de los problemas de los nodos?

(ii) (**1 punto**) En el método de Branch and Bound, ¿qué ocurre si el problema de un nodo es infactible?

(iii) (**2 puntos**) Comente justificadamente la veracidad de la siguiente afirmación: "en el método de Branch and Bound, al encontrar una solución entera me detengo porque he encontrado el óptimo".

(iv) (**2 puntos**) Explique cuándo se realiza una poda por cotas en el algoritmo Branch and Bound.

Respuesta:

(i) (**1 punto**) Al ir bajando en el árbol el valor de la función objetivo se mantiene o baja (el problema es de maximización) respecto al nodo desde el que está ramificando.

(ii) (**1 punto**) En este caso, se deja de explorar esa rama (se poda).

(iii) (**2 puntos**) Falso. Para que el algoritmo se detenga se debe asegurar que todos los nodos aún abiertos tienen un valor menor o igual al del incumbente actual.

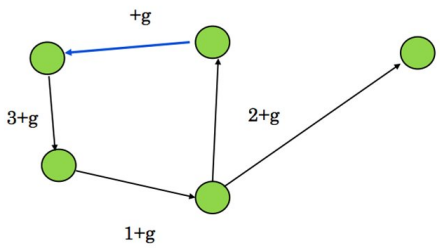
(iv) (**2 puntos**) Para realizar una poda por cotas de una rama del árbol se debe comparar el incumbente (valor de la mejor solución entera obtenida hasta el momento) con el valor de la función objetivo de la rama actual. Si el valor de la función objetivo ya es peor que el del incumbente, entonces se procede a podar esa rama.

(b) (**6 puntos**) Con respecto a los problemas de flujo en redes, responda:

(i) (**3 puntos**) ¿Cómo puede resolverse el problema de ruta más corta usando un problema de flujo a costo mínimo?

(ii) (**1 punto**) Si las bases de programación lineal se corresponden con árboles en el grafo, ¿a qué corresponde un cambio de base?

(iii) (**2 puntos**) La red que se muestra en la figura esquematiza una iteración del algoritmo Simplex, donde g denota el flujo que se desea reasignar por el circuito. Con esta información, indique qué pasa a continuación y justifique el por qué de su respuesta:



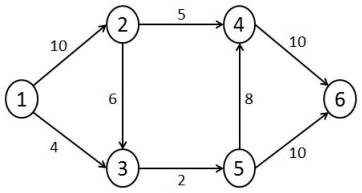
Respuesta:

(i) (**3 puntos**) Se utiliza el grafo original, así como sus atributos (costos). Todos los nodos tienen demanda/oferta nula, salvo el origen que tiene una oferta unitaria ($b_o = 1$), y el destino que tiene una demanda unitaria ($b_d = -1$).

(ii) (**1 punto**) El cambio de base se corresponde a un nuevo árbol generador, del que sale un arco para incorporar uno que no estaba transportando flujo.

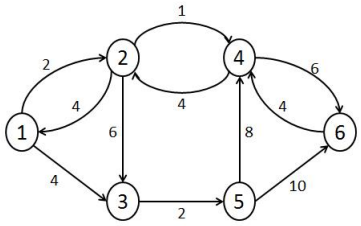
(iii) (**2 puntos**) En este caso el problema es no acotado. Esto se explica pues todos los arcos están en la misma dirección que la de incremento de flujo del arco entrante, luego, no se podrá escoger un arco saliente.

(c) (**3 puntos**) Considere la siguiente red por la que se desea transportar flujo desde el nodo 1 al nodo 6.



Sobre cada arco se indica el valor de la cota superior para el flujo que puede pasar por ese arco (es decir, la capacidad del arco). Suponga que se envían 4 unidades de flujo desde el nodo 1, siguiendo la siguiente ruta: 1-2-4-6. Muestre, usando las propiedades del problema de Flujo Máximo, que ese flujo no puede ser el máximo y justifique con claridad.

Respuesta:
Para ello, construimos la red residual de la solución de flujo entregada. Esta red es:



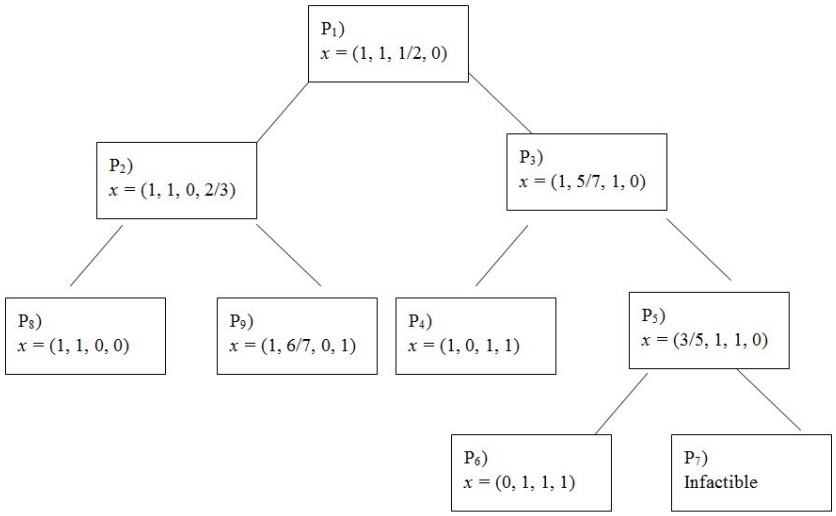
como se puede apreciar, existe al menos una ruta en la red incremental (por ejemplo 1-2-4-6) que va desde el nodo 1 (origen) al nodo 6 (destino). Luego, la solución actual no puede ser óptima.

(d) (**Bono extra: 5 puntos**) ¿Qué problemas de los que existían antes de los modelos presentados por el profesor Denis Sauré fueron solucionados mediante la incorporación de métodos de investigación de operaciones en la programación del fútbol nacional?

Respuesta:
La aplicación de las técnicas de la Investigación de Operaciones permitió mejorar la transparencia con la que se tomaban decisiones sobre la programación de partidos en el campeonato nacional chileno. Con su uso se pudo asegurar que condiciones como evitar que un equipo fuera local en 3 o más partidos consecutivos (lo mismo para sus partidos de visitante). Además, se evitó que un equipo jugará en fechas consecutivas con los tres equipos grandes. Todo esto ayudo a la confección de una programación más justa deportivamente hablando.

Pregunta 2 (10 puntos)

(a) (**4 puntos**) Dado el siguiente árbol del algoritmo Branch and Bound para un problema de la mochila con función objetivo es maximizar $8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$,



(i) ¿Está el árbol completo o falta explorar algún subproblema? Justifique.

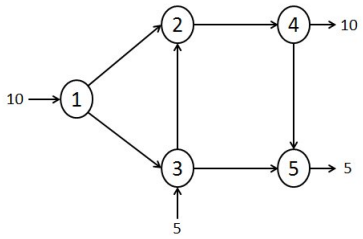
(ii) Suponga que sólo se han generado los nodos 1, 2, 3, 4 y 5. Indique cuál sería el error que se cometería al utilizar la solución entera del nodo 4 en lugar de seguir explorando el árbol y llegar al óptimo.

RESPUESTA:

(i) Falta por explorar ya que el nodo 9 aún posee una variable fraccionaria ($x_2 = 6/7$) y el valor de la función objetivo en ese nodo es $21\frac{3}{7} > 21$, y el valor del incumbente actual es 21 (del nodo 6).

(ii) El valor de la función objetivo en el nodo 4 es 18. En caso de detener la búsqueda teniendo esa solución como la mejor, se cometería un error de $21\frac{3}{7} - 18 = 3\frac{3}{7}$ que equivale a un 16 % (en realidad, mirando que los coeficientes de la función objetivo son enteros, el error máximo sería $21 - 18 = 3$ que equivale a un 14.28 %).

(b) (**3 puntos**) Considere un problema de flujo a costo mínimo sobre la red presentada en la siguiente figura.



En esta red, el nodo 1 tiene una oferta de 10, el nodo 3 una oferta de 5 y los nodos 4 y 5 tienen demandas de 10 y 5 respectivamente. Además se conocen los costos reducidos $\bar{c}_{12} = 1$ y $\bar{c}_{35} = -5$. Indique cuál es el flujo óptimo que debe pasar por cada arco. Justifique con claridad su respuesta.

RESPUESTA: La red posee 5 nodos, luego tiene 4 arcos básicos de entre los 6 que posee. Como el costo reducido de los dos que se entregan son distintos a 0, entonces son arcos no básicos. Luego, no pasa flujo por ellos, así que el flujo se está transportando desde el nodo 1 al nodo 3, y desde el nodo 3 hacia el nodo 2, luego el 4 y finalmente el 5.

Como $\bar{c}_{12} = 1$ no es conveniente transportar flujo por ese arco. Como $\bar{c}_{35} = -5$ si es conveniente transportar flujo por ese arco. En este caso, los flujos óptimos serán: $f_{12} = 0$, $f_{13} = 10$, $f_{24} = 10$, $f_{32} = 10$, $f_{35} = 5$ y $f_{45} = 10$.

(c) (**3 puntos**) Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

donde $b > 0$.

(i) (**1 puntos**) Muestre que si $a_i > b$, para algún i, entonces toda solución factible tiene que tener $x_i = 0$.

(ii) (**2 puntos**) Se dice que un subconjunto $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ define un "cover" si $\sum_{i \in C} a_i > b$. Muestre que en tal caso toda solución factible x satisface $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$, donde $|C|$ corresponde al número de elementos en el conjunto C (cardinalidad de C).

RESPUESTA:

(i) (**1 puntos**) Toda solución factible cumple que: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \Rightarrow a_i x_i + \sum_{j=1:j\neq i}^{n} a_i x_i \leq b$.

Como todos los $a_i \geq 0$, y $\sum_{j=1:j\neq i}^{n} a_i x_i \geq 0$ entonces como $a_i > b$ entonces $x_i = 0$.

(ii) (**2 puntos**) Toda solución factible cumple $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$. Lo que se puede reescribir como:
$\sum_{i \in C} a_i x_i + \sum_{i \notin C} a_i x_i \leq b$.
Ya que como los $a_i \geq 0$ se tiene que $\sum_{i \notin C} a_i x_i$, se debe cumplir que $\sum_{i \in C} a_i x_i \leq b$.
Si $\sum_{i \in C} x_i = |C| \Leftrightarrow x_i = 1 \ \forall i \in C$, entonces $\sum_{i \in C} a_i x_i = \sum_{i \in C} a_i \leq b$ y se llega a una contradicción.
Luego, $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$.

Pregunta 3 (10 puntos)

Dado el siguiente problema,

$$
P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & , & x_2 & & \text{enteras} \end{array}
$$

(a) (**1 punto**) Obtenga gráficamente el valor óptimo y solución óptima de la relajación lineal de P).

(b) (**1 puntos**) Determine el valor óptimo y solución óptima de P).

(c) (**3 puntos**) Utilice el algoritmo de Branch and Bound para resolver P). Resuelva gráficamente los subproblemas y explore primero la rama izquierda del problema raíz.

(d) (**2 puntos**) Escriba explícitamente la formulación ideal de P) (es decir, la formulación equivalente más "ajustada" para el problema).

(e) (**3 puntos**) Sean x_3 y x_4 las variables de holgura agregadas en la primera y segunda restricciones, respectivamente. Escriba un corte de Gomory, a partir de la solución óptima de la relajación lineal, en términos de x_1 y x_2 y muestre gráficamente que es efectivamente una desigualdad válida.

Algunas inversas que le pueden ser de utilidad son las siguientes (donde B_{x_k,x_l} denota la base asociada a las variables x_k y x_l):

$$B^{-1}_{x_1,\ x_2} = \begin{pmatrix} -1/13 & 4/13 \\ 4/13 & -3/13 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}_{x_3,\ x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}_{x_3,\ x_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}_{x_1,\ x_4} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pauta

(a) (**1 punto**) De la figura 1 se observa que la solución óptima de la relajación lineal de P) se obtiene en el vértice donde se intersectan las fronteras de ambas restricciones generales, de coordenadas aproximadas $(2{,}77, 0{,}92)$ y valor óptimo 10,15.

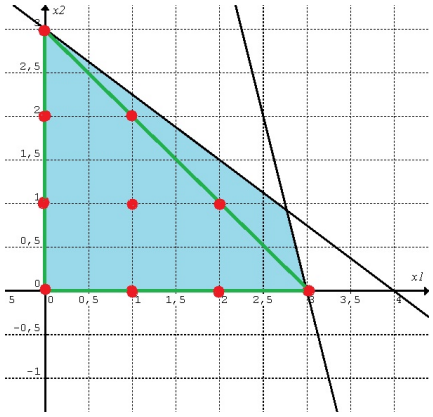


Figura 1: Dominio del problema X en rojo, de su relajación lineal en celeste, y la frontera de la formulación ideal en verde.

(b) (**1 puntos**) De la misma figura 1 se observa que el punto con coordenadas enteras con mejor evaluación es $x^* = (3, 0)$ con valor objetivo $Z^* = 9$.

(c) (**3 puntos**) Tras ejecutar el algoritmo según las instrucciones, resulta el árbol de exploración mostrado en la figura 3. La solución obtenida en el nodo P_2 es óptima y coincide con lo obtenido en la parte anterior.

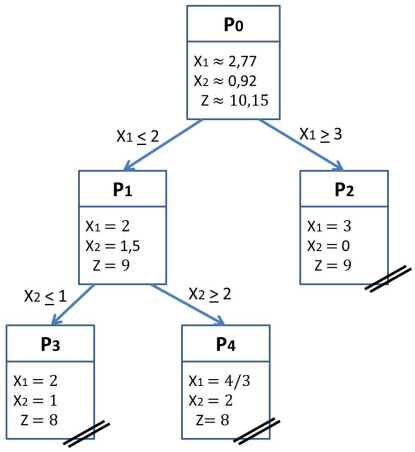


Figura 2: Árbol de exploración tras ejecutar el algoritmo de Branch and Bound según las instrucciones dadas.

Los nodos P_2 y P_3 son podados por factibilidad, mientras que P_4 es podado por cota (su valor óptimo es peor que el incumbente).

En caso de que hubieran explorado primero x_2 se tiene el siguiente árbol:

(d) (**2 puntos**) En la figura 1 la frontera de la formulación ideal esta dibujada en verde. Ésta corresponde a,

$$FE(P)) \quad \begin{array}{lrcrl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(e) (**3 puntos**) En la solución óptima de la relajación lineal, el vértice tiene asociada la base formada por las columnas de x_1 y x_2. Para generar un corte se deben calcular $B^{-1}R$ y $B^{-1}b$.

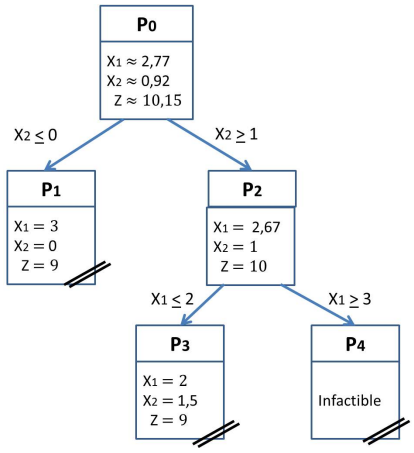


Figura 3: Árbol de exploración tras ejecutar el algoritmo de Branch and Bound primero por x_2.

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1/13 & 4/13 \\ 4/13 & -3/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/13 & 4/13 \\ 4/13 & -3/13 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} -1/13 & 4/13 \\ 4/13 & -3/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$$

Los cortes que podrían generarse son:

$$(-1/13 - \lfloor -1/13 \rfloor)\, x_3 + (4/13 - \lfloor 4/13 \rfloor\ )\, x_4 \geq 36/13 - \lfloor 36/13 \rfloor \ \Rightarrow$$

$$12/13x_3 + 4/13x_4 \geq 10/13 \Leftrightarrow 6x_3 + 2x_4 \geq 5$$

O bien,

$$(4/13 - \lfloor 4/13 \rfloor)\, x_3 + (-3/13 - \lfloor -3/13 \rfloor\ )\, x_4 \geq 12/13 - \lfloor 12/13 \rfloor \ \Rightarrow$$

$$4/13x_3 + 10/13x_4 \geq 12/13 \Leftrightarrow 2x_3 + 5x_4 \geq 6$$

Un corte es válido si,

(I) Elimina del poliedro relajado la solución fraccionaria actual.

(II) No corta a la solución óptima del problema.

Hay varias formas de mostrar que el(los) corte(s) generado(s) es(son) válido(s), en este caso. Se enuncian 2.

- Determinar que las condiciones anterior se cumplen gráficamente. Para esto se necesita escribir el corte en términos de x_1 y x_2, lo que puede hacerse despejando x_3 y x_4 de las restricciones del problema relajado en forma estándar y reemplazando en el corte.

  En este caso, los cortes corresponden a,

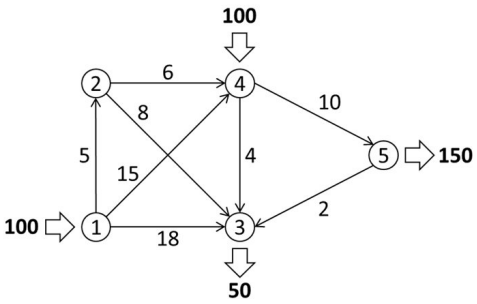
  $$x_1 + x_2 \leq 7/2$$

  $$2x_1 + x_2 \leq 6$$

- Hacerlo aritméticamente. La primera condición es trivialmente satisfecha por los cortes. Para la segunda, si uno escribe la solución óptima entera en forma estándar, obtiene el punto $(3, 0, 3, 0)$, que cumple con los cortes, como se esperaba.

Pregunta 4 (10 puntos)

Considere la siguiente red, para la cual se entregan las ofertas y demanda de cada nodo, b_i, que también llamaremos generaciones (la oferta) y atracciones (la demanda) en los nodos, y los costos unitarios de transporte en los arcos, c_{ij}.



El nodo 1 y el 4 tienen una oferta (o generación) de 100, el nodo 3 tiene una demanda (o atracción) de 50 y el nodo 5 una de 150.

(a) (**4 puntos**) Considere la solución cuyos arcos básicos son (1,2), (1,4), (2,3) y (4,5). Partiendo de esta solución, aplique el algoritmo Simplex para redes de manera de determinar el flujo sobre la red que minimiza los costos totales. Muestre con claridad los cálculos en sus iteraciones.

(b) (**2 puntos**) Manteniendo todos los demás parámetros constantes, ¿qué rango de valores puede tomar el costo del arco (1,4) sin alterar la solución óptima encontrada en (a)?

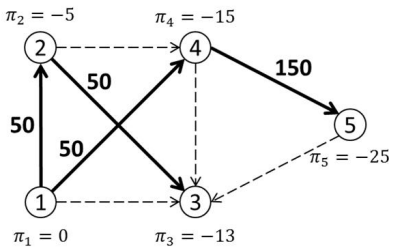
(c) (**2 puntos**) Manteniendo todos los demás parámetros constantes, ¿qué rango de valores puede tomar el costo del arco (2,4) sin alterar la solución óptima encontrada en (a)?

(d) (**2 puntos**) Sean b_i los valores de generación y atracción de los nodos de la red actual, donde $b_i > 0$ representa a los nodos de generación y $b_i < 0$ representa a los nodos de atracción (por ejemplo, $b_1 = 100$, y $b_5 = -150$). Suponga que a cierto nodo i se le agregan x unidades de flujo generado (es decir, el nuevo flujo generado o atraído en el nodo i es de $b_i^{'} = b_i + x$), y que a otro nodo $j \neq i$ se le quitan estas unidades de flujo para compensar (es decir, $b_j^{'} = b_j - x$). ¿Qué condición deben cumplir los nodos i y j para que este cambio no afecte la estructura de la solución óptima actual?

Nota: considerar para las partes (b) y (c) que en este problema está permitido que los costos de los arcos puedan tomar valores negativos.

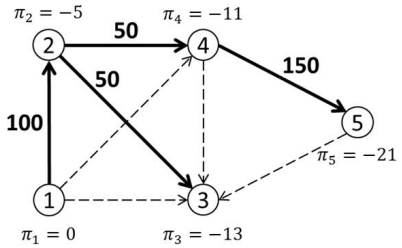
Pauta

(a) (**4 puntos**) La red inicial es la siguiente:



cuyos costos reducidos son $\bar{c}_{13} = 5$, $\bar{c}_{24} = -4$, $\bar{c}_{43} = 6$ y $\bar{c}_{53} = 8$. Haciendo entrar el arco (2,4).

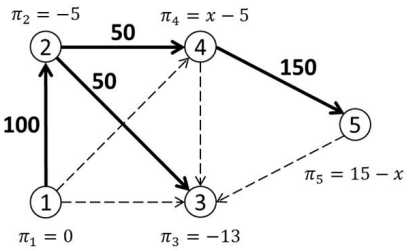
La red resultante es:



cuyos costos reducidos son $\bar{c}_{13} = 5$, $\bar{c}_{14} = 4$, $\bar{c}_{43} = 2$ y $\bar{c}_{53} = 10$. Como todos los costos reducidos de los flujos no básicos son ≥ 0, la solución actual es óptima.

(b) (**2 puntos**) El costo reducido $\bar{c}_{14} = 4$. Esto significa que el costo del arco puede bajar hasta 4 unidades sin alterar la solución, es decir, $c_{14} > 11$. En el caso de igualdad se dan soluciones múltiples.

(c) (**2 puntos**) Sobre la solución óptima, calculamos los costos reducidos tomando $c_{24} = x$:



Los costos reducidos de los arcos no básicos ahora son:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{13} &= 5 \\ \bar{c}_{14} &= 10 - x \\ \bar{c}_{43} &= x - 4 \\ \bar{c}_{53} &= x + 4 \end{aligned}$$

Para que todos estos costos reducidos sean positivos se debe dar que $4 < c_{24} < 10$.

(d) (**2 puntos**) Dado que los costos reducidos no dependen de los valores de b_i, la solución será óptima si el flujo adicional es factible. Dado que la red no posee capacidades máximas, esto sucederá cuando existe un camino dirigido desde i hasta j en el árbol de arcos básicos. De no suceder esto, la solución óptima actual no es factible, y la estructura entonces cambia.

Pregunta 5 (15 puntos)

Uno de los problemas principales que enfrenta un gran hospital complejo es la programación de las operaciones en los quirófanos. Suponga que quiere ayudar a un hospital a la programación semanal de operaciones, para lo cual debe asignar las operaciones que se realizarán diariamente, durante los siete días de la semana. No importa el orden en que se hacen las operaciones en un día particular ya que esa decisión se toma en un horizonte de tiempo más corto. Se tienen N quirófanos y cada quirófano está disponible Q_t horas en el día t. Se deben organizar durante la semana un total de P operaciones (todas deben hacerse) y la duración de la operación i es de w_i horas. Si bien en principio una operación puede hacerse en cualquiera de los quirófanos, existe un índice de preferencia que corresponde a un número R_{ij} asociado a la realización de la operación i en el quirófano j.

(a) **(9 puntos)** Escriba un modelo de Programación Entera que permita determinar la asignación diaria de operaciones de cada quirófano de modo tal que en el total de la semana se maximice el índice de preferencia acumulado.

(b) **(6 puntos)** Suponga ahora que cada operación puede ser realizada por algunos equipos médicos según la especialidad. Más específicamente, suponga que existen S equipos médicos y que el equipo médico k sólo puede realizar las operaciones del conjunto $O(k) \subset \{1, \ldots, P\}$. Además, la política del hospital establece que cada equipo médico no puede realizar más de tres operaciones en cada día de la semana. Escriba las variables y restricciones que debe agregar a su modelo de (a) para representar esta situación.

Pauta

(a) **(9 puntos)** Para esto consideremos una variable x_{ijt} que vale 1 si la operación i se hace en el quirófano j en el día t. El modelo para la parte a) es bastante estándar y directo:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{t=1}^{7} \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} R_{ij} x_{ijt} \\
s.a. \quad & \sum_{t=1}^{7} \sum_{j=1}^{N} x_{ijt} = 1, \ i = 1, \ldots, P && (1) \\
& \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} w_i x_{ijt} \leq Q_t, \ t = 1, \ldots, 7 && (2) \\
& x_{ijt} \in \{0, 1\}, \ i = 1, \ldots, P; t = 1, \ldots, 7; j = 1, \ldots, N. && (3)
\end{aligned}
$$

La restricción (1) establece que cada operación se debe hacer en algún quirófano algún día. La restricción (2) impone la limitante del tiempo diario.

(b) **(6 puntos)** En este caso necesitamos una variable que nos relacione las operaciones con los equipos médicos. Sea y_{ikt} igual a 1 si la operación i es realizada por el equipo k en el día t.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N} x_{ijt} = \sum_{k : i \in O(k)} y_{ikt} && i = 1, \ldots, P; t = 1, \ldots, 7. && (1) \\
& \sum_{i \in O(k)} y_{ikt} \leq 3 && k = 1, \ldots, S; t = 1, \ldots, 7 && (2) \\
& y_{ikt} \in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, P; k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, 7. && (3)
\end{aligned}
$$

La restricción (1) define y en función de x. La restricción (2) impone que un equipo no trabaje en tres operaciones durante un mismo día. La restricción (3) explícita la naturaleza de la variable y.