PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - F.Palominos - J.Vera

# Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas y 20 minutos.

## Pregunta 1 (17 puntos)

(a) (**3 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j)^j$$

¿Para qué valores de $\alpha_j, \forall j = 1, \ldots, n$ (que no sean todos idénticamente nulos) este problema tiene garantizadamente siempre solución óptima? Explique con claridad.

**Respuesta:** Basta que $\alpha_j = 0$ para $j$ impar y $\alpha_j \geq 0$ para $j$ par. De este modo, en cada potencia par podemos usar el argumento de la hipótesis H para garantizar que el problema tenga solución.

(b) (**3 puntos**) Considere un problema de Programación Lineal de minimización, $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, que es resuelto por el Método Simplex hasta que se alcanza el criterio de optimalidad, con $\bar{c}_j \geq 0$, para todo $j$. Sin embargo, la solución actual es tal que existe un índice $k$ de variable no básica tal que $\bar{c}_k = 0$ y adicionalmente los coeficientes de la columna $\bar{R}_k = B^{-1} R_k$ (donde $R_k$ es la columna $k$ de $A$) son todos $\leq 0$. Explique con precisión qué está pasando aquí con la solución del problema.

**Respuesta:** Esta es una situación en donde hay múltiples soluciones, pero estas están en una "cara" o "arista" del poliedro que se extiende hacia el infinito a través de una dirección de no acotamiento. Sin embargo, como $\bar{c}_k = 0$, el problema no alcanza a ser no acotado, tiene soluciones finitas, incluyendo un punto extremo (tengo que hacer un mono).

(c) (**8 puntos**) Indique en forma precisa y justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.

(i) (**2 punto**) En un poliedro de la forma $Ax = b, x \geq 0$, toda solución básica corresponde a un punto extremo.

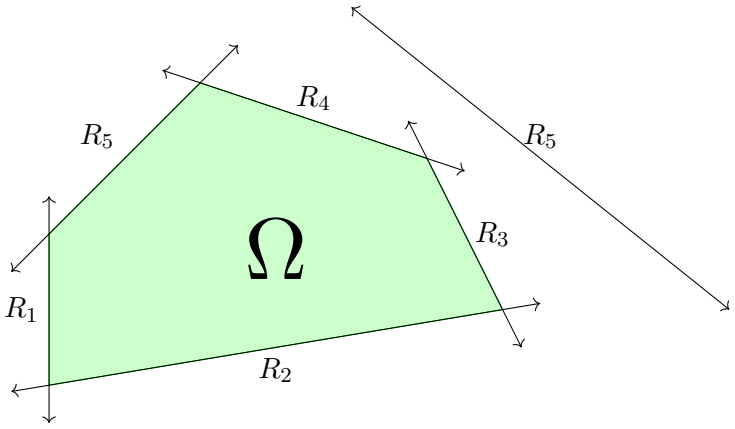
**Respuesta:** No necesariamente ya que algunas bases pueden dar origen a soluciones no factibles.

(ii) (**2 punto**) Considere el problema de optimización $\min\{f(x) : x \in D\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado (compacto), y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $f$ no es continua, entonces el problema no puede tener soluciones óptimas.

**Respuesta:** Por supuesto que no, un ejemplo es la función definida como $f(x) = 0, -1 \leq x \leq 0, f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$, la cual alcanza mínimos y máximos en el intervalo.

(iii) (**2 puntos**) Un problema de Programación Lineal que tenga restricciones redundantes (es decir, que al removerlas del problema, la región factible no cambia), siempre tendrá algún punto extremo correspondiente a soluciones básicas degeneradas.

**Respuesta:** No necesariamente, las restricciones redundantes podrían no tocar la región factible y en ese caso no producen degenerancia. Un ejemplo se muestra en la siguiente figura.




(iv) (**2 puntos**) En el algoritmo Simplex (de minimización), el elegir el costo reducido más negativo garantiza el máximo cambio de función objetivo de una iteración a la siguiente.

**Respuesta:** No, esta es una discusión estándar, sólo garantiza el mejor avance marginal.

(d) (**3 puntos**) Sean $f$ y $g$ funciones convexas en $\mathbb{R}^n$. Sea $h = f - g$. ¿Con qué condición adicional en $g$ se tiene garantizadamente que $h$ es convexa (que no sea la condición trivial $g \equiv 0$)?

**Respuesta:** Una condición es que $g$ seal lineal. En ese caso, $-g$ es convexa (y cóncava).

## Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**5 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal, donde $n$, el número de variables es par y $m = n/2$:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
s.a. & -nx_1 + \sum_{j=2}^{n} x_j & \leq 1 \\
& x_1 - nx_2 + \sum_{j=3}^{n} x_j & \leq 1 \\
& x_1 + x_2 - nx_3 + \sum_{j=4}^{n} x_j & \leq 1 \\
& \vdots \quad \vdots & \vdots \\
& \sum_{j=1}^{k-1} x_j - nx_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j & \leq 1 \\
& \vdots \quad \vdots & \vdots \\
& \sum_{j=1}^{m-1} x_j - nx_m + \sum_{j=m+1}^{n} x_j & \leq 1 \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

Muestre que este problema es no acotado si los coeficientes $c_j, j = 1, \ldots, m$ son todos $> 0$. Justifique con precisión su argumento.

**Respuesta:** Notar primero que el problema es factible ya que $x = 0$ cumple todas las restricciones. Tomemos el vector $x(\lambda)$ definido de la siguiente forma:

$$x(\lambda)_j = \lambda, j = 1, \ldots, m;\ x(\lambda)_j = 0, j = m+1, \ldots, n.$$

Si evaluamos este punto en las restricciones tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} x(\lambda)_j - nx(\lambda)_k + \sum_{j=k+1}^{n} x(\lambda)_j &= \sum_{j=1}^{k-1} x(\lambda)_j - nx(\lambda)_k + \sum_{j=k+1}^{m} x(\lambda)_j + \sum_{j=m}^{n} x(\lambda)_j \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda - n\lambda + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda \\
&= (m-1)\lambda - n\lambda \\
&= (m-1-n)\lambda
\end{aligned}$$

y esto último es $< 0$ para $\lambda > 0$. Luego, $x(\lambda)$ es factible, para todo $\lambda > 0$. Por otro lado, es inmediato que si $c_j > 0$ en el rango indicado, entonces $c^T x(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j$ y esto crece a $\infty$ cuando $\lambda$ crece. Luego, el problema es no acotado.

Esto es totalmente equivalente al argumento de encontrar una dirección de no acotamiento en el cono de recesión del poliedro.

(b) (**7 puntos**) Sea $P := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n \right\}$, donde $a_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$ y $b > 0$.

(i) (**2 puntos**) Demuestre que $P$ es un conjunto acotado.

**Respuesta:** Se tiene, directamente de la definición de $P$ que $0 \leq x_i \leq 1\ \forall i = 1, \ldots, n$, luego $P$ es acotado.

(ii) (**2 puntos**) Demuestre que $P$ tiene puntos extremos.

**Respuesta:** Para esto, basta ver que $x_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$ satisface todas las condiciones (recordar que $b > 0$), luego es factible, y claramente es una intersección en $\mathbb{R}^n$, entonces, $P$ tiene al menos este punto extremo.

(iii) (**3 puntos**) Demuestre que si $x \in P$ es un punto extremo, entonces a lo más una componente de $x$ puede tener un valor fraccionario.

**Respuesta:** El problema está definido en $n$ variables, luego, un punto extremo de $P$ tendrá $n$ restricciones activas. Es así como podemos analizar los puntos extremos bajo dos casos:

(1) La restricción $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$ es inactiva. Entonces se tiene que de entre las $n$ restricciones $x_i \geq 0$ y las $n$ restricciones $x_i \leq 1$ se deben encontrar $n$ restricciones activas. Es fácil ver que en este caso toda variable $x_i = 0 \vee 1\ \forall i = 1, \ldots, n$. Luego, no hay variables fraccionarias.

(2) La restricción $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$ es activa. Entonces se tiene que de entre las $n$ restricciones $x_i \geq 0$ y las $n$ restricciones $x_i \leq 1$ se deben encontrar $n-1$ restricciones activas. Digamos en este caso que salvo la variable $x_i$ todas las demás son tal que $x_j = 0 \vee 1\ \forall j = 1, \ldots, n : j \neq i$. Luego, la variable $x_i$ es la única que podría ser fraccionaria.

(c) (**3 puntos**) Suponga que en un modelo de optimización, donde $x$ es un vector de ciertas variables de decisión, aparecen las siguientes restricciones (además de muchas otras):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j &\leq (1-z)\beta + zM \\ \sum_{j=1}^{n} e_j x_j &\leq z\gamma + (1-z)M \\ z &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

donde los $a_j, e_j$ junto con $\beta$ y $\gamma$ son parámetros y $M$ es un número muy grande (más grande que cualquier posible valor del lado izquierdo de las restricciones). Explique qué significan estas restricciones y ejemplifíquelo con una situación práctica (no numérico).

**Respuesta:** La variable $z$, que se define binaria, asegura que solamente una de las dos restricciones antes definidas deberá ser cumplida (mientras la otra deja de ser exigida). En este sentido, si $z = 1$ la primera restricción tiene como límite $M$ al lado derecho, y por lo tanto, no restringe al lado derecho. En este caso, la segunda restricción limitará el lado derecho a $\gamma$. Para el caso $z = 0$ el análisis es análogo.

Como ejemplo, consideremos que tenemos dos condiciones para cargar una mochila. La primera restricción limita la carga según peso, en este caso $a_j$ representaría el peso del elemento $j$ y $\beta$ el peso máximo que puede cargarse en la mochila. La segunda restricción limita la carga según volumen, en este caso $e_j$ representaría el volumen del elemento $j$ y $\gamma$ el volumen máximo que puede cargarse en la mochila. Es así como $z = 1$ hará que condicionemos el problema solamente a una restricción de volumen, y $z = 0$ a que lo limitemos solamente a una restricción de peso.

## Pregunta 3 (12 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrl} \text{Max} & 6x_1 + 3x_2 & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 42 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

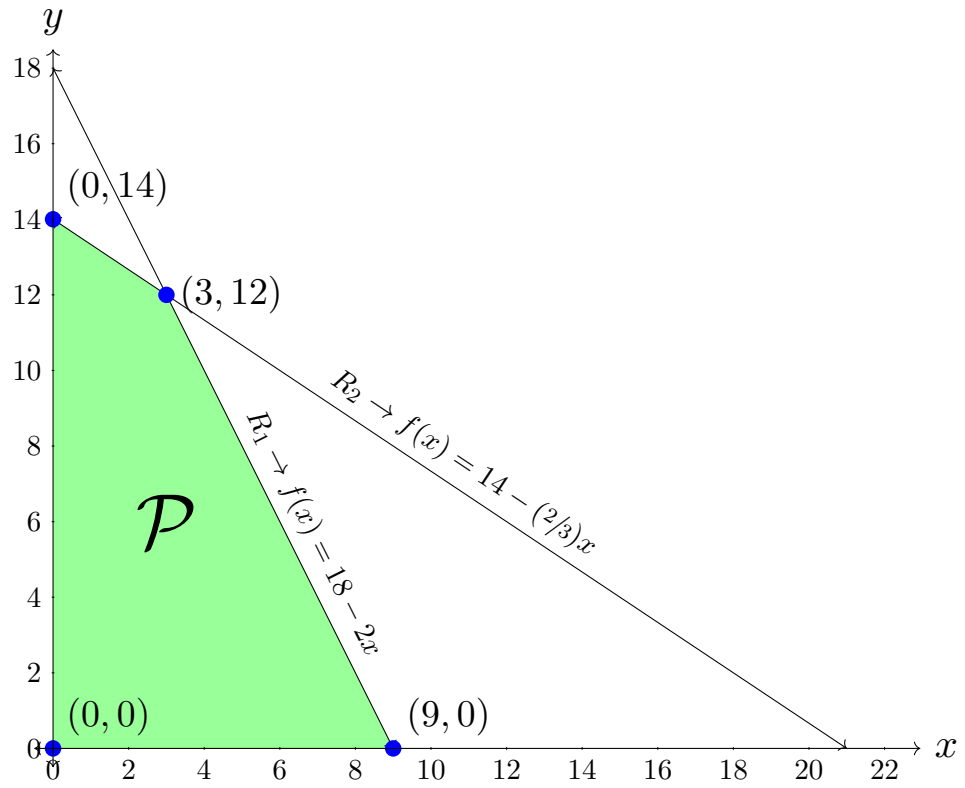
(a) (**1 punto**) Escriba este problema en formato estándar.

**Respuesta:** Este problema en formato estándar queda:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \text{Min} & -6x_1 & - & 3x_2 & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 18 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = 42 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

(b) (**2 puntos**) Grafique el conjunto de soluciones factibles.

**Respuesta:** El gráfico es:




(c) (**2 puntos**) Identifique en el gráfico todas las soluciones básicas del sistema de ecuaciones del problema en la forma estándar. Para cada una de ellas indique cuáles variables son básicas y cuáles son no básicas. Explicite las restricciones activas e inactivas del problema original para cada punto.

**Respuesta:** Todas las soluciones básicas del sistema son:

| Vértice | Factible | Variables Básicas | Variables No Básicas | Restricciones Activas | Restricciones Inactivas |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,0)$ | Sí | $x_3, x_4$ | $x_1, x_2$ | (3)(para $x_1$ y $x_2$) | (1), (2) |
| $(0,14)$ | Sí | $x_2, x_3$ | $x_1, x_4$ | (2), (3)(para $x_1$) | (1), (3)(para $x_2$) |
| $(3,12)$ | Sí | $x_1, x_2$ | $x_3, x_4$ | (1), (2) | (3)(para $x_1$ y $x_2$) |
| $(9,0)$ | Sí | $x_1, x_4$ | $x_2, x_3$ | (1), (3)(para $x_2$) | (2), (3)(para $x_1$) |
| $(0,18)$ | No | $x_2, x_4$ | $x_1, x_3$ | (1), (3)(para $x_1$) | (2), (3)(para $x_2$) |
| $(21,0)$ | No | $x_1, x_3$ | $x_2, x_4$ | (2), (3)(para $x_2$) | (1), (3)(para $x_1$) |

En esta parte, basta con que se expliciten las soluciones básicas factibles (las cuatro primeras).

(d) (**2 puntos**) Obtenga en base al gráfico el valor óptimo y las coordenadas de la solución óptima (responda esto explícitamente en esta parte, no sobre el gráfico de (b), por favor).

**Respuesta:** Los puntos extremos (soluciones básicas factibles) son 4:

| Vértice | Valor Función Objetivo | ¿Óptimo? |
|---|---|---|
| $(0,0)$ | 0 | No |
| $(0,14)$ | 42 | No |
| $(3,12)$ | 54 | Sí |
| $(9,0)$ | 54 | Sí |

Como se puede apreciar, este problema tiene múltiples soluciones.

(e) (**2 puntos**) Considere el punto $(x_1, x_2) = (0, 14)$, punto extremo del correspondiente poliedro. A partir de este punto, utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex para determinar si esta solución es óptima o no. En caso que la solución no sea óptima, utilice los criterios del algoritmo Simplex para determinar el próximo punto a evaluar. Sea claro en todos sus pasos. Para este siguiente punto, indique si es óptimo.

**Respuesta:** En el punto (0,14) se tiene que las variables básicas son $x_2$ y $x_3$ y las no básicas son $x_!$ y $x_4$. Entonces:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

así:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución actual no es óptima.

Así, $x_1$ entra a la base, y para ver que variables sale se tiene:

$$\delta = \min \left\{ \frac{14}{2/3}, \frac{4}{4/3} \right\} = 3$$

con lo que $x_3$ sale de la base.

Así, las variables básicas son $x_1$ y $x_2$ y las no básicas $x_3$, $x_4$. Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

así:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la solución actual es óptima (y con múltiples soluciones).

(f) (**1 punto**) Indique si la solución encontrada es única. Justifique.

**Respuesta:** La solución no es única, ya que un costo reducido es 0 (tal como se obtuvo en la letra anterior). Observando el gráfico, también se puede apreciar que existen múltiples soluciones (la pendiente de las curvas de nivel es igual a la pendiente de la restricción (1))

(g) (**2 puntos**) Considere el coeficiente de la variable $x_1$ en la función objetivo ($c_1 = 6$). Determine el intervalo en el que puede variar $c_1$ para que la estructura de la solución óptima que obtuvo en (e) no cambie. **Respuesta:** Acá se aceptan dos respuestas.

Opción 1:
Si se desea mantener el escenario de múltiples soluciones, entonces el costo no debe variar (en

este caso se debe mencionar de forma explícita que desea mantener las múltiples soluciones como estructura).

Opción 2:
Ahora, si solamente se quiere asegurar que el punto extremo determinado en la parte anterior siga siendo óptimo, se tiene:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3c_1}{4} - \frac{3}{2} & \frac{c_1}{4} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Para mantener el mismo óptimo (identificado con las mismas restricciones activas), se tiene que, los costos deben ser positivos, por lo que el costo debe cumplir: $-6 \leq c_1 \leq -2$.

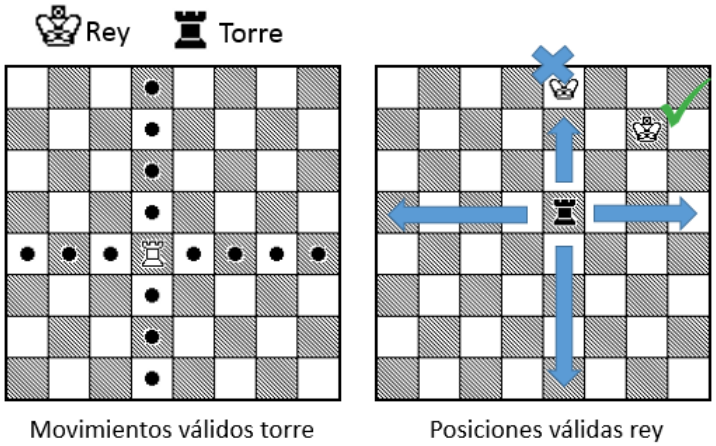
**Indicación:** Le puede ser útil recordar cómo calcular la inversa de una matriz de $2 \times 2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## Pregunta 4 (16 puntos)

Un amigo lo desafía al siguiente juego. En un tablero de ajedrez se deben posicionar un máximo de 5 reyes blancos y la mayor cantidad de torres negras dentro del tablero, pero que permitan aún dejar a los reyes blanco fuera de jaque. Asuma que se dispone de un tablero tradicional de ajedrez (de 8 filas y 8 columnas, formando 64 casillas que intercalan colores blanco con negro), y que dispone de cuantas torres negras usted estime conveniente y, como se indicó, de un máximo de 5 reyes blancos para disponer sobre el tablero. Considere que las reglas del juego impiden que pueda haber más de una pieza posicionada en una misma casilla, y adicionalmente, las torres deben ser posicionadas de modo que no pongan en jaque al rey blanco (esto último ocurre cuando una torre y el rey están en una misma fila o columna).

Asuma que por cada torre negra que se logra posicionar dentro del tablero (independiente del color de la casilla) se obtiene un beneficio igual a $\alpha$. A su vez, por cada rey blanco que se logra posicionar en una casilla blanca se obtiene un beneficio igual a $2\alpha$, y de $1.5\alpha$ en caso de posicionarlo en una casilla negra.




(a) (**3 puntos**) Defina claramente todos los índices, conjuntos, parámetros, variables y supuestos que utilizará en su modelación.

**Respuesta:** Las definiciones solicitadas son:

**Sets**:

$i$: Set $i$ de posiciones a nivel fila, con $i = 1..,8$.

$j$: Set $i$ de posiciones a nivel columna, con $j = 1..,8$.

$ii$: Set auxiliar, replica de set $i$.

$jj$: Set auxiliar, replica de set $j$.

**Parámetros**:

$P_{(i,j),(ii,jj)}$: 0 si el rey blanco puede posicionarse en la casilla $(i, j)$ si existe una torre negra en la casilla $(ii, jj)$, 1 en caso contrario.

$F_{(i,j)}$: Beneficio esperado en caso de posicionar un rey blanco en la casilla $(i, j)$

$M$: Valor grande.

**Variables**:

$X_{(i,j)}$: 1 si el rey blanco se posiciona en la casilla $(i, j)$, 0 en caso contrario.

$T_{(i,j)}$: 1 si se posiciona una torre negra en la casilla $(i, j)$, 0 en caso contrario.

(b) (**8 puntos**) Construya un modelo de programación lineal entera que le permita encontrar la distribución óptima de piezas sobre el tablero que maximiza el beneficio.

**Respuesta:** El modelo a optimizar es el siguiente.

**Función Objetivo**:

$$\text{máx} \sum_{i} \sum_{j} \alpha \cdot T_{(i,j)} + F_{(i,j)} \cdot X_{(i,j)}$$

s.a

$$\sum_{(i,j)} X_{(i,j)} \geq 1 \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j)} X_{(i,j)} \leq 5 \tag{2}$$

$$X_{(i,j)} + T_{(i,j)} \leq 1 \qquad \forall i, j \tag{3}$$

$$X_{(i,j)} \leq 1 - \frac{P_{(i,j),(ii,jj)} \cdot T_{(ii,jj)}}{M} \qquad \forall i, j, ii, jj \tag{4}$$

$$X_{(i,j)}, T_{(i,j)} \in \{0, 1\} \forall i, j \tag{5}$$

**Restricciones**:

1: Debe existir al menos un rey blanco.

2: No se pueden utilizar más de 5 reyes.

3: Solo puede existir a lo más una pieza por casilla.

4: No posicionar al rey blanco en una casilla que lo deje en jaque.

5: Naturaleza binaria de las variables.

(c) (**5 puntos**) Su amigo le propone ahora algunas modificaciones al juego. Por cada 5 torres que se posicionen en el tablero se obtendrá un beneficio adicional igual a $\beta$, y por cada 4 torres que se posicionen en una casilla blanca se obtendrá un beneficio adicional igual a $\gamma$. Modifique el modelo planteado en la parte (b) de modo de incluir estas modificaciones.

**Respuesta:** En este caso se tiene:

**Sets**:

$k$: Set auxiliar, k=1...13.

$t$: Set auxiliar, t=1...8.

**Parámetros**:

$B_{(i,j)}$: 1 si la casilla $(i,j)$ es blanca, 0 en caso contrario.

**Variables**:

$W_k$: 1 tengo más de $5 \cdot ord(k)$ torres en el tablero, 0 en caso contrario.

$Y_t$: 1 tengo más de $4 \cdot ord(t)$ torres en casillas blancas, 0 en caso contrario.

El modelo a optimizar es el siguiente.

**Función Objetivo**:

$$\text{máx} \sum_i \sum_j \alpha \cdot T_{(i,j)} B_{(i,j)} \cdot X_{(i,j)} + \sum_k \beta \cdot W_k + \sum_t \gamma \cdot Y_t$$

s.a

$$\sum_{(i,j)} X_{(i,j)} \geq 1 \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j)} X_{(i,j)} \leq 5 \tag{7}$$

$$X_{(i,j)} + T_{(i,j)} \leq 1 \qquad \forall i,j \tag{8}$$

$$X_{(i,j)} \leq 1 - \frac{P_{(i,j),(ii,jj)} \cdot T_{(ii,jj)}}{M} \qquad \forall i,j,ii,jj \tag{9}$$

$$W_k \leq \frac{\sum\limits_{(i,j)} T_{(i,j)}}{5 \cdot ord(k)} \qquad \forall k \tag{10}$$

$$Y_T \leq \frac{\sum\limits_{(i,j)} B_{(i,j)} \cdot T_{(i,j)}}{4 \cdot ord(t)} \qquad \forall t \tag{11}$$

$$X_{(i,j)}, T_{(i,j)}, W_k, Y_t \in \{0,1\} \forall i,j \tag{12}$$

**Restricciones**:

6: Debe existir al menos 1 rey blanco.

7: No se pueden utilizar más de 5 reyes.

8: Solo puede existir a lo más una pieza por casilla.

9: No posicionar al rey blanco en una casilla que lo deje en jaque.

10: Control para recibir beneficio por cada 5 torres.

11: Control para recibir beneficio por cada 4 torres posicionadas en casillas blancas.

12: Naturaleza binaria de las variables.