PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 1-2022
Profesores: G. Angulo, S. Vásquez
J. González, G. Méndez,
F. Verástegui, R. Cuadrado

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: Viernes 1 de abril - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea.
- La entrega de la Tarea se hace online en formato PDF a través de Canvas. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano, cualquiera sea esta decisión la tarea debe **estar ordenada y legible**. Se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable en el caso de haberla escrito a mano. El formato de entrega del archivo es **numerodegrupo.pdf**.

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la Tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la Tarea para incentivar este formato. Por otro lado, quedará a criterio del ayudante corrector si aplicar un descuento de **3 décimas sobre la nota final de la tarea** en el caso de que el orden y legibilidad de esta dificulte su proceso de corrección.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 1 de abril a las 23:59:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**. Es responsabilidad de cada grupo hacer entregas parciales.
- Esta tarea es grupal, y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, deben ser envíadas a través del foro dispuesto en Canvas para la Tarea. De esta forma, todos los alumnos se verán beneficiados de la aclaración que haga el ayudante y se evita responder preguntas duplicadas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se intentará responder las preguntas en el foro de la forma más rápida y completa posible. Sin embargo, el **día de la entrega se dejarán de responder consultas**.

  Finalmente, cualquier **duda administrativa** debe ser enviada al ayudante coordinador de las tareas José Tomás Grez al mail *jtgrez@uc.cl*.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

La pastelería local Dulces debe tomar una serie decisiones relativas a qué productos producir cada día. La pastelería elabora N productos distintos.
Se sabe que Dulces cuenta con M trabajadores y que la cantidad del producto $i \in \{1, ..., N\}$ que puede producir como máximo el trabajador $j \in \{1, ..., M\}$ en una hora es $t_{ij} \in \mathbb{Z}_+$. El trabajador puede realizar como máximo un tipo de producto en cada hora de trabajo. La jornada laboral de la pastelería es de D horas diarias. Cada trabajador tiene un suedo de $\$S$ por hora trabajada (un trabajador puede no trabajar las D horas del día).
Los productos son pedidos con anticipación por los clientes, por lo que se sabe que para un dia $k \in \{1, ..., K\}$, la demanda de un producto i es d_{ik}. Sumado a esto, hay una serie de productos $p \in P \subseteq \{1, ..., N\}$ de los cuales Dulces produce Q_p unidades todos los días para que clientes que pasen por la tienda puedan comprarlos en el mismo lugar. Suponga que todas estas unidades se venden al final del día, es decir, las Q_p unidades se terminan. La demanda anticipada de los clientes d_{ik} es adicional a la demanda diaria que existe en tienda de Q_p, la cual puede ser satisfecha utilizando unidades del producto p independiente de sus días de vencimiento restantes.
Se sabe que el costo de producir un producto i el día k es C_{ik} y que el precio al que se vende es igual todos los días y es G_i.
Dulces cuenta con una bodega para dejar los productos terminados, es decir, cada producto que realiza uno de los trabajadores termina en la bodega y de ella salen hacia los clientes. Asuma que los productos pedidos se entregan al final de cada día. Sin embargo, debe tener en cuenta que cada producto i tiene una fecha de vencimiento, por lo que se debe usar antes de los exp_i días para que se entregue en buen estado.
Formule un problema de optimización lineal que maximice las ganancias de Dulces en un horizonte de K días, satisfaciendo la demanda y las otras condiciones descritas. Defina claramente sus variables de decisión restricciones y función objetivo.

Solución

Variables de decisión

- $x_{ijhk} : \begin{cases} 1 & si\ el\ trabajador\ j\ realiza\ el\ producto\ i\ el\ día\ k\ en\ la\ hora\ h \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$
- y_{ijhk}: Cantidad del producto i que realizó el trabajador j en la hora h del día k
- f_{ike}: Cantidad demandada del producto i el día k que vence en e días.
- z_{ike}: Cantidad en la bodega del producto i que hay el día k que expira en e días
- r_{ie}: Cantidad comprada en tienda del producto i que vence en e días

Función Objetivo:

$$max \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \sum_{e=1}^{exp_i} G_i \cdot f_{ike} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{p \in P} \sum_{e=1}^{exp_p} G_p \cdot r_{pe} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{M} \sum_{h=1}^{D} (C_{ik} \cdot y_{ijhk} + S \cdot x_{ijhk})$$

Restricciones:

1. Un trabajador no puede realizar dos productos distintos al mismo tiempo

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ijhk} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, ..., M\} \forall h \in \{1, ..., D\} \\ \forall k \in \{1, ..., K\}$$

2. Los trabajadores tienen capacidad máxima de producción por hora.

$$y_{ijhk} \leq t_{ij} \cdot x_{ijhk} \quad \begin{array}{l} \forall j \in \{1, ..., M\} \forall i \in \{1, ..., N\} \\ \forall k \in \{1, ..., K\} \forall h \in \{1, ..., D\} \end{array}$$

3. Separación de la demanda por fecha de vencimiento.

$$\sum_{e=1}^{exp_i} f_{ike} = d_{ik} \quad \forall i \in \{1, ..., N\} \forall k \in \{1, ..., K\}$$

4. Inventario de productos, respetando la fecha de vencimiento

$$z_{ike} = z_{i,k-1,e+1} - f_{ike} \qquad \begin{array}{c} \forall i \in \{1, ..., N\} \setminus P, \ \forall e \in \{1, ..., exp_i - 1\} \\ \forall k \in \{2, ..., K\} \end{array}$$

$$z_{ik,exp_i} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{h=1}^{D} y_{ijhk} - f_{ik,exp_i} \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \setminus P, \ \forall k \in \{1, ..., K\}$$

5. Separación de la demanda en tienda por fecha de vencimiento

$$\sum_{e=1}^{exp_i} r_{pe} = Q_p \quad \forall p \in P$$

6. Inventario de productos con demanda en tienda.

$$z_{pke} = z_{p,k-1,e+1} - f_{pke} - r_{pe} \qquad \begin{array}{c} \forall p \in P, \forall e \in \{1, ..., exp_p - 1\} \\ \forall k \in \{2, ..., K\} \end{array}$$

$$z_{pk,exp_p} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{h=1}^{D} y_{pjhk} - f_{pk,exp_p} - r_{pe} \qquad \forall p \in P, \forall k \in \{1, ..., K\}$$

7. Inventario productos en un inicio:

$$z_{i1e} = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., N\}, \ \forall e \in \{1, ..., exp_i - 1\}$$

8. Relación de variables (se complementa con restricción 2):

$$x_{ijhk} \leq y_{ijhk} \quad \begin{array}{l} \forall i \in \{1, ..., N\} \forall j \in \{1, ..., M\} \\ \forall h \in \{1, ..., D\} \forall k \in \{1, ..., K\} \end{array}$$

9. Naturaleza de las variables

$$\begin{array}{c} x_{ijhk} \in \{0, 1\} \\ y_{ijhk} \geq 0 \\ f_{ike} \geq 0 \\ z_{ike} \geq 0 \\ r_{ie} \geq 0 \end{array}$$

Problema 2.

(a) Sea $X = [0, 10]^2$, es decir, $0 \leq x_1 \leq 10$ y $0 \leq x_2 \leq 10$. Consideremos las restricciones $x_1 \geq 4$ y $x_2 \geq 6$.

(I) Graficar los $x \in X$ tales que $x_1 \geq 4$ o (sin excluir) $x_2 \geq 6$.

(II) Usando una sola variable binaria, modelar $x_1 \geq 4$ o $x_2 \geq 6$, teniendo en cuenta que $x \in X$, indicando explícitamente el valor mínimo que puede tomar la M grande.

(III) Graficar los (x, y) que satisfacen el punto (II).

(b) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{llcll} (P) & \text{mín} & c^T x & & \\ & \text{s.a.} & a_i^T x & \leq & b_i \quad \forall i \in \{1, ..., p\} \\ & & x & \in & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, (con $i \in \{1, ..., p\}$), son constantes.
Modifique el modelo (P), agregándole nuevas restricciones y/o variables, para que x sea tal que deba cumplir, al menos, k restricciones, con $0 \leq k \leq p$.

(c) Considerando el mismo modelo anterior (P), realice los cambios necesarios, agregándole nuevas restricciones y/o variables, para que x sea tal que cumpla todas las restricciones con índice par o todas las restricciones con índice impar del modelo original. Asuma que p es impar.

Solución

(a) (I) El gráfico es el siguiente:

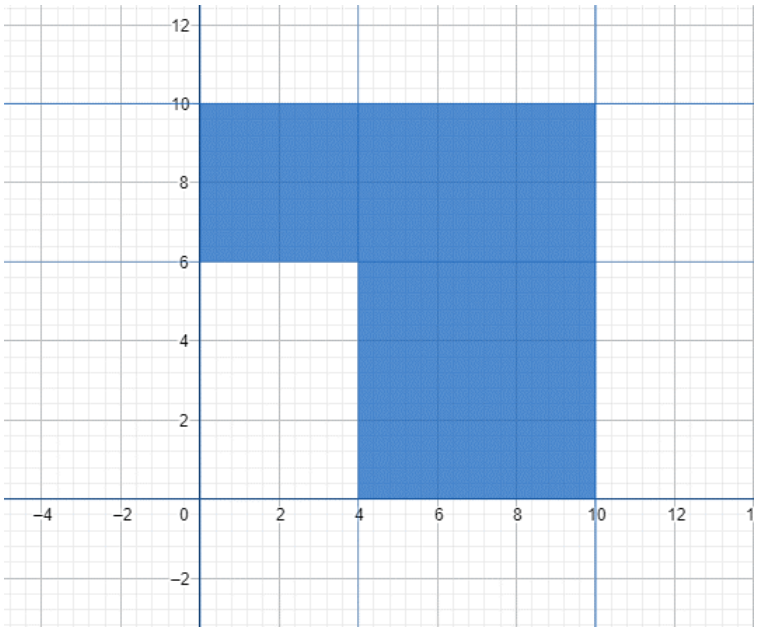


Figura 1

(II) Sea la variable binaria y y un M lo suficientemente grande para el modelo. Para que este M cumpla su función, debe tener un valor mínimo de 6.

- $\diamond$ $6 \cdot y + x_1 \geq 4$
- $\diamond$ $6 \cdot (1 - y) + x_2 \geq 6$
- $\diamond$ $x_1 \leq 10$
- $\diamond$ $x_2 \leq 10$
- $\diamond$ $x_1 \geq 0$
- $\diamond$ $x_2 \geq 0$

(III) El gráfico es el siguiente:

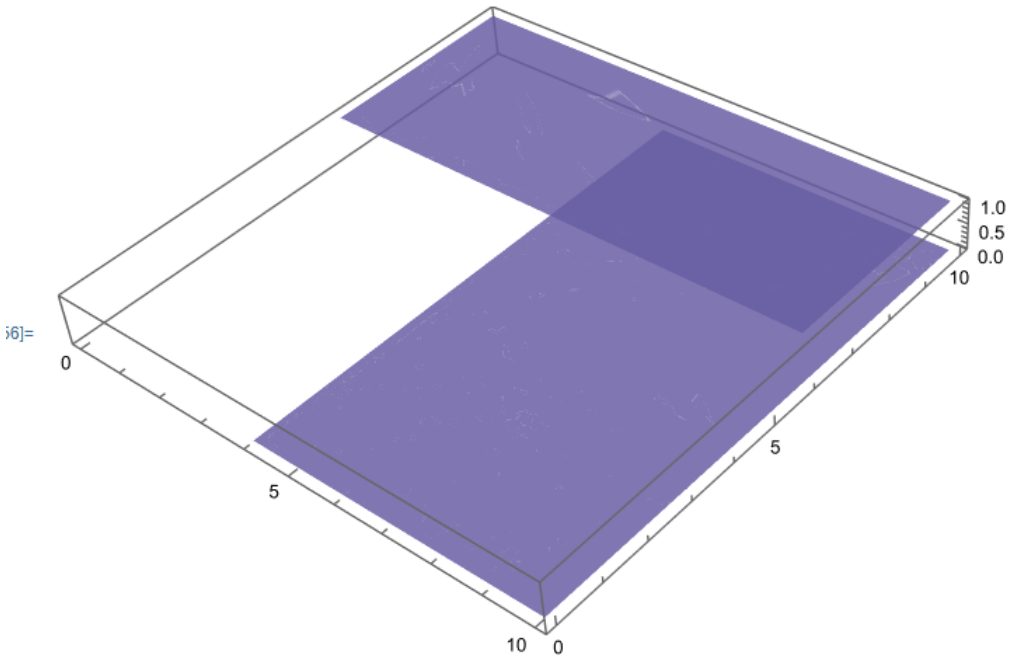


Figura 2

Para (b) y (c) se definirán:

- $\diamond$ el parámetro: $M \gg 0$, lo suficientemente grande como para anular la restricción.
- $\diamond$ la variable: $y_i : \begin{cases} 1 & \textit{implica que la restricción } i \textit{ se cumple} \\ 0 \end{cases}$

(b) Restricciones:

- $\diamond$ $a_i^T x \ \leq \ b_i + M(1 - y_i) \ \ \forall i = 1, ..., p$
- $\diamond$ $\sum_{i=1}^{p} y_i \geq k$
- $\diamond$ $y_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, ..., p\}$

(c) Sea $k \in \mathbb{N}$
Restricciones:

- $\diamond$ $a_i^T x \ \leq \ b_i + M(1 - y_1) \ \ \forall i = \{1, 3, ..., 2k - 1, ..., p\}$
- $\diamond$ $a_i^T x \ \leq \ b_i + M y_1 \ \ \forall i = \{2, 4, ..., 2k, ..., p - 1\}$
- $\diamond$ $y_1 \in \{0, 1\}$

Problema 3.

Una empresa que produce y almacena remedios desarrolló el siguiente modelo de optimización en busca de un objetivo. En este modelo, $b_{ij} > 0$ es un parámetro que define la cantidad del material $i \in \{1, ..., m\}$ necesario para realizar el remedio $j \in \{1, ..., n\}$, d_{jt} es la cantidad demandada del remedio j el día $t \in \{1, ..., T\}$, r_j es el costo unitario de producción del remedio j y c_i es el costo de una unidad del material i. Las variables del modelo son x_{jt}, y_{it}, w_{it} y s_{jt}

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_i y_{it} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} r_j x_{jt} & & \\
\text{s.a.} \quad & s_{j1} = x_{j1} - d_{j1} & \forall j \in \{1, ..., n\} & (1)\\
& s_{jt} = s_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} & \forall j \in \{1, ..., n\} \forall t = \{2, ..., T\} & (2)\\
& w_{i1} = y_{i1} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{j1} & \forall i = \{1, ..., m\} & (3)\\
& w_{it} = w_{i,t-1} + y_{it} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{jt} & \forall i = \{1, ..., m\} \forall t = \{2, ..., T\} & (4)\\
& x, y, w, s \geq 0 & &
\end{aligned}
$$

(a) Defina claramente qué significa cada una de las variables, restricciones y función objetivo del modelo descrito.

(b) Por capacidades de producción la empresa no puede producir más de K remedios por día. Además, empezó a existir un costo fijo por usar la fábrica un día, el cual tiene un valor de f_t. Por esto, la empresa decidió no funcionar por más de 2 días durante 4 días consecutivos. Realice los cambios necesarios al modelo anterior para cumplir con estas nuevas condiciones del problema. Puede agregar nuevas variables, hacer nuevas restricciones y/o modificar partes del modelo ya existentes.

Solución

(a) Comenzaremos por las variables:

- ◇ x_{jt}: Cantidad producida del remedio j el día t
- ◇ y_{it}: Cantidad del material i usado el día t
- ◇ w_{it}: Es el inventario del material i al final del día t
- ◇ s_{jt}: Es el inventario de cada remedio j al final del día t

Continuando con las restricciones:

- ◇ Define al inventario de cada remedio el primer día del período para el que se realiza el modelo
- ◇ Define el inventario de los remedios para el resto de los días que analiza el modelo
- ◇ Define al inventario de cada material el primer día del período para el que se realiza el modelo
- ◇ Define el inventario de cada material para el resto de los días que analiza el modelo

Por último, la función objetivo busca minimizar los costos de producción

(b) Para cumplir con lo pedido, será necesario agregar la siguiente variable:

$\diamond$ $z_t : \begin{cases} 1 & si\ se\ produce\ el\ día\ t \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

El modelo con los cambios necesarios queda de la siguiente manera:

$$(P) \quad \text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_i y_{it} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} r_j x_{jt} + \sum_{t=1}^{T} f_t z_t$$

s.a.

$$s_{j1} = x_{j1} - d_{j1} \qquad \forall j \in \{1,...,n\} \qquad (1)$$

$$s_{jt} = s_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} \qquad \forall j \in \{1,...,n\} \forall t = \{2,...,T\} \qquad (2)$$

$$w_{i1} = y_{i1} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{j1} \qquad \forall i = \{1,...,m\} \qquad (3)$$

$$w_{it} = w_{i,t-1} + y_{it} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{jt} \qquad \forall i = \{1,...,m\} \forall t = \{2,...,T\} \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jt} \leq K z_t \qquad \forall t = \{1,...,T\} \qquad (5)$$

$$\sum_{\theta=t}^{t+3} z_\theta \leq 2 \qquad \forall t = \{1,...,T-3\} \qquad (6)$$

$$x, y, w, s \geq 0 \qquad (7)$$

$$z \in \{0,1\} \qquad (8)$$

Se agregaron las restricciones 5, 6 y 8, además agregarle un término a la función objetivo.