FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: 01-2011
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Ayudantes: Karin Hofer - Benjamín Lizana
Catalina Parga - Camila Ramos

Pauta Interrogación 2

Duración: 3 horas.

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 104 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (35 %)

Cada una de las cuatro partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras.

Parte A

Una determinada empresa produce 4 tipos de bloques de concreto. El proceso de fabricación de cada bloque consta de las siguientes etapas: mezclado, vibrado del moldaje, e inspección.

En los próximos 30 días se dispone de 800 horas de maquinaria para mezclado, 1000 horas de vibrado y 340 horas hombre para inspección.

Para maximizar el beneficio del próximo mes se ha planteado el siguiente problema de programación lineal:

`Función Objetivo`:

$$\max z = \{8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4\}$$

`Restricciones`:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 & \leq & 800 \\ 1,5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \leq & 1000 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 340 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

donde x_1, x_2, x_3, y x_4 representan las cantidades a producir del bloque 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Este problema se ha resuelto, como minimización, y se ha obtenido la siguiente forma canónica (última iteración):

`Función Objetivo`:

$$\min \hat{z} = \{28x_3 + 40x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 6000\}$$

`Restricciones`:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + 11x_3 + 19x_4 + 1,5x_5 - x_6 & = & 200 \\ x_1 - 12x_3 - 22x_4 - 2x_5 + 2x_6 & = & 400 \\ 0,4x_3 + 1,6x_4 + 0,1x_5 - 0,4x_6 + x_7 & = & 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

donde x_5, x_6 y x_7 representan las variables de holgura para las restricciones 1, 2 y 3 respectivamente.

Con estos antecedentes se pide:

a) ¿Cuál es el beneficio unitario mínimo del bloque 3 para que convenga producirlo?

b) ¿Cuál es el beneficio unitario mínimo del bloque 2 para que convenga producirlo?

c) ¿Cuál es el precio sombra de 1 hora de mezclado? Determine entre qué valores de b_1 es válido este precio sombra.

Nota: la matriz básica inversa en el óptimo es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pauta Parte A

a) De los datos se observa que la base está compuesta (en orden según forma canónica) por x_2, x_1, x_7. Para determinar el beneficio unitario de producir el bloque 3 se debe asegurar que su costo reducido es no negativo. Para ello, se tiene:

$$\bar{c}_3 = c_3 - \begin{pmatrix} -14 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \mapsto c_3 \geq 58$$

Luego, se tiene que si el beneficio de producir el bloque 3 es al menos 58 se producirá.

b) El análisis sobre el bloque 2 es el mismo, solo que como x_2 es variable básica se debe exigir que todas las variables no básicas lo sigan siendo. Esto queda:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_3 & \bar{c}_4 & \bar{c}_5 & \bar{c}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_2 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

con lo que se obtiene el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} &-30 - 11c_3 - 96 \geq 0 \\ &-50 - 19c_3 - 176 \geq 0 \\ &0 - \tfrac{3c_3}{2} - 16 \geq 0 \\ &0 - c_3 + 16 \geq 0 \end{aligned}$$

desde donde se obtiene que para valores de $c_2 \in (11\frac{5}{11}, 16)$ convendrá producir el bloque 2.

c) Dado que tenemos la inversa de la base, calculemos el valor de las variables duales (precios sombra). Entonces:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el precio sombra de una hora de mezclado es 5. Para determinar el rango de validez:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 1000 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3b_1}{2} - 1000 \\ -2b_1 + 2000 \\ \frac{b_1}{10} - 400 + 340 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual si $b_1 \in (600, 1000)$ el precio sombra tendrá validez.

Parte B

Responda las siguientes preguntas:

i) (3.0 puntos) Sean x^* e y^* soluciones óptimas de un par de problemas primal-dual. Demuestre que:

$$(Ax^* - b)^T y^* = 0$$

$$x^{*T}\left(c - A^T y^*\right) = 0$$

ii) (3.0 puntos) Se tiene un problema de programación lineal en donde x_s es una variable no restringida en signo. Para construir la forma estándar, x_s se reemplaza por $x_s^1 - x_s^2$. Explique claramente si es posible que en la solución óptima del problema se tenga simultáneamente $x_s^1 > 0$ y $x_s^2 > 0$.

Pauta Parte B

i) Si x^* e y^* son soluciones óptimas del primal y dual se tiene:

$$\bar{c}_j^* = c_j - c_B^{*T} B^{*-1} a_j \ \ \forall j$$

$$\bar{c}_j^* = c_j - y^{*T} a_j \ \ \forall j$$

$$\bar{c}^* = c - A^T y^*$$

Pero sabemos que el costo de las variables básicas es 0, y el costo de las variables no básicas > 0, pero la variable no básicas toma valor 0, luego, se tiene que:

$$x^{*T}\bar{c}^* = x^{*T}\left(c - A^T y^*\right) = 0$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$b^T y^* - (Ax^*)^T y^* = 0$$

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0$$

ii) Es claro que A'_sy A''_s son vectores linealmente dependientes, luego x'_s y x''_s no pueden ser ambas básicas.

Parte C

Una comercializadora mayorista distribuye K productos a granel desde sus bodega. Esta empresa cuenta con una cartera de J clientes. Se conocen las distancias (en km) d_j desde la bodega al cliente j y la demanda b_{jk} del cliente j por el producto k (en kg).

Para realizar sus despachos, la compañía utiliza los servicios de una empresa de logística. Esta empresa cuenta con I camiones de igual capacidad Q (en kg) y le cobra a la comercializadora un costo fijo F por camión contratado y un costo variable c por kg-kilómetro de carga transportada.

Cada camión de la empresa puede trabajar hasta T horas en el día. En este periodo, los camiones pueden realizar varios viajes. Estos viajes siempre son de la bodega a un cliente y de vuelta de ese cliente a la bodega. El tiempo que se demora en realizar un viaje desde la bodega al cliente j y el viaje de vuelta es $\alpha\, d_j$.

Para determinar los camiones a utilizar y los viajes y despachos que estos realizan a costo mínimo, la empresa utiliza el siguiente modelo de programación entera mixta:

◇ Función objetivo: $\sum_{i=1}^{I} F\, z_i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c\, d_j\, x_{ijk}$.

- ◇ Restricción 1: $\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} = b_{jk}$ para $j = 1, \ldots, J$; $k = 1, \ldots, K$;
- ◇ Restricción 2: $\sum_{j=1}^{J} \alpha\, d_j y_{ij} \leq T$ para $i = 1, \ldots, I$.
- ◇ Restricción 3: $Q y_{ij} \geq \sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$ para $i = 1, \ldots, I$; $j = 1, \ldots, J$.
- ◇ Restricción 4: $b_{jk}\, z_i \geq x_{ijk}$ para $i = 1, \ldots, I$; $j = 1, \ldots, J$; $k = 1, \ldots, K$.

En este modelo, las variables x_{ijk} representan el total de producto k que es transportado por el camión i desde la bodega al cliente j, las variables enteras y_{ij} representan el número de viajes que el camión i realiza desde la bodega al cliente j y las variables binarias z_i indican si el camión i (valor 1) es utilizado.

i) Explique la Restricción 2. Para esto, describa qué representan el lado izquierdo y el lado derecho de la desigualdad y la relación entre estos expresada en la condición.

ii) Explique la Restricción 3. Para esto, describa qué representan el lado izquierdo y el lado derecho de la desigualdad y la relación entre estos expresada en la condición.

Pauta Parte C

Cada una de las siguientes preguntas vale 1.0 punto.

(a) La suma del lado derecho tiene un término para cada cliente j que el tiempo de los viajes que el camión i realiza hacia ese cliente (y de vuelta): se multiplica el tiempo de cada viaje por el número de viajes. De esta manera, esta suma calcula el tiempo total que ocupa el camión i.

El lado izquierdo muestra el máximo tiempo que puede estar trabajando un camión.

La desigualdad impone la condición de que el tiempo total ocupado por el camión i no sobrepase el máximo permitido T.

(b) El lado izquierdo de la desigualdad es la capacidad del camión i (que es igual para todos) multiplicada por el número de viajes que este camión realiza al cliente j. Esto representa el máximo de carga que este camión podría llevar en esos viajes.

La suma del lado derecho calcula el total de la carga que el camión i le lleva al cliente j.

La desigualdad indica que la carga total transportada al cliente j por el camión i no supera a la capacidad de transporte del camión en todos los viajes que realiza para atender ese cliente.

Parte D

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{P)}\ \ \text{mín}\, z &= 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 4x_1 + x_2 &= 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

i) Utilice el algoritmo simplex de fase I para determinar una solución básica factible inicial para el problema P).

ii) Utilice la teoría de dualidad y el teorema de holgura complementaria para demostrar si el punto factible obtenido en la parte i) es solución óptima del problema P).

Pauta Parte D

i) La forma estándar es:

$$\text{P)}\ \ \text{mín}\, z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 4 \\ 4x_1 + x_2 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

El problema de fase I requiere agregar dos variables auxiliares, h_1 y h_2, y queda:

$$\text{P)}\ \ \text{mín}\, z = h_1 + h_2$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + h_1 & = & 4 \\ 4x_1 + x_2 + h_2 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Las variables básicas son h_1 y h_2, y la base es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mapsto \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas son x_1, x_2 y x_3, y entonces la matriz R queda:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \mapsto \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se tiene además que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos quedan en:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_1} & \bar{c}_{x_2} & \bar{c}_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente no estamos en el óptimo, así que la variable x_1 entra a la base.
Para ver la que sale vemos el criterio de salida.

$$\text{mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{8}{4}\right\} = 2 \mapsto h_2 \text{ sale de la base}$$

Las variables básicas ahora son h_1 y x_1, y la base es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ \mapsto \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas ahora son h_2, x_2 y x_3, y entonces la matriz R queda:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \mapsto \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{7}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

donde se tiene además que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos quedan en:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{h_2} & \bar{c}_{x_2} & \bar{c}_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{7}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente no estamos en el óptimo, así que la variable x_2 entra a la base.

Para ver la que sale vemos el criterio de salida.

$$\text{mín}\left\{\frac{2}{\frac{7}{4}}, \frac{2}{\frac{1}{4}}\right\} = \frac{8}{7} \mapsto h_1 \text{ sale de la base}$$

Las variables básicas ahora son x_2 y x_1, y la base es:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas ahora son h_2, h_1 y x_3, y entonces la matriz R queda:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

donde se tiene además que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos quedan en:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{h_2} & \bar{c}_{h_1} & \bar{c}_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que es el óptimo del problema de fase I, y que entrega una base factible inicial para el problema de fase II que está construida por las variables x_2 y x_1.

ii) La solución factible inicial obtenida en la parte i) es $x_1^* = \frac{12}{7}$ y $x_2^* = \frac{8}{7}$. Con esto el valor de $z^* = \frac{68}{7}$.

El problema dual queda:

$$\begin{array}{rcl} \text{D) } \max w = 4y_1 + 8y_2 & & \\ y_1 + 4y_2 & \leq & 3 \\ 2y_1 + y_2 & \leq & 4 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & & \text{Irrestricta} \end{array}$$

Las ecuaciones del teorema de holgura complementaria son:

$$\begin{array}{rcl} (x_1^* + 2x_2^* - 4)y_1 & = & 0 \\ (4x_1^* + x_2^* - 8)y_2 & = & 0 \\ (y_1 + 4y_2 - 3)x_1^* & = & 0 \\ (2y_1 + y_2 - 4)x_2^* & = & 0 \end{array}$$

como $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$, entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 4y_2 = 3 & = & 0 \\ 2y_1 + y_2 = 4 & = & 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que $y_1 = \frac{13}{7}$, $y_2 = \frac{2}{7}$ y $w = \frac{68}{7}$. Luego, como en el dual el punto factible inicial obtenido en la parte i) es factible y el valor de $z^* = w = \frac{68}{7}$, por el teorema fuerte de dualidad se asegura que la solución de i) es solución óptima de P).

Pregunta 2 (30 %)

Usted acaba de reemplazar al encargado de la planificación de una planta productora de autos y motos. Lamentablemente, la única información que ha podido rescatar sobre como hacia el trabajo el encargado anterior se muestra en la Figura 1.

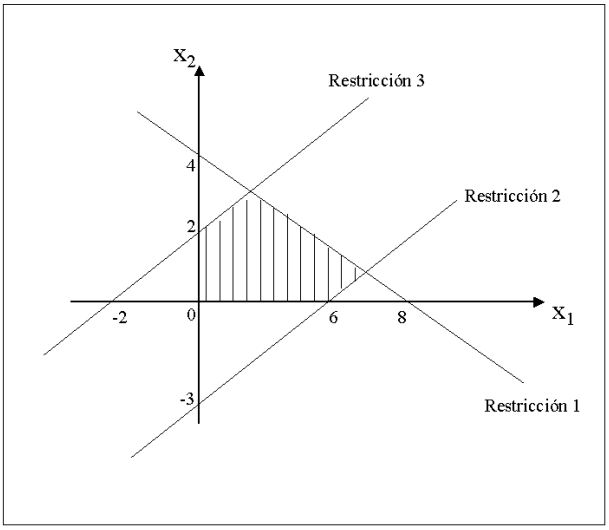


Figura 1: Información gráfica obtenida del encargado anterior.

En este gráfico se tiene información sobre dónde las restricciones (1), (2) y (3) cortan los ejes x_1 y x_2, donde x_1 representa la cantidad de autos y x_2 la cantidad de motos que se decide fabricar un día cualquiera. Por último, el ayudante del encargado anterior le ha comentado que existen 2 vértices óptimos en el problema, y que en uno de ellos son activas las restricciones (1) y (2) y en el otro lo son las restricciones (1) y (3).

Con la información anterior responda las siguientes preguntas.

a) (0.5 puntos) Construya el modelo matemático (función objetivo y restricciones) que representa el gráfico y la información entregada por el ayudante del anterior encargado.

b) (0.5 puntos) Construya la forma estándar del problema que ha formulado en la parte a). A partir de la forma estándar indique claramente (detallando las variables) todos los vértices, factibles e infactibles, que posee el problema.

c) (1.0 punto) Resuelva utilizando el algoritmo de Simplex el problema en forma estándar formulado en la parte b). Para ello, utilice como punto de partida el vértice $(0, 2)$.

d) (1.5 punto) Utilice el teorema de holgura complementaria y/o los teoremas/corolarios de dualidad para demostrar que la solución óptima obtenida en la parte c) es efectivamente el óptimo del problema.

e) (1.0 punto) Utilizando análisis post-optimal, indique qué valores puede tomar el valor del lado derecho de la restricción (1) (b_1) de manera que la solución óptima obtenida en la parte c) siga siendo solución óptima del problema.

f) (1.5 puntos) Si se considera que b_1 ahora toma valor 1, obtenga, utilizando el algoritmo simplex y la información de la parte c), la nueva solución óptima.

Pauta Pregunta 2

a) El modelo matemático tiene como función objetivo cualquier curva de nivel que tenga la misma pendiente de la restricción 1. Por lo tanto, se tiene el siguiente modelo matemático

$$\text{Max } x_1 + 2x_2$$

s.a:

$x_1 + 2x_2$	$\leq$	8	Restricción 1
$x_1 - 2x_2$	$\leq$	6	Restricción 2
$-x_1 + x_2$	$\leq$	2	Restricción 3
$x_1,\, x_2$	$\geq$	0	

b) La forma estándar del problema formulado en la parte a) es:

$$\text{Min } -x_1 - 2x_2$$

s.a:

$x_1 + 2x_2 + x_3$	$=$	8	Restricción 1
$x_1 - 2x_2 + x_4$	$=$	6	Restricción 2
$-x_1 + x_2 + x_5$	$=$	2	Restricción 3
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	$\geq$	0	

Los vértices del problema se encuentran detallados en la siguiente tabla:

Intersección	x	y	Tipo
R1 - R2	7	1/2	Factible
R1 - R3	4/3	10/3	Factible
R2 - R3	-	-	Infactible
R1 - eje x_2	0	4	Infactible
R3 - eje x_2	0	2	Factible
eje x_1 - eje x_2	0	0	Factible
R3 - eje x_1	-2	0	Infactible
R2 - eje x_2	0	-3	Infactible
R2 - eje x_1	6	0	Factible
R1 - eje x_1	8	0	Infactible

c) En este vértice las variables del problema en forma estándar (el de la parte b) toman los siguientes valores: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 10$ y $x_5 = 0$. Entonces, las variables asociadas a la base serán x_2, x_3 y x_4. Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de $\bar{b}$ y $\bar{R}$ (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_1 y x_5) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_j} = c_j - c_B \bar{A}$ para todos los j asociados a las variables no básicas.

$$\bar{c_j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \leq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 1:

- ◇ Criterio de entrada.
  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el único costo reducido negativo es -3 y corresponde a la variable x_1, luego esta variable ingresa a la base.
- ◇ Criterio de salida.
  Para ver quien sale de la base se debe utilizar el siguiente criterio:

$$min_{\bar{a_{i1}}>0} \left\{ \frac{\bar{b}}{\bar{a_{i1}}} \right\} = \left\{ \frac{4}{3} \right\} = 4/3 \mapsto x_3 \text{ sale de la base.}$$

En este caso las variables asociadas a la base serán x_2, x_1 y x_4. Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de $\bar{b}$ y $\bar{R}$ (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_3 y x_5) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 4/3 \\ 34/3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Luego, la solución es óptima. En este caso, los valores de las variables son: $x_1 = 4/3$, $x_2 = 10/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 34/3$ y $x_5 = 0$. El valor de la función objetivo en forma estándar es -8, luego, del problema original es 8.

d) El problema dual es:

$$\text{Min } 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

s.a:

$y_1 + y_2 - y_3$	$\geq$	1	Restricción Dual 1
$2y_1 - 2y_2 + y_3$	$\geq$	2	Restricción Dual 2
y_1, y_2, y_3	$\geq$	0	

El teorema de holgura complementaria entrega el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl}(x_1+2x_2-8)y_1 & = & 0\\ (x_1-2x_2-6)y_2 & = & 0\\ (-x_1+x_2-2)y_3 & = & 0\\ (y_1+y_2-y_3-1)x_1 & = & 0\\ (2y_1-2y_2+y_3-2)x_2 & = & 0\end{array}$$

Como sabemos que la solución obtenida en c) es $x_1 = 4/3$, $x_2 = 10/3$, entonces se tiene que $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. El valor de la función objetivo del primal y del dual, para los puntos antes mencionados, es 8. Luego, como ambos puntos son factibles de sus respectivos problemas y el valor de la función objetivo de ambos es el mismo, el teorema fuerte de dualidad asegura que ambas son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

e) Sabemos que cambios en el vector del lado derecho de las restricciones afectan a la optimalidad desde la factibilidad. Luego, verificamos factibilidad:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{3}+\frac{2}{3} \\ \frac{b_1}{3}-\frac{4}{3} \\ \frac{b_1}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

de donde se obtiene que para $b_1 \in [4\,,\,\infty)$ la base óptima actual seguirá siendo óptima.

f) De la parte e) sabemos que si $b_1 = 1$ entonces la solución obtenida en la parte c) deja de ser factible y por consiguiente óptima. Ahora, sabemos que un punto que es infactible en el primal es factible en el dual (siempre que el problema dual sea factible).

El problema dual y su solución ya lo calculamos en la parte d), solo debemos modificar b_1, quedando:

$$\text{Min } y_1+6y_2+2y_3$$

s.a:

$$\begin{array}{lcll} y_1+y_2-y_3 & \geq & 1 & \text{Restricción Dual 1}\\ 2y_1-2y_2+y_3 & \geq & 2 & \text{Restricción Dual 2}\\ y_1,\, y_2,\, y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

que tiene la siguiente forma estándar:

$$\text{Min } y_1+6y_2+2y_3+0y_4+0y_5$$

s.a:

$$\begin{array}{lcl} y_1+y_2-y_3-y_4 & = & 1\\ 2y_1-2y_2+y_3-y_5 & = & 2\\ y_1,\, y_2, y_3,\, y_4 & \geq & 0\end{array}$$

Como sabemos que $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$, entonces $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$. Tenemos la base formada por las variables y_1 e y_2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas son y_3, y_4 e y_5, y entonces la matriz R queda:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

donde se tiene además que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos quedan en:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{y_3} & \bar{c}_{y_4} & \bar{c}_{y_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{4} & \frac{7}{2} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}$$

Claramente no estamos en el óptimo, así que la variable y_5 entra a la base.
Para ver la que sale vemos el criterio de salida.

$$\text{mín} \left\{ \cdot, \frac{0}{\frac{1}{4}} \right\} = 0 \mapsto y_2 \text{ sale de la base}$$

La base queda formada por las variables y_1 e y_5.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas son y_3, y_4 e y_2, y entonces la matriz R queda:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se tiene además que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los costos reducidos quedan en:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{y_3} & \bar{c}_{y_4} & \bar{c}_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

luego estamos en el óptimo del dual, donde $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ y $w = 1$. Para encontrar el óptimo del primal utilizamos el teorema de holgura complementaria.
El teorema de holgura complementaria entrega el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} (x_1 + 2x_2 - 1)y_1 & = & 0 \\ (x_1 - 2x_2 - 6)y_2 & = & 0 \\ (-x_1 + x_2 - 2)y_3 & = & 0 \\ (y_1 + y_2 - y_3 - 1)x_1 & = & 0 \\ (2y_1 - 2y_2 + y_3 - 2)x_2 & = & 0 \end{array}$$

de donde se obtiene que $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. El valor de $z = 1$.

Pregunta 3 (40 %)

La empresa TVNew ha decidido producir televisores. Específicamente, la empresa desea producir P televisores, todos distintos entre sí. Esto último se asegura si dos televisores cualquiera difieren en al menos una de las alternativas que los componen.

La dirección de la empresa sabe que un televisor se construye en base a I componentes. A través de una investigación en el mercado de los proveedores de componentes se ha logrado construir el conjunto $J(i)$, para todo $i \in I$, que contiene la lista de todas las alternativas existentes para la selección de la componente i de un televisor. También se ha obtenido la información del costo que tiene cada una de estas alternativas de componente, construyéndose el parámetro c_{ji} que indica el costo en pesos que tiene la alternativa j para la componente i.

Adicionalmente, TVNew sabe que existe un descuento asociado a cada combinación alternativa-componente. Este descuento está asociado a la cantidad de televisores que utilizarán la alternativa j como selección para la componente i: si al menos M_{ji} de los P televisores de TVNew usan la alternativa j para su componente i, la empresa recibirá un descuento de d_{ji} pesos.

Por último, el gobierno ha creado un bono para incentivar el uso de tecnologías ecológicas. Este bono consiste en subsidiar el 50 % del costo de composición de aquellos televisores que poseen al menos 2 componentes ecológicas en su composición. La información de cuáles de las alternativas de componentes son ecológicas se encuentra en el parámetro R_{ji}, que toma valor 1 si la alternativa j para la componente i es ecológica y 0 sino. Esta información está disponible para toda combinación $i \in I$ y $j \in J(i)$.

Con la información anterior, construya un modelo de programación lineal en variables enteras/continuas que permita a TVNew determinar la composición de los P televisores que debe producir de manera de minimizar el costo total en el que debe incurrir.

Pauta Pregunta 3

Variables

x_{ji}^p: variable binaria que vale 1 si la alternativa j de la componente i es usada para confeccionar el televisor p.

y_{ji}: variable binaria que vale 1 se tendrá el descuento d_{ji}.

α^p: variable binaria que vale 1 si se tendrá el bono del 50 % por la composición del televisor p.

w_i^{pk}: variable binaria que vale 1 entre los televisores p y k la componente i usa la misma alternativa.

g^p: cantidad del bono recibido por la composición del televisor p.

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar los costos totales:

$$\text{mín} \sum_{p=1}^{P} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} c_{ji} x_{ji}^p - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} d_{ji} y_{ji} - \sum_{p=1}^{P} g_p$$

Restricciones

(a) Asegurar que cada televisor será confeccionado con exactamente 1 alternativa para cada componente:

$$\sum_{j \in J(i)} x_{ji}^p = 1 \quad \text{para } i \in I\,, \;\; p = 1, \ldots, P\,.$$

(b) Asegurar que los televisores p y k son distintos:

$$\sum_{i \in I} w_j^{pk} \leq I - 1\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P-1\,,\ \ k = p+1, \ldots, P\,.$$

(c) Construir la variable w_i^{pk}:

$$x_{ji}^p + x_{ji}^k \leq 1 + w_i^{pk}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ \ j \in J(i)\,,\ \ p = 1, \ldots, P-1\,,\ \ k = p+1, \ldots, P\,.$$

(d) Construir la variable y_{ji} que asigna el descuento d_{ji}:

$$\sum_{p=1}^{P} x_{ji}^p \geq M_{ji} y_{ji}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ \ j \in J(i)\,,\ \ .$$

(e) Construir la variable α^{ji} que asigna el bono de gobierno:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} R_{ji} x_{ji}^p \geq 2\alpha^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

(f) Relación del total del bono g^p obtenido por la composición del televisor p (50 % del costo) y la variable α^p:

$$g^p \leq M\alpha^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

Con $M >> 0$.

(g) Cota superior para g^p:

$$g^p \leq 0{,}5 \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} c_{ji} x_{ji}^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

(h) Naturaleza de las variables.

$x_{ji}^p \in \{0, 1\}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ \ j \in J(i)\,,\ \ p = 1, \ldots, P\,.$
$y_{ji} \in \{0, 1\}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ \ j \in J(i).$
$\alpha^p \in \{0, 1\}\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$
$w_i^{pk} \in \{0, 1\}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ \ p = 1, \ldots, P-1\,,\ \ k = p+1, \ldots, P\,.$
$g^p \geq 0\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$