PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 2
Profesores: : R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - S. Vasquez - F. Verastegui

Interrogación 1
Duración: 135 minutos.

1. Preguntas cortas de modelación (22 puntos)

1.1. La máquina (10 puntos)

Una empresa fabrica productos en una máquina durante un horizonte de planificación de T periodos. En cada periodo, la máquina no puede producir más de 1000 unidades. Para planificar la operación de la empresa, la gerencia de operaciones ha modelado las decisiones relevantes en un problema de optimización lineal entera mixto (MILP).

El modelo posee variables $x_t \geq 0$ e $y_t \in \{0, 1\}$ que representan la cantidad de productos fabricados en la máquina y si está encendida o no, respectivamente, en cada periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$.

A continuación, modele cada una de las siguientes restricciones agregando variables y restricciones que usted considere necesarias. Debe ser un MILP.

(a) (3p) En cada periodo t: Si la máquina está apagada, entonces su producción debe ser nula.

Solución:

$$x_t \leq 1000 \cdot y_t \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

(b) (3p) Si la máquina produce más de 500 unidades durante el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$, entonces debe estar apagada durante los próximos 2 periodos.

Solución: Sea $z_t \in \{0, 1\}$ una variable igual a 1 si la máquina puede producir más de 500 unidades en t y 0 si no. Luego:

$$x_t \leq 500 + 500 \cdot z_t \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$y_{t+1} + z_t \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T-1\}$$

$$y_{t+2} + z_t \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T-2\}$$

Nota de corrección: Dos puntos por definir bien la variable que se gatilla cuando se produce más de 500 y la restricción que la relaciona con x_t. Otros dos puntos por las restricciones de periodos posteriores.

(c) (4p) La máquina no puede apagarse más de 5 veces (es decir, pasar de encendida a apagada en periodos consecutivos).

Solución: Sea $w_t \in \{0, 1\}$ una variable igual a 1 si la máquina se apaga al comienzo del periodo t y 0 si no para $t \in \{2, \ldots, T\}$.

$$y_{t-1} - y_t \leq w_t \qquad \forall t \in \{2, \ldots, T\}$$

$$\sum_{t=2}^{T} w_t \leq 5$$

Nota de corrección: 3 puntos por modelar correctamente el apagado (variables y restricciones). Uno más por la restricción que limita a 5 apagados.

1.2. El pastelero (12 puntos)

En una cocina, un pastelero debe decidir el orden en el cual va a cocinar n pasteles diferentes, uno a la vez. Preparar el pastel $i \in \{1, \ldots, n\}$ tarda p_i minutos. Por otro lado, reorganizar y limpiar la cocina desde que se termina de preparar el pastel i hasta que se comienza a preparar el pastel $j \neq i$ tarda $q_{i,j}$ minutos. Formule un modelo de optimización entera que diseñe un orden de preparación de pasteles que minimice el tiempo total de trabajo.

Solución: Definamos un pastel 0 que simboliza el inicio/término del trabajo, tal que $q_{i,0} = q_{0,i} = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

El problema es un Traveling Salesperson Problem (TSP) encubierto sobre $\{0, 1, \ldots, n\}$ con costos de arco $q_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j$.

Variables:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: Si pastel i se prepara inmediatamente antes del j, para todo $i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j$.

Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}: i \neq j} q_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

Restricciones:

$$\sum_{j \in \{0,\ldots,n\}: j \neq i} x_{i,j} = 1, \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

$$\sum_{j \in \{0,\ldots,n\}: j \neq i} x_{j,i} = 1, \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j \neq i} x_{i,j} \leq |S| - 1, \qquad \forall S \subset \{0, 1, \ldots, n\} : |S| \geq 2$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j$$

La duración de los pasteles es irrelevante (es una constante que no depende del orden), lo que importa es el secuenciamiento de pasteles.

Nota de corrección:

(a) 4 puntos por identificar que es un TSP o definir apropiadamenet las variables.

(b) Hasta 9 puntos por un TSP sin restricciones de eliminación de subtour o equivalentes

(c) 12 puntos por modelo completo.

2. Modelación Lineal Continua (20 puntos)

Usted debe planificar la producción y el almacenamiento de diferentes productos lácteos en un lista I durante un horizonte de planificación de T periodos. Suponga que el producto $i \in I$ tiene una demanda máxima de d_{it} litros y un precio de venta igual a $\$p_{it}$ durante el periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$, es decir, puede ofrecer al mercado hasta esa cantidad y vender cada unidad a ese precio. Suponga también que usted puede almacenar productos lácteos de un periodo a otro a un costo de $\$b_i$ por litro almacenado un periodo del producto i.

Además, considere que la planificación debe cumplir ciertas restricciones. Primero, usted cuenta con una máquina capaz de producir r_i litros por hora de cada producto i y durante cada periodo t usted puede hacerla funcionar por un máximo de q horas a un costo de $\$c_t$ por hora de funcionamiento. Segundo, a lo largo de todo el periodo de producción ningún producto puede ser producido en más del doble que la cantidad del producto menos producido. Por último, la leche vence y debe venderse o almacenarse en un máximo de dos periodos posteriores a su producción (asuma que no se puede desechar productos).

Formule un modelo de optimización lineal continuo que diseñe una política de producción, almacenamiento y venta de lácteos que maximice utilidades durante el horizonte de planificación. Asuma que no hay más costos involucrados, que los inventarios iniciales son nulos y que la venta al mercado es al final de cada periodo después de la producción.

Solución:

Variables (6pt acá, 2 pt cada tipo):

- $x_{it} \in \mathbb{R}$: Litros de $i \in I$ a producir en periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- $y_{it} \in \mathbb{R}$: Litros de $i \in I$ a vender en periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- $z_{it} \in \mathbb{R}$: Litros de $i \in I$ a almacenar al final del periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$.

Objetivo (2pt):

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} (p_{it} \cdot y_{it} - \frac{x_{it}}{r_i} \cdot c_t - b_i \cdot z_{it})$$

Restricciones (12 pt):

(a) Máxima capacidad de producción:

$$\sum_{i \in I} \frac{x_{it}}{r_i} \leq q \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(b) Balance de inventario:

$$\mathbb{I}(t > 1) \cdot z_{i,t-1} + x_{it} = z_{it} + y_{it} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, i \in I$$

(c) Máxima venta:

$$y_{it} \leq d_{it} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, i \in I$$

(d) La producción total de un tipo no puede sobrepasar el doble de otro:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq 2 \cdot \sum_{t=1}^{T} x_{jt} \qquad \forall i, j \in I : i \neq j$$

(e) Vencimiento:

$$\sum_{k=1}^{t} y_{ik} \geq \sum_{k=1}^{t-2} x_{ik} \qquad \forall t \in \{3, ..., T\}, i \in I$$

(f) Naturaleza de las variables

$$x_{it}, y_{it}, z_{it} \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, i \in I$$

3. Modelación Lineal Entera (18 puntos)

Usted está a cargo de asignar n tareas a m máquinas. Cada tarea $j \in \{1, \ldots, n\}$ debe ser ejecutada por exactamente una máquina, consume $a_{i,j} > 0$ unidades de trabajo y cuesta $\$c_{i,j} > 0$ si es asignada a la máquina $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además, considere que la máquina i puede procesar un máximo de $b_i > 0$ unidades de trabajo y que hacerla funcionar cuesta $\$h_i > 0$, independiente de su utilización durante el periodo.

(a) (10p) Formule un problema de optimización lineal entera que permita asignar tareas a mínimo costo.

Suponga ahora que se le ha solicitado modificar el modelo anterior e incorporar las siguientes restricciones enunciadas a continuación. Indique, para cada caso por separado, qué modificaciones realizaría sobre el modelo:

(b) (4p) Si se encienden todas las máquinas de la fábrica, entonces se debe pagar un costo $\$\lambda$.

(c) (4p) Si se hacen funcionar las máquinas 1 y/ó 2, entonces no se puede hacer funcionar las máquinas 3 y 4 a la vez.

Solución:

(a) Nota de corrección: 4pt x las variables. El resto en restricciones y objetivo.

Variables:

- $z_i \in \{0, 1\}$: Si se enciende o no la máquina i.
- $x_{i,j} \in \{0, 1\}$: Si tarea j es asignada a la máquina i o no.

Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j} \tag{1}$$

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_{i,j} \leq b_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \tag{3}$$

$$x_{i,j} \leq z_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \tag{4}$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \tag{5}$$

$$z_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \tag{6}$$

(b) Sea $y \in \{0, 1\}$ una binaria que vale 1 si se usan todas las máquinas. Luego, el objetivo se modifica a:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} h_i z_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} + \lambda \cdot y \tag{7}$$

Adicionalmente, es necesario incorporar la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \leq m - 1 + y$$

(c) Para modelar esta dinámica, es necesario incorporar dos variables adicionales al modelo:

- $o_{1,2} \in \{0, 1\}$: Toma valor 1 si y solo si se usan las máquinas 1 ó 2.
- $y_{3,4} \in \{0, 1\}$: Toma valor 1 si y solo si se usan las máquinas 3 y 4.

El comportamiento de la primera variable es un 'ó'lógico, y requiere incorporar las siguientes restricciones:

$$z_1 \leq o_{1,2} \tag{8}$$

$$z_2 \leq o_{1,2} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

El comportamiento de la segunda variable es un 'y'lógico, y requiere incorporar las siguientes restricciones:

$$z_3 + z_4 \leq y_{3,4} + 1 \tag{11}$$

Luego:

$$o_{1,2} + y_{3,4} \leq 1 \tag{12}$$