PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquínez

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: Lunes 30 de octubre.

La tarea contiene 58 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- Esta Tarea **debe** ser desarrollada por el mismo grupo ya asignado para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- La respuesta debe tener **hojas separadas por pregunta**. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y es decisión del alumno escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenada**. En cada hoja se debe colocar **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Se debe hacer **una entrega independiente por pregunta** y las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas.
- El plazo es el día Lunes 30 de octubre a las 12:30 horas (impostergable). Aquellas Tareas no entregadas hasta la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **NO Entregadas**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría docente de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar cada pregunta en el buzón correspondiente. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- El desarrollo y discusión de la tarea debe ocurrir dentro de cada grupo. La tarea está construida con el propósito de desarrollar aprendizaje colaborativo y para entrenar al alumno antes de cada prueba. No se permite distribuir cada pregunta entre los integrantes del grupo y se espera que el grupo realize un trabajo conjunto. Está permitido discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar y desarrollar sus soluciones. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada por el equipo docente con consecuencias que podrían escalar a la **reprobación del curso** más la denuncia a las autoridades correspondientes (revisar medidas de programa con respecto a faltas a la ética).
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.

Problema 1. (13 puntos)

a) (2 Puntos) Sea P) cualquier problema de optimización lineal de minimización en forma estándar y D) su problema dual asociado.

i) (1 puntos) Haciendo uso sólo de la transformación primal-dual en forma estándar, demuestre que P) es la formulación dual de D).

ii) (1 punto) Desmuestre que alguna de las bases óptimas de P) es degenerada si y sólo si D) tiene múltiples soluciones óptimas.

b) (2 Puntos) Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} P) & \min t & & \\ s.a. & t\mathbf{1} - Ax & \geq & b\mathbf{1} \\ & t & \leq & M \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ con $m \geq 2$, b y M son constantes con $M > b$, y $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de 1's, es decir, $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$. Demuestre que P) tiene solución óptima degenerada, y encuentre el valor óptimo.

c) (5 Puntos) Suponga que una empresa de alimentos preparados puede elaborar 3 tipos de alimento, los cuales se obtienen de 3 materias primas. Entonces, suponga que esta empresa quiere maximizar sus utilidades y para esto desarrolla el modelo de programación lineal que se encuentra a continuación:

$$P) \qquad \text{máx} \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{array}{lrcll} s.a. & & & & \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq & 8 & (1) \\ & 2x_1 + 3x_3 & \leq & 14 & (2) \\ & 3x_2 + 2x_3 & \leq & 12 & (3) \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & 10 & (4) \\ & 4x_1 - 10x_2 + 2x_3 & \geq & 2 & (5) \\ & x & \geq & 0 & \end{array}$$

donde x_i es la cantidad del alimento i a producir, y las primeras tres restricciones representan el consumo de las materia primas, es decir, el lado derecho de estas restricciones equivale a la cantidad de materia prima que se tiene para preparar los alimentos. Además, se tienen 2 restricciones extras que son requerimientos internos de la fábrica de la empresa.

i) (1 punto) Formule el problema dual de P).

ii) (2 puntos) Considerando que en la solución óptima las restricciones (1) y (2) están activas y que el valor óptimo es 65/3, encuentre la solución para D) y para P).

iii) (2 puntos) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar si le ofrecieran 7 unidades extra de la materia prima (aumentar en 7 unidades el lado derecho) de la restricción (1)?

d) (2 Puntos) Demuestre que sí el dominio del siguiente problema de optimización tiene al menos una variable acotada, entonces su problema dual asociado tiene dominio no acotado. Asuma que el dominio es factible.

$$\begin{array}{lrcl} P) & \text{máx}\, c^T x & & \\ s.a. & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.
Hint: Formule un problema de optimización que determine si una variable específica del dominio está acotada o no

e) **BONUS** (3 Puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Explique claramente el (los) error (es) en el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
\text{máx}\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \text{mín}\{b^T y | A^T y \geq c, y \geq 0\} && (1)\\
&\leq \text{máx}\{b^T y | A^T y \geq c, y \geq 0\} && (2)\\
&\leq \text{mín}\{c^T x | Ax \geq b, x \leq 0\} && (3)\\
&\leq \text{máx}\{c^T x | Ax \geq b, x \leq 0\} && (4)\\
&\leq \text{mín}\{b^T y | A^T y \leq c, y \leq 0\} && (5)\\
&\leq \text{máx}\{b^T y | A^T y \leq c, y \leq 0\} && (6)\\
&\leq \text{mín}\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\} && (7)
\end{aligned}$$

f) (2 Puntos) Demuestre que PB) es el problema dual de PA):

$$\begin{aligned}
PA) \qquad & \max_x \left\{ \min_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^m x_i p_{ij} \right\} \\
s.a. \quad & \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PB) \qquad & \max_y \left\{ \min_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^n y_j r_{ij} \right\} \\
s.a. \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n y_j = 1 \\
& y \geq 0
\end{aligned}$$

con $p_{ij} = -r_{ij}$.

Solución Problema 1.

a) *i*) La formulación de D) es:

$$\begin{aligned}
D) \qquad & \max b^T y \\
s.a. \quad & A^T y \leq c
\end{aligned}$$

Asumamos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Por enunciado, se debe reformular el problema a su forma estándar, por lo que se debe tranformar la variable y en 2 variables auxiliares tal que $y = y^+ - y^-; y^+, y^- \geq 0$. Además, se debe transformar el problema en uno de minimización, y agregar variables de holgura, para transformar la restricción en igualdad, que llamaremos h_j. Entonces, la reformulación queda de esta forma:

$$\begin{aligned}
D') \qquad & \text{mín}(-b)^T (y^+ - y^-) \\
s.a. \quad & A^T y^+ - A^T y^- + Ih = c \\
& y^+, y^-, h \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, usando la transformación primal-dual de la formulación estándar, el problema dual de D') es el siguiente:

$$P') \qquad \max c^T z$$

$$\begin{array}{lrcll} s.a. & Az & \leq & -b & \\ & -Az & \leq & b & \\ & z_i & \leq & 0 & ,\forall i = 1, \ldots, n \end{array}$$

De las primera dos restricciones, se puede concluir que $Az = -b$. Además, transformando z_i en una variable auxiliar tal que $z'_i = z_i$, la nueva reformulación del problema queda:

$$\begin{array}{lrcl} P') & \text{mín}\, c^T z' & & \\ s.a. & Az & = & b \\ & z' & \geq & 0 \end{array}$$

Finalmente, el problema P') es equivalente a P), con lo que se demuestra que P) es el dual de D) y se demuestra lo pedido.

ii) En primer lugar, si es que P) tiene base óptima, entonces el problema es factible y su dual también. Si se definen P) y D) de la siguiente forma, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\begin{array}{lrcl} P) & \text{mín}\, c^T x & & \\ s.a. & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} D) & \text{máx}\, b^T y & & \\ s.a. & A^T y & \leq & c \end{array}$$

Por teorema de holguras complementarias (THC), se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$x\left(c - A^T y\right) = 0 \rightarrow x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) = 0, \forall j = 1, \ldots, n$$

Se deben considerar 2 posibilidades. La primera es si $m > n$. En cuyo caso es simple porque P) al ser factible, siempre será degenerado dado que tiene al menos $m - n$ restricciones que sobredeterminan los puntos. Además, D) tendrá múltplies soluciones porque debe cumplir n ecuaciones para $m > n$ variables.

La segunda posibilidad es que $m \leq n$. Demostrando primero la implicancia hacia la derecha. Si alguna solución óptima del primal es degenerada, entonces esta solución tendrá a lo más $m - 1$ variables positivas. Por lo tanto, por THC, las m variables $y's$ deberán satisfacer a lo más $m - 1$ ecuaciones y siempre habrán múltiples soluciones. Demostrando hacia la izquierda, si el dual tiene múltiples soluciones, entonces se tendrán al menos $(n - m) + 1$ restricciones que en alguna solución óptima están inactivas, por lo tanto, la solución óptima del primal por THC deberá tener al menos $(n - m) + 1$ variables igual a 0, y cómo su base es de m variables, alguna de las variables básicas valdrá 0 y se tiene un caso de degenerancia.

b) El problema dual de P) es el siguiente:

$$\begin{array}{lrcl} D) & \text{máx}\, b \sum_{j=1}^{m} y_j + M\pi & & \\ s.a. & \sum_{j=1}^{m} y_j + \pi & = & 1 \\ & -A^T y & \leq & 0 \\ & y & \geq & 0 \\ & \pi & \leq & 0 \end{array}$$

De la primera restricción, se puede reescribir la función objetivo de la siguiente forma: $b \sum_{j=1}^{m} y_j + M\pi = b(1 - \pi) + M\pi = b + \pi(M - b)$. Además, considerando que $y \geq 0$ y los componentes de A son positivos

por enunciado, la segunda restricción es redundante. Entonces, el problema se vuelve independiente de las variables $y's$ y queda sólo en función de π:

$$\begin{aligned} D) \qquad & \text{máx } b + \pi(M - b) \\ s.a. \quad & y \geq 0 \\ & \pi \leq 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que la solución de $D)$ es $\pi = 0$, pero con cualquier valor postivo de las variables $y's$, por lo que se tiene un caso de múltiples soluciones óptimas.
Volviendo al primal, tomando el punto $(t, x) = (b, \mathbf{0})$ se puede comprobar que su dominio es factible. Entonces, con lo demostrado en $a.ii)$ se tiene que el problema P es tiene solución óptima degenerada.

La demostración se hizo de esta forma para demostrar el uso de la propiedad explicada en $a.ii)$. Otra demostración válida es demostrar directamente la degenerancia.

$c)$ $i)$ La formulación dual de $P)$ es:

$$D) \qquad \text{mín} \quad 8y_1 + 14y_2 + 12y_3 + 10y_4 + 2y_5$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ y_1 + 2y_2 + 2y_4 + 4y_5 &\geq 3 \quad (1) \\ 3y_1 + 3y_3 - 2y_4 - 10y_5 &\geq 2 \quad (2) \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 &\geq 4 \quad (3) \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ y_4, y_5 &\leq 0 \end{aligned}$$

$ii)$ Considerando que las restricciones (1) y (2) están activas, se deben cumplir las siguiente ecuaciones:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 65/3$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$2x_1 + 3x_3 = 15$$

Entonces, despejando las variables:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 65/3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \quad A^{-1}b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del primal será $(x_1, x_2, x_3) = (7, 1/3, 0)$. Luego, por el THC se sabe que las restricciones (1) y (2) del dual están activas, que y_1 e y_2 son parte de la base óptima del dual y que $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ dado que son variables no básicas (se puede comprobar que las restricciones (3), (4) y (5) del primal están inactivas). Entonces, las variables duales deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$8y_1 + 14y_2 = 65/3$$
$$y_1 + 2y_2 = 3$$
$$\longrightarrow y_1 = 2/3, y_2 = 7/6$$

Finalmente, la solución del problema dual es $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (2/3, 7/6, 0, 0, 0)$.

$iii)$ En primer lugar, es necesario ver cuánto puede aumentar la cantidad de materia prima 1 sin que cambie la base, es decir, hasta que ya no sea una restricción activa. Para esto, es necesario hacer

un análisis de sensibilidad de cambio en el lado derecho. El problema primal planteado en forma estándar es el siguiente:

$$P) \qquad \text{máx} \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + h_1 &= 8 \quad (1) \\ 2x_1 + 3x_3 + h_2 &= 14 \quad (2) \\ 3x_2 + 2x_3 + h_3 &= 12 \quad (3) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - h_4 &= 10 \quad (4) \\ 4x_1 - 10x_2 + 2x_3 - h_5 &= 2 \quad (5) \\ x, h &\geq 0 \end{aligned}$$

Recordemos que la base solución equivale a las variables x_1, x_2 y a las variables de holgura h_3, h_4 y h_5. Entonces, haciendo el siguiente cálculo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -10 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & -4/3 & 0 & -1 & 0 \\ -10/3 & -11/3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1/3 \\ 11 \\ 10/3 \\ 68/3 \end{pmatrix}$$

De esto, el máximo cambio en el lado derecho debe cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -7 \\ 1/3\delta &\geq -1/3 \rightarrow \delta \geq -1 \\ -1\delta &\geq -11 \rightarrow \delta \leq 11 \\ -2/3\delta &\geq -10/3 \rightarrow \delta \leq 5 \\ -10/3\delta &\geq -68/3 \rightarrow \delta \leq 6.8 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo cambio que puede haber en el lado derecho de la restricción (1) sin que cambie la base es de 5 unidades y cualquier cambio mayor a 5 no generará mejores utilidades. Considerando que el valor de las variables duales es el precio sombra de cada restricción, lo máximo que se estará dispuesto a pagar por agregar 7 unidades (o cualquier cantidad por sobre 5) de la materia prima (1) será $5y_1 = 10/3$, que es lo que mejorará la función objetivo.

d) Por enunciado se puede asumir que existe algún $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que x_k está acotada. Entonces, los siguientes problemas son factibles y tienen valor objetivo acotado:

$$\begin{aligned} P_k^+) \qquad & \text{máx}\, x_k \\ s.a. \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k^-) \qquad & \text{máx}\, -x_k \\ s.a. \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego, como estos problemas son factibles y tienen valor acotado, sus problemas duales asociados también son factibles. Es decir, existe $y_1, y_2 \geq 0$ tal que cumplan:

$$A^T y_1 \geq e_k$$
$$A^T y_2 \geq -e_k$$

con e_k el vector canónico k. Por lo que definiendo $y_3 = y_1 + y_2$, se tiene que: $A^T y_3 \geq e_k - e_k = 0$. Luego, por el teorema del rayo de escape, y_3 es rayo de escape del siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rcl} A^T y & \geq & c \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

que es precisamente el dominio del problema dual de P). Con esto se concluye que el problema dual de P) tiene dominio no acotado, y se demuestra lo pedido.

e) Para que se cumplan las desigualdades planteadas, necesariamente los problemas deben ser acotados, ya que en caso contrario alguna de las desigualdades será ∞ o $-\infty$ y las desigualdades siguientes serán inválidas. Luego, la única forma de que se cumpla lo dicho es que: $\text{máx}\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\} = \text{mín}\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\}$. De esta forma, todos los problemas deberán tener el mismo valor objetivo. Además, como se tiene max y min de cada problema, todo el dominio de los problemas deberá tener el mismo valor objetivo. Entonces, se tendrán las siguientes condiciones:

Ω_1 de (1), $Ax \leq b, x \geq 0 \rightarrow c^T x = V$
Ω_2 de (3), $Ax \leq -b, x \geq 0 \rightarrow c^T x = V$
Ω_3 de (1), $A^T y \geq c, y \geq 0 \rightarrow b^T y = V$
Ω_4 de (5), $A^T y \geq -c, y \geq 0 \rightarrow b^T y = V$

Supongamos que $V \neq 0$. Tomando $x^1 \in \Omega_1, x^2 \in \Omega_2, x^3 = x^1 + x^2$, se tendrá que $Ax^3 \leq 0, c^T x^3 = 2v \neq 0$, por lo que existirá un rayo de escape que hace que el problema sea no acotado. Por lo tanto, $V = 0$.

Luego, como todo vértice es óptimo, pues tiene el mismo valor de la función objetivo, los costos reducidos de todas las variables no básica serán igual a 0, pero esto también significará que las holguras del problema dual serán igual a 0, es decir, todas las restricciones duales están activas. De esto,

$$A^T y = c$$
$$A^T y = -c$$
$$\longrightarrow c = 0$$

Similarmente, se puede argumentar que $b = 0$. Finalmente, la única forma para que se cumplan los argumentos:

$$Ax = 0, x \geq 0$$
$$A^T y = 0, y \geq 0$$

Con esto, queda demostrado que en caso de no cumplirse estas condiciones alguno de los problemas será no acotado y las desigualdades serán inválidas.

f) Encontrando el equivalente lineal de PA):

$$\begin{array}{rcl} PA) & & \text{máx}\, \mu \\ s.a. \quad \sum_{i=1}^m x_i p_{ij} & \geq & \mu, \forall j = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i & = & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Dualizándolo:

$$\begin{array}{rrcl} & D) & \min & \eta \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} \pi_j p_{ij} + \eta & \geq & 0, \forall i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} -\pi_j & = & 1 \\ & \pi & \leq & 0 \end{array}$$

Tranformándolo con $\pi' = -\pi$:

$$\begin{array}{rrcl} & D) & \min & \eta \\ s.a. & \eta & \geq & \sum_{j=1}^{n} \pi'_j p_{ij}, \forall i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} \pi'_j & = & 1 \\ & \pi' & \geq & 0 \end{array}$$

Finalmente, tomando $p_{ij} = -r_{ij}$ $D)$ puede escribirse como:

$$D) \qquad \max_{\pi} \left\{ \min_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} \pi_j r_{ij} \right\}$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a. & \sum_{j=1}^{n} \pi_j & = & 1 \\ & \pi & \geq & 0 \end{array}$$

En que $D)$ es exactamente $PB)$ con $\pi = y$, con lo que se demustra lo pedido.

Problema 2. (15 puntos)

a) (3 puntos) Suponga que una empresa productora de alimentos elabora 2 tipos de alimento, a_1 y a_2, que para producirlos requiere de 3 tipos de materia prima, b_1, b_2 y b_3. Las ganancias de esta empresa, están dadas sólo por la producción de los dos tipos de alimento, sin embargo, estas ganancias no son independientes entre a_1 y a_2, sino que están correlacionadas. La siguiente matriz define la ganancia para cada par (a_1, a_2) producidos:

a_2							
5	10						
4	9	10					
3	7	9	10				
2	3	6	8	10			
1	2	4	7	9	10		
0	0	2	4	8	9	10	
a_2 / a_1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	a_1

Considere que la ganancia está en \$. Por ejemplo, si la empresa produce 2 unidades de a_1 y 1 de a_2, entonces tendrá una ganancia de 7 \$. Los requerimientos de cada alimento son:

	a_1	a_2
b_1	1	3
b_2	2	2
b_3	3	1

Entonces, para producir 1 unidad de a_1, por ejemplo, se debe gastar 1 unidad de b_1, 2 de b_2 y 3 de b_3. Además, suponga que el costo de comprar la materia prima b_i es c_i. Finalmente, la empresa le pide plantear un modelo de programación lineal entero que minimice los costos de la empresa, sujeto a que las ganancias sean mayores a 7\$. Note que las ganancias se refieren sólo a los ingresos por la producción

de los alimentos (sin restar los costos), y que los únicos costos en que incurre la empresa son los de comprar las materias primas. Considere que la compra de unidades, la utilización de las materias primas y la producción de alimentos, sólo pueden ser en números enteros.

b) (4 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{máx} \quad -4x_1 + 10x_2 + x_3$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcc} -13x_1 + 9x_2 & \leq & 39 \\ 5x_1 + 4x_2 & \leq & 40 \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ x_1 - 100x_3 & \leq & 1.5 \\ x_1 - 100x_3 & \geq & -97,5 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \\ x_3 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

i) (1 punto) Formule la relajación lineal de P . Luego, grafique la región de soluciones factibles del problema relajado en función de x_1 y x_2 (tomando $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$).

ii) (3 puntos) Asuma que la solución óptima de la relajación lineal de P) es $(x_1, x_2, x_3) = (204/97, 715/97, 0.996)$. Resuelva el problema usando Branch and Bound, ramificando primero por la variable x_3 y resolviendo los subproblemas de la manera que estime conveniente.

c) (6 puntos) Considere el siguiente problema de la mochila binario de 4 productos:, tal que los vectores de utilidad por producto (u) y de volumen ocupado por cada producto (v):

$$P) \qquad \text{máx} \quad u^T x$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcc} v^T x & \leq & C \\ x & \in & \{0,1\}^4 \end{array}$$

Con $u^T = [u_1, u_2, u_3, u_4], v^T = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, tal que $u_i, v_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \ldots, 4$.

i) (2 puntos) Sea $\hat{x}$ la solución de la relajación lineal de P):

$$S) \qquad \text{mín} \quad w = \sum_{i=1}^{i=4} (1 - \hat{x}_i) z_i$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcc} \sum_{i=1}^{4} v_i z_i & \geq & C + \epsilon \\ z & \in & \{0,1\}^4 \end{array}$$

Suponga que w^* y z^* son el valor óptimo y la solución óptima de S), respectivamente. Demuestre que si $w^* < 1$, entonces las variables x_i tal que $z_i = 1$ forman un cover para P) que corta a $\hat{x}$. Asuma que ϵ es un número positivo muy pequeño.

ii) (2 punto) Sea:

$$u^T = [5, 3, 3, 4]$$
$$v^T = [2, 3, 6, 1]$$

$$C = 5$$

Encuentre la solución de la relajación lineal de P). Luego, resuelva S) y proponga un cover que use las variables seleccionadas por los $z_i = 1$. Corrobore que el cover no corta soluciones enteras, pero sí corta la solución de la relajación lineal.

iii) (2 puntos) De la solución encontrada en *ii*) (antes de agregar el cover), obtenga los cortes de Gomory de todas las variables fraccionarias y escríbalos en función de las variables x_1, x_2, x_3, x_4.

d) (2 puntos) Sea x^* la solución del siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{mín} \quad v = c^T x$$

$$\begin{array}{rcc} s.a. & & \\ x & \in & \Omega \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & = & m \\ x & \in & \{0,1\}^n \end{array}$$

Con $m \leq n$. Además, se tiene que x^* es solución única, $v^* = c^T x^*$ y $S(x) = \{i : x_i = 1, \forall i = 1\ldots., n\}$. Suponga que desea encontrar la segunda mejor solución del problema en términos de valor objetivo, entonces demuestre que agregando la siguiente restricción a Ω, P obtendrá la segunda mejor solución:

$$\sum_{i \in S(x^*)} (1 - x_i) + \sum_{i \notin S(x^*)} (x_i) \geq 2$$

Solución Problema 2.

a) Variables de decisión:

$$x_i = \text{Cantidad de materia prima } i \text{ que compra la empresa}$$

$$y_{ij} = \text{Cantidad de materia prima } i \text{ que la empresa gasta en producir el alimento } j$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{Si la producción es tal que } (a_1, a_2) \geq (3, 0) \\ 0 & \text{Si la producción es tal que } a_1 + a_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$z_j = \text{Cantidad de alimento } j \text{ producido}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{3} c_i x_{b_i}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} y_{ia_1} + y_{ia_2} & \leq & x_i & \forall i \in \{b_1, b_2, b_3\} \\ y_{b_1 j} + y_{b_2 j} + y_{b_3 j} & = & z_j & \forall j \in \{a_1, a_2\} \\ z_{a_1} + z_{a_2} & \geq & 4 - M\alpha & \\ z_{a_1} & \geq & 3 - M(1 - \alpha) & \\ x_i, y_{ij}, z_j & \in & \mathbb{Z}^+ & \forall j \in \{a_1, a_2\}, \forall i \in \{b_1, b_2, b_3\} \\ \alpha & \in & \{0, 1\} & \end{array}$$

b) *i*) La relajación lineal de P) es:

$$PL) \qquad \text{mín} \quad -4x_1 + 10x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rcl} s.a. & & \\ -13x_1 + 9x_2 & \leq & 39 \\ 5x_1 + 4x_2 & \leq & 40 \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ x_1 - 100x_3 & \leq & 1.5 \\ x_1 - 100x_3 & \geq & -97,5 \\ x_3 & \leq & 1 \\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

El gráfico del dominio de PL) en función de x_1 y x_2 es:

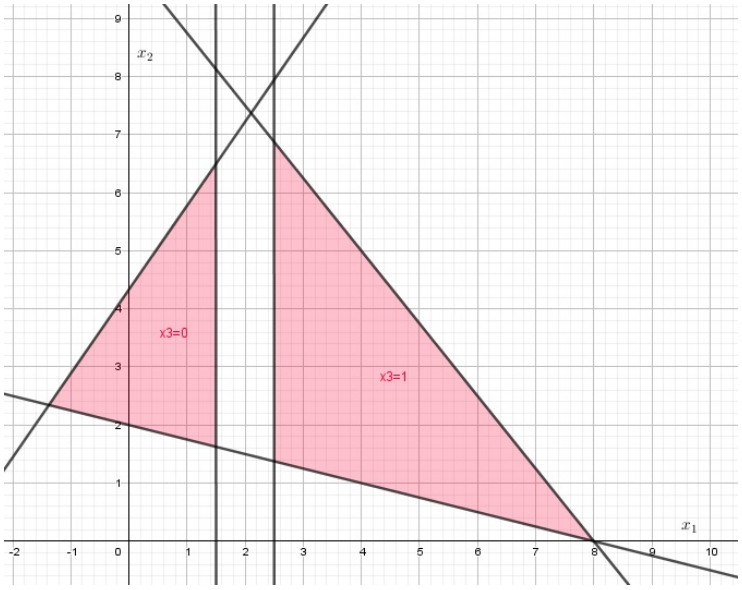
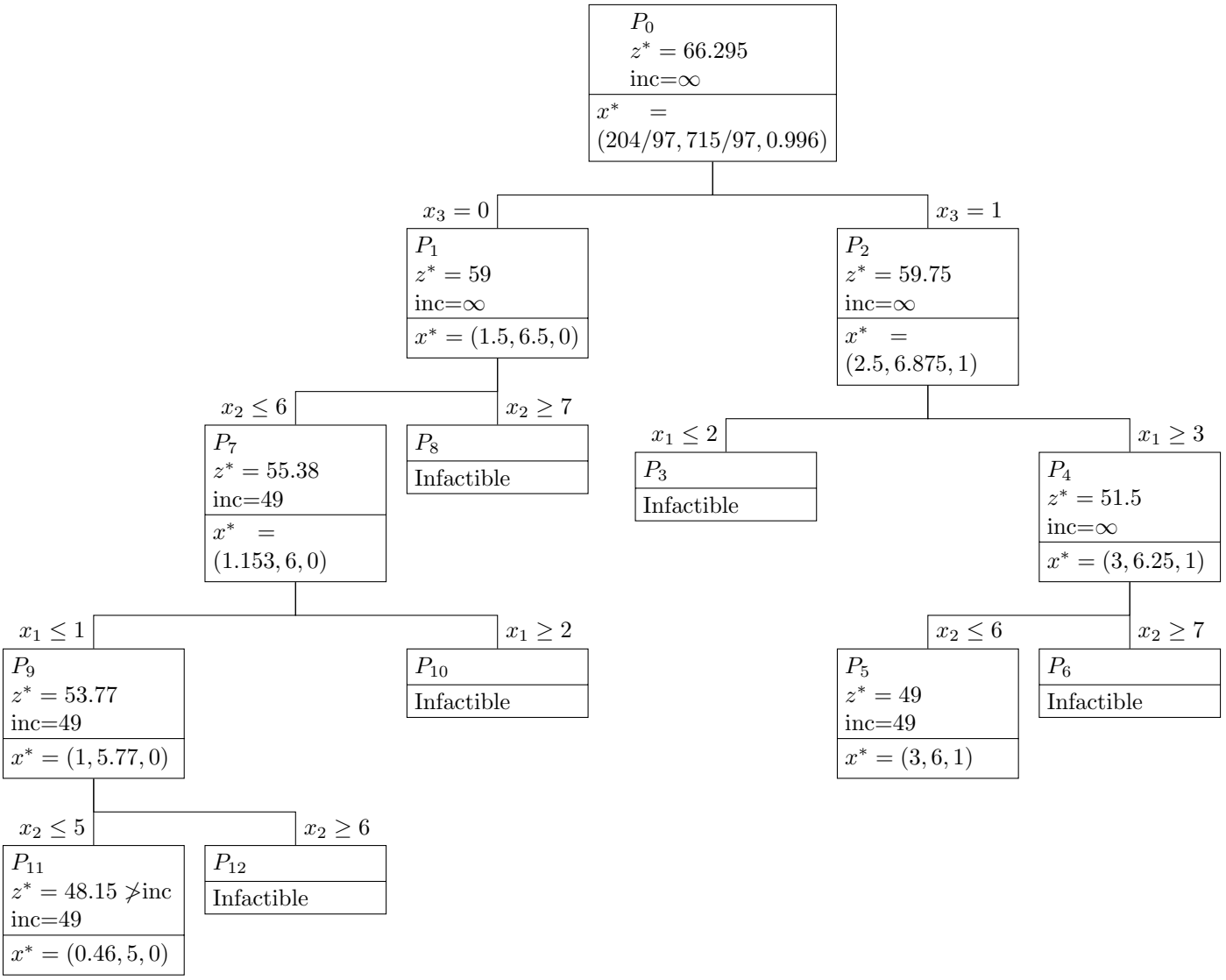


Figura 1: Dominio 2.b)

ii) El árbol de B&B quedará:



Finalmente, la solución es $(x_1, x_2, x_3) = (3, 6, 1)$ con valor óptimo de 49.

c) *i)* En primer lugar, es necesario notar que $\hat{x}$ puede tener sólo 1 variable fraccionaria, o sino la solución no sería básica. Entonces, tomemos el índice j tal que:

$$1 = \hat{x_1} = \cdots = \hat{x_{j-1}} \geq \hat{x_j} \geq \hat{x_{j+1}} = \cdots = \hat{x_4} = 0$$

Sin perder generalidad, se asumió que las variables están ordenadas de forma descendiente. Además, se tiene que $\hat{x_j} v_j + \sum_{i=1}^{j-1} v_i = C$, pues $u > 0$. Luego, la función objetivo de S) será:

$$w = (1 - \hat{x_j}) z_j + \sum_{i=j+1}^{4} z_i$$

Entonces, $w < 1 \iff 0 < \hat{x_j} < 1 \wedge z_j = 1 \wedge z_{j+1} = \cdots = z_4 = 0, \forall i = j+1, \ldots, 4$. Además, debe cumplirse que: $\sum_{i=1}^{j} v_j \geq C + \epsilon$. Finalmente, se llega a que:

$$\sum_{i=1}^{j} v_j > C = \hat{x_j} v_j + \sum_{i=1}^{j-1} v_i = v^T \hat{x}$$

Por lo tanto, tomando z_i^* como solución de S), $\sum_{i=1}^{4} z_i^* \hat{x_1} \leq \sum_{i=1}^{4} z_i - 1$ determina un cover para P) que corta a la solución óptima del relajado.

ii) La relajación lineal del problema original quedará:

$$PL) \qquad \text{máx} \quad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x &\leq 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que la solución de PL) es: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 1)$. Entonces, la relajación lineal del problema quedará:

$$S) \qquad \text{mín} \quad \frac{z_2}{3} + z_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ 2z_1 + 3z_2 + 6z_3 + z_4 &\geq 5 + \epsilon \\ z &\in \{0,1\}^4 \end{aligned}$$

Nuevamente, es fácil ver que la solución del problema es $z = (1, 1, 0, 1)$ y su valor objetivo óptimo es $\frac{1}{3} < 1$. Entonces, el cover definido por el problema será:

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

iii) Para formular los cortes de Gomory, es neceario plantear el problema relajado en forma estándar. Por simplicidad de los cálculos, es posible asumir que $x_3 = 0$, o sino el problema original sería infactible:

$$PL) \qquad \text{máx} \quad 5x_1 + 3x_2 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 &= 5 \\ x_1 + x_6 &= 1 \\ x_2 + x_7 &= 1 \\ x_4 + x_8 &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima fraccionaria encontrada en *ii*) en términos de las variables del problema estándar es: $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 2/3, 1, 0, 0, 1/3, 0)$. Entonces, hay que despejar la variables básicas en función de las no básicas:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B)^{-1} R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (B)^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Entonces, con las filas 2 y 4 se pueden generar los siguientes corte de Gomory:

$$(1/3 - \lfloor 1/3 \rfloor) + (-2/3 - \lfloor -2/3 \rfloor) + (-1/3 - \lfloor -1/3 \rfloor) \geq (2/3 - \lfloor 2/3 \rfloor)$$

$$\longrightarrow x_5 + x_6 + 2x_9 \geq 2$$

$$(-1/3 - \lfloor -1/3 \rfloor) + (2/3 - \lfloor 2/3 \rfloor) + (1/3 - \lfloor 1/3 \rfloor) \geq (1/3 - \lfloor 1/3 \rfloor)$$

$$\longrightarrow 2x_5 + 2x_6 + x_9 \geq 1$$

Finalmente, en términos de las variables originales, los cortes serán:

$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4$$

d) Sea $\Delta(x, x*) = \sum_{i \in S(x^*)}(1 - x_i) + \sum_{i \notin S(x^*)}(x_i)$. Para demostrar que agregando la restricción mencionada se llegará a la segunda mejor solución, se deben corroborar las siguientes dos condiciones:

(1) $\Delta(x^*, x^*) < 2$

(2) $\Delta(x, x^*) \geq 2, \forall x \neq x^*$

Ahora, sea $\bar{x} \in \Omega \wedge \sum_i \bar{x_i} = m$. Entonces, considerando que $S(x^*)$ es el conjunto de índices tal que las variables con esos índices de x^* valen 1 y que $\Delta(\bar{x}, x*) \geq 0$, es posible afirmar que:

$$\Delta(\bar{x}, x*) = 0 \iff (1 - \bar{x_i}) = 0, \forall i \in S(x^*) \wedge \bar{x_i} = 0, \forall i \notin S(x^*) \iff \bar{x} = x^*$$

Por lo tanto, se puede concluir que:

$$\bar{x} \neq x^* \iff \sum_{i \in S(x^*)} (1 - \bar{x_i}) + \sum_{i \notin S(x^*)} (\bar{x_i}) \geq 1$$

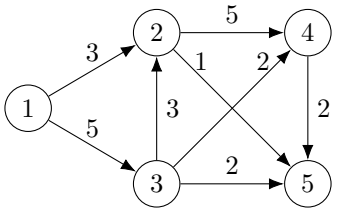
Por otro lado, si $\bar{x} \neq x^*$, entonces existe al menos un j_1 tal que $\bar{x_{j1}} \neq x^*_{j1}$, y además para cumplir que $\sum_i \bar{x_i} = m$, también debe existir $j2$ tal que $\bar{x_{j2}} \neq x^*_{j2}$. Luego, estas variables necesariamente sumarán 1 en alguno de los dos término de $\Delta(\bar{x}, x*)$. Usando el mismo argumento sucesivamente, se puede afirmar que cualquier punto $\bar{x}$ deberá cumplir con que $\Delta(\bar{x}, x*)$ sea par. Finalmente, con lo recién mencionado y con que $\Delta(\bar{x}, x*) \geq 1$, se tendrá que:

$$\Delta(\bar{x}, x*) \geq 2$$

y se demuestra lo pedido

Problema 3. (16 puntos)

a) (4 puntos) Considere el siguiente grafo con sus respectivos costos:



Considere además, que no sólo hay costos por viajar en un arco del grafo, sino que también hay costos por cruzar (entrar y salir) cada nodo. Por ejemplo, suponga que el costo de cruzar el nodo 2 es c_2, entonces el costo de hacer la ruta $1 - 2 - 4$ va a ser de $8 + c_2$ porque tuvo que entrar y salir de 2. Los costos de cruzar cada nodo se encuentran en la tabla de a continuación:

nodo	c_i
1	0
2	4
3	1
4	5
5	0

i) (2 puntos) Suponga que quiere encontrar la ruta mínima desde el nodo 1 al resto de los nodos. Describa y plantee cómo resolver el problema anterior mediante el algoritmo de Dijkstra.

ii) (2 puntos) Resuelva el problema planteado con el algoritmo de Dijkstra de la forma descrita en *i*) .

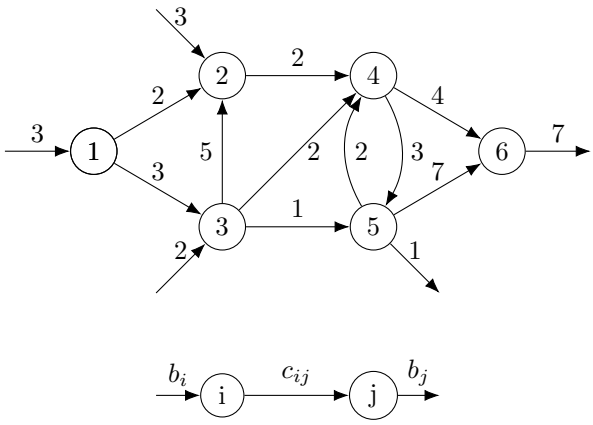
b) (2 puntos) Sea $d(i)$ el costo de viajar por la ruta mínima entre un nodo fuente s al nodo i. Suponga que R es una ruta dirigida entre s y k $(s - i_1 - \cdots - k)$, demuestre que R es ruta mínima entre s y k si y sólo si:

$$d(j) = d(i) + c_{ij}$$

con (i, j) cualquier arco perteneciente a R y c_{ij} el costo de dicho arco.

c) (1 punto) Determine justificadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Sea un problema de flujo a costo mínimo factible en un grafo $G(N, A)$, con $|N| + 1 \leq |A|$ y todos los costos de sus arcos negativos, entonces este problema será no acotado".

d) (6 puntos) Considere el siguiente grafo:

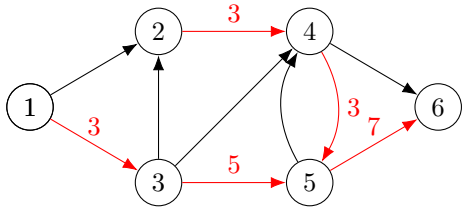


Con b_i la oferta del nodo i, b_j la demanda del nodo j y c_{ij} el costo del arco (i, j).

i) (1 punto) Modele matemáticamente el problema como flujo a costo mínimo.

ii) (2.5 puntos) Desarrolle un algoritmo de Fase I de SIMPLEX especializado en redes, y con este algoritmo encuentre una base inicial factible del grafo anterior

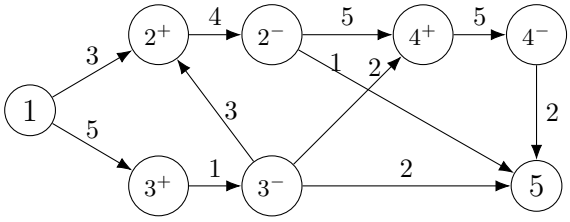
iii) (2.5 puntos) Independiente de la base que haya encontrado en *ii*), usando el siguiente árbol inicial resuelva el problema con Fase II de SIMPLEX especializado en redes:



e) (3 puntos) Un problema en la investigación de operaciones es la asignación eficiente del personal. Considere el problema que enfrenta una empresa que cuenta con n trabajadores y m tareas, con $n > m$. El gerente de operaciones de la empresa sabe que cada trabajador tiene habilidades y preferencias específicas respecto a las tareas que podría tocarle realizar. Supongamos que ocupamos esta información para calcular la utilidad (o deseabilidad) d_{ij} de cada asignación para el trabajador i a la tarea j.
Formule como un problema de flujo a costo mínimo el problema de optimización que asigna los trabajadores a las tareas, asegurándose que toda tarea es realizada exactamente por un único trabajador y que ningún trabajador realiza más de una tarea, maximizando la utilidad total obtenida en la asignación realizada.

Solución Problema 3.

a) *i*) Para crear un problema de rutas mínimas que resuelva el problema de costos por cruzar los nodos, basta transformar el grafo de la siguiente forma:

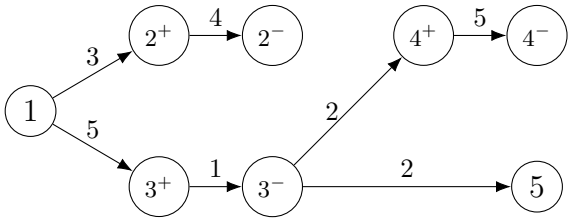


Con esto, se puede aplicar el algoritmo Dijkstra al grafo.

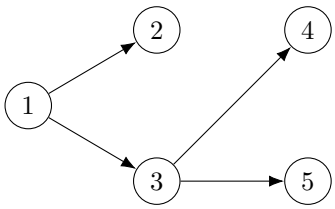
ii) Resolviendo Dijkstra matricialmente, la solución será:

Nodo\ Iteración	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$
2^+	$(\infty,-)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$
2^-	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,2^+)$	$(7,2^+)$	$(7,2^+)$	$(7,2^+)$	$(7,2^+)$	$(7,2^+)$
3^+	$(\infty,-)$	$(5,1)$	$(5,1)$	$(5,1)$	$(5,1)$	$(5,1)$	$(5,1)$	$(5,1)$
3^-	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(6,3^+)$	$(6,3^+)$	$(6,3^+)$	$(6,3^+)$	$(6,3^+)$
4^+	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$
4^-	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(13,4^+)$	$(13,4^+)$
5	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$	$(8,3^-)$

Entonces, la solución del problema auxiliar será:



En términos del grafo original, el árbol de rutas mínimas desde el nodo 1 será:



b) Por simplicidad, llamemos la ruta R como $R : s = r_1 - r_2 \cdots - r_{k-1} - r_k = k$ y a $R(r, q)$ el costo de viajar entre el nodo r y el nodo q por la ruta R. Sin perder generalidad, se está asumiendo que el largo de la ruta R es k nodos. Sea (i, j) un arco tal que $i, j \in R$. Supongamos que la subruta de R $r_1 - \cdots - r_i = i$

no es ruta mínima entre s e i. Entonces existe una ruta alternativa $R' : s = r'_1 - \cdots - r'_i = i$ tal que $R'(s,i) < R(s,i)$. Sin embargo, si sucediera esto:

$$R(s,k) = R(s,i) + R(i,k) > R'(s,i) + R(i,k)$$

Es decir, la ruta $r'_1 - \cdots - r'_i = i - \cdots r_{i+1} - \cdots - r_k = k$ tendrá menor costo que la ruta R, lo que es una contradicción con el enunciado, por lo tanto, $d(i) = R(s,i)$.

Con esto, se puede demostrar que si R es ruta óptima entre s y k, entonces:

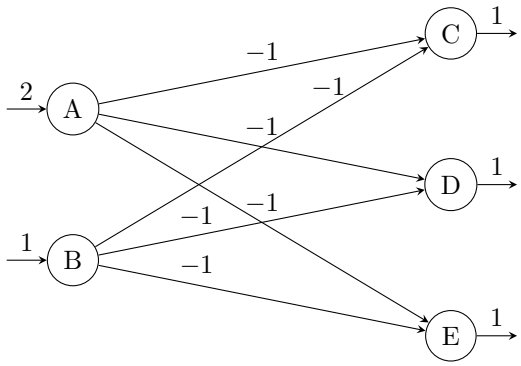
$$d(j) = R(s,j) = R(s,i) + c_{ij} = d(i) + c_{ij}$$

con lo que se demuestra la implicancia hacia la derecha.

Ahora, supongamos que $d(j) = d(i) + c_{ij}$ para todo arco (i,j) perteneciente a R. Se puede hacer un argumento por inducción, suponiendo que la subruta de R $r_1 = \cdots = r_i$ es ruta mínima entre s e i. En este caso, es fácil ver que como $d(j) = d(i)+c_{ij}$, entonces la ruta mínima entre s y j será $r_1 - \cdots - r_i - r_j$. Ahora, tomando como caso base $d(r_2) = d(r_1 = s) + c_{sr_2} = c_{sr_2}$, se puede ver que el arco (s, r_2) es ruta mínima entre s y r_2. Por lo tanto, por inducción se demuestra que R es ruta mínima entre s y k.

Finalmente, se ha demostrado la doble implicancia que era lo pedido.

c) Esta afirmación es falsa. Basta tomar el siguiente contraejemplo:



En este problema $|N| = 5 + 1 = 6 \leq |A| = 6$, y tiene solución claramente acotada con valor -3.

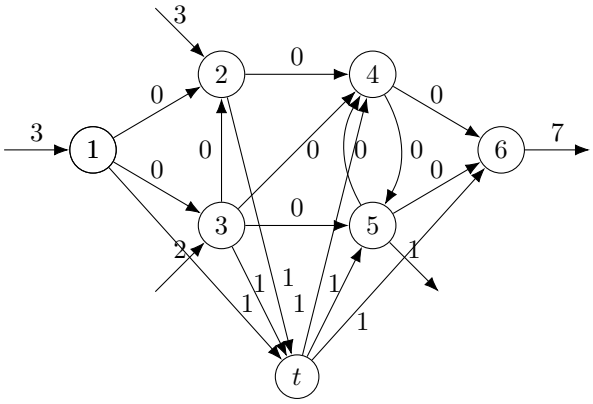
d) *i*) El modelo matemático será:

$$P) \quad \text{máx} \quad 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{24} + 5x_{32} + 2x_{34} + x_{35} + 3x_{45} + 4x_{46} + 2x_{54} + 7x_{56}$$

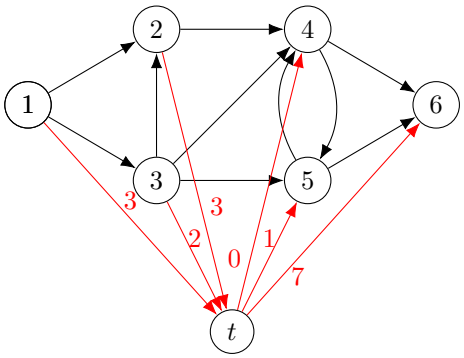
s.a.

$$\begin{array}{rcl} x_{12} + x_{13} & = & 3 \\ -x_{12} + x_{24} + x_{32} & = & 2 \\ -x_{13} + x_{32} + x_{34} + x_{35} & = & 2 \\ -x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{46} - x_{54} & = & 0 \\ -x_{35} - x_{45} + x_{54} + x_{56} & = & -1 \\ -x_{46} - x_{56} & = & -7 \\ x_{ij} & \geq & 0, \forall (i,j) \in A \end{array}$$

ii) Para encontrar una base inicial con Fase I, se debe agregar un nodo t al grafo auxilira para quede de la siguiente forma:



La base inicial factible será



◇ **Iteración 0:** Se debe encontar el valor de las variables duales:

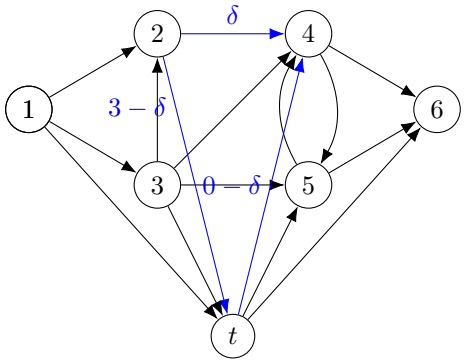
$$\pi_1 - \pi_t = 1$$
$$\pi_2 - \pi_t = 1$$
$$\pi_3 - \pi_t = 1$$
$$\pi_t - \pi_4 = 1$$
$$\pi_t - \pi_5 = 1$$
$$\pi_t - \pi_6 = 1$$

Fijando $\pi_t = 0$ se obtiene $\pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_5 = -1, \pi_6 = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

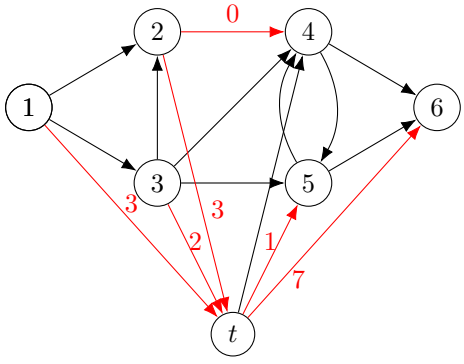
$$\bar{c}_{12} = 0 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{13} = 0 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{24} = 0 - \pi_2 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{32} = 0 - \pi_3 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{34} = 0 - \pi_3 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{35} = 0 - \pi_3 + \pi_5 = -2$$
$$\bar{c}_{45} = 0 - \pi_4 + \pi_5 = 0$$
$$\bar{c}_{46} = 0 - \pi_4 + \pi_6 = 0$$
$$\bar{c}_{54} = 0 - \pi_5 + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{56} = 0 - \pi_5 + \pi_6 = 0$$

Hay 3 costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo

◇ **Iteración 1:**
Arbitrariamente entrará el arco $(2, 4)$ a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{24} = 0$, $x_{t4} = 0$, $(4, 5)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo

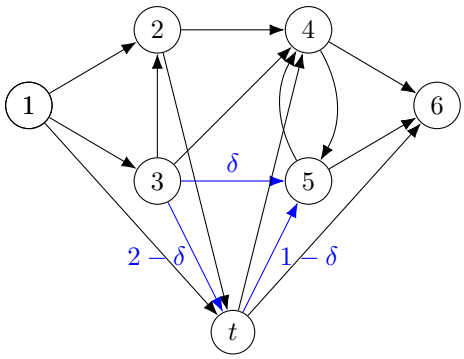
$$\pi_1 - \pi_t = 1$$
$$\pi_2 - \pi_t = 1$$
$$\pi_3 - \pi_t = 1$$
$$\pi_2 - \pi_4 = 0$$
$$\pi_t - \pi_5 = 1$$
$$\pi_t - \pi_6 = 1$$

Fijando $\pi_t = 0$ se obtiene $\pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = 1, \pi_5 = -1, \pi_6 = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

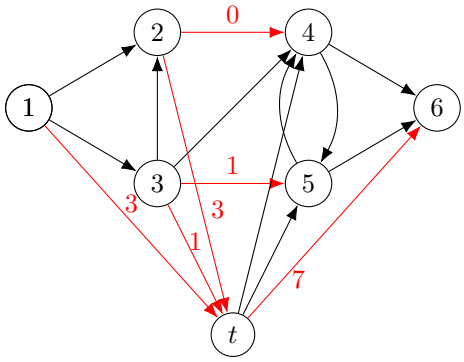
$$\bar{c}_{12} = 0 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{13} = 0 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{t4} = 1 - \pi_t + \pi_4 = 2$$
$$\bar{c}_{32} = 0 - \pi_3 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{34} = 0 - \pi_3 + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{35} = 0 - \pi_3 + \pi_5 = -2$$
$$\bar{c}_{45} = 0 - \pi_4 + \pi_5 = 0$$
$$\bar{c}_{46} = 0 - \pi_4 + \pi_6 = -2$$
$$\bar{c}_{54} = 0 - \pi_5 + \pi_4 = 2$$
$$\bar{c}_{56} = 0 - \pi_5 + \pi_6 = 0$$

Hay 2 costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo

◇ **Iteración 2:**
Arbitrariamente entrará el arco $(3, 5)$ a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{t5} = 0$, $x_{35} = 1$, $(t, 5)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo

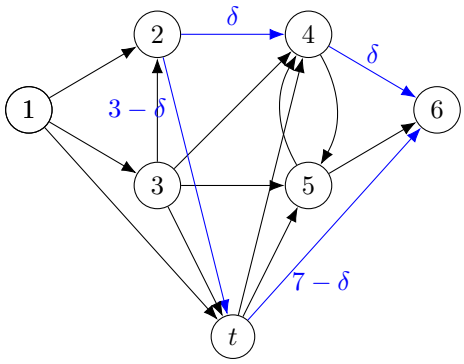
$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_t &= 1 \\
\pi_2 - \pi_t &= 1 \\
\pi_3 - \pi_t &= 1 \\
\pi_2 - \pi_4 &= 0 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 0 \\
\pi_t - \pi_6 &= 1
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_t = 0$ se obtiene $\pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = 1, \pi_5 = 1, \pi_6 = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

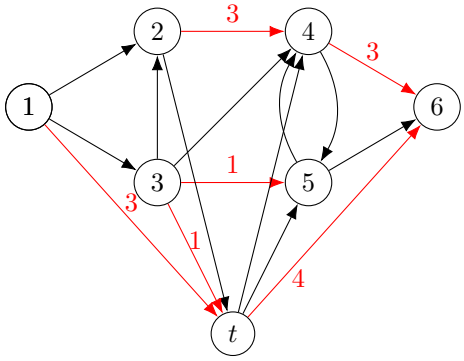
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= 0 - \pi_1 + \pi_2 = 0 \\
\bar{c}_{13} &= 0 - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
\bar{c}_{t4} &= 1 - \pi_t + \pi_4 = 2 \\
\bar{c}_{32} &= 0 - \pi_3 + \pi_2 = 0 \\
\bar{c}_{34} &= 0 - \pi_3 + \pi_4 = 0 \\
\bar{c}_{t5} &= 1 - \pi_t + \pi_5 = 2 \\
\bar{c}_{45} &= 0 - \pi_4 + \pi_5 = 0 \\
\bar{c}_{46} &= 0 - \pi_4 + \pi_6 = -2 \\
\bar{c}_{54} &= 0 - \pi_5 + \pi_4 = 0 \\
\bar{c}_{56} &= 0 - \pi_5 + \pi_6 = -2
\end{aligned}$$

Hay 2 costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo

◇ **Iteración 3:**
Arbitrariamente entrará el arco $(4, 6)$ a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{2t} = 0$, $x_{45} = 3$, $(2, t)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo

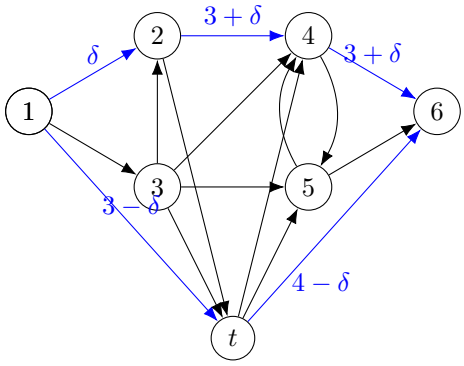
$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_t &= 1 \\
\pi_4 - \pi_6 &= 0 \\
\pi_3 - \pi_t &= 1 \\
\pi_2 - \pi_4 &= 0 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 0 \\
\pi_t - \pi_6 &= 1
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_t = 0$ se obtiene $\pi_1 = 1, \pi_2 = -1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_5 = 1, \pi_6 = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

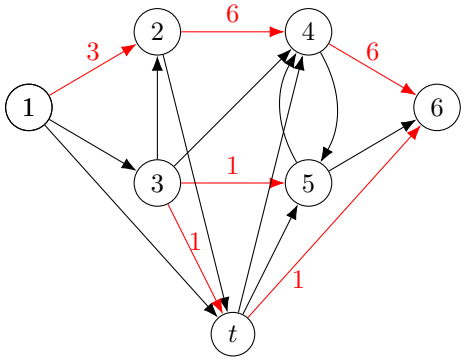
$$\bar{c}_{12} = 0 - \pi_1 + \pi_2 = -2$$
$$\bar{c}_{13} = 0 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{t4} = 1 - \pi_t + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{32} = 0 - \pi_3 + \pi_2 = -2$$
$$\bar{c}_{34} = 0 - \pi_3 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{46} = 1 - \pi_4 + \pi_6 = 1$$
$$\bar{c}_{45} = 0 - \pi_4 + \pi_5 = 2$$
$$\bar{c}_{2t} = 1 - \pi_2 + \pi_t = 2$$
$$\bar{c}_{54} = 0 - \pi_5 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{56} = 0 - \pi_5 + \pi_6 = -2$$

Hay 5 costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo

◇ **Iteración 4:**
Arbitrariamente entrará el arco $(1, 2)$ a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{1t} = 0$, $x_{12} = 3$, $(1, t)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo

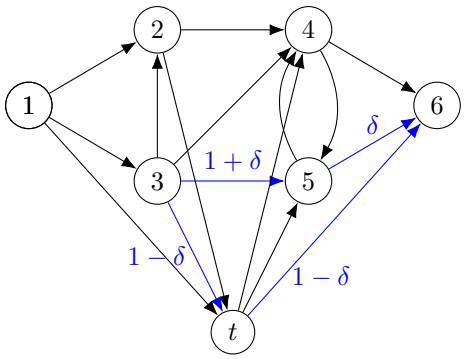
$$\pi_1 - \pi_2 = 0$$
$$\pi_4 - \pi_6 = 0$$
$$\pi_3 - \pi_t = 1$$
$$\pi_2 - \pi_4 = 0$$
$$\pi_3 - \pi_5 = 0$$
$$\pi_t - \pi_6 = 1$$

Fijando $\pi_t = 0$ se obtiene $\pi_1 = -1, \pi_2 = -1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_5 = 1, \pi_6 = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

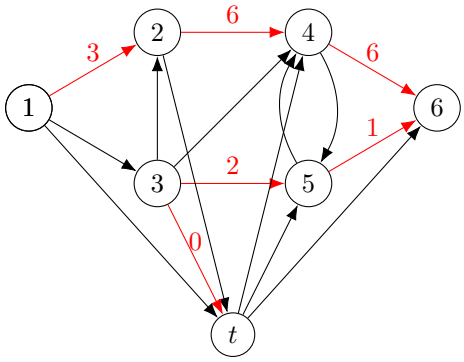
$$\bar{c}_{1t} = 1 - \pi_1 + \pi_t = 2$$
$$\bar{c}_{13} = 0 - \pi_1 + \pi_3 = 2$$
$$\bar{c}_{t4} = 1 - \pi_t + \pi_4 = 0$$
$$\bar{c}_{32} = 0 - \pi_3 + \pi_2 = -2$$
$$\bar{c}_{34} = 0 - \pi_3 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{46} = 1 - \pi_4 + \pi_6 = 1$$
$$\bar{c}_{45} = 0 - \pi_4 + \pi_5 = 2$$
$$\bar{c}_{2t} = 1 - \pi_2 + \pi_t = 2$$
$$\bar{c}_{54} = 0 - \pi_5 + \pi_4 = -2$$
$$\bar{c}_{56} = 0 - \pi_5 + \pi_6 = -2$$

Hay 4 costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo

◇ **Iteración 5:**
Arbitrariamente entrará el arco $(5, 6)$ a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{3t} = 0$, $x_{t6} = 0$, $x_{56} = 1$, $(t, 6)$ sale de la base (arbitrariamente) y el árbol queda así:



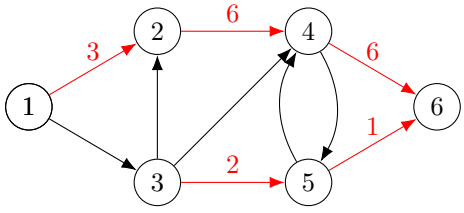
Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_2 &= 0 \\
\pi_4 - \pi_6 &= 0 \\
\pi_3 - \pi_t &= 1 \\
\pi_2 - \pi_4 &= 0 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 0 \\
\pi_5 - \pi_6 &= 0
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_6 = 0$ se obtiene $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0, \pi_4 = 0, \pi_5 = 0, \pi_t = -1$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{1t} &= 1 - \pi_1 + \pi_t = 0 \\
\bar{c}_{13} &= 0 - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
\bar{c}_{t4} &= 1 - \pi_t + \pi_4 = 2 \\
\bar{c}_{32} &= 0 - \pi_3 + \pi_2 = 0 \\
\bar{c}_{34} &= 0 - \pi_3 + \pi_4 = 0 \\
\bar{c}_{46} &= 1 - \pi_4 + \pi_6 = 1 \\
\bar{c}_{45} &= 0 - \pi_4 + \pi_5 = 0 \\
\bar{c}_{2t} &= 1 - \pi_2 + \pi_t = 0 \\
\bar{c}_{54} &= 0 - \pi_5 + \pi_4 = 0 \\
\bar{c}_{t6} &= 1 - \pi_t + \pi_6 = 2
\end{aligned}$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo que se está en el óptimo y la solución básica inicial factible es:



iii) ◇ **Iteración 0:** En primer lugar, se debe encontrar el valor de las variables duales:

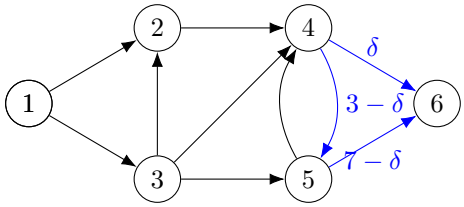
$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_3 &= 3\\ \pi_2 - \pi_4 &= 2\\ \pi_3 - \pi_5 &= 1\\ \pi_4 - \pi_5 &= 3\\ \pi_5 - \pi_6 &= 7\end{aligned}$$

Fijando $\pi_5 = 0$ se obtiene $\pi_1 = 4, \pi_2 = 5, \pi_3 = 1, \pi_4 = 3, \pi_6 = -7$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

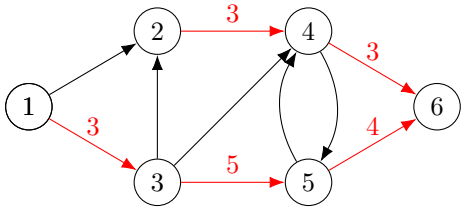
$$\begin{aligned}\bar{c}_{12} &= 2 - \pi_1 + \pi_2 = 3\\ \bar{c}_{32} &= 5 - \pi_3 + \pi_2 = 6\\ \bar{c}_{34} &= 2 - \pi_3 + \pi_4 = 4\\ \bar{c}_{46} &= 4 - \pi_4 + \pi_6 = -6\\ \bar{c}_{54} &= 2 - \pi_5 + \pi_4 = 5\end{aligned}$$

El costo reducido del arco $(4, 6)$ es negativo, por lo que no se está en el óptimo.

◇ **Iteración 1:**
El arco $(4, 6)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{46} = 3$, $x_{45} = 0$, $(4, 5)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

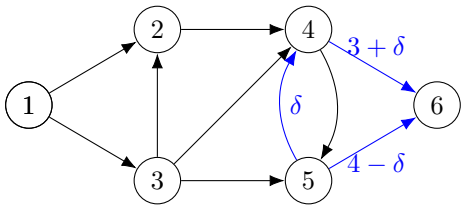
$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_3 &= 3\\ \pi_2 - \pi_4 &= 2\\ \pi_3 - \pi_5 &= 1\\ \pi_4 - \pi_6 &= 4\\ \pi_5 - \pi_6 &= 7\end{aligned}$$

Fijando $\pi_6 = 0$ se obtiene $\pi_1 = -3, \pi_2 = 6, \pi_3 = -6, \pi_4 = 4, \pi_5 = 7$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

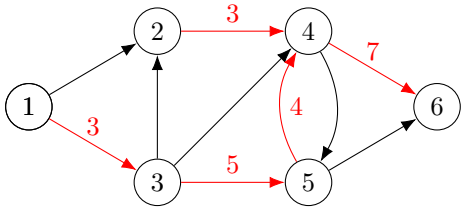
$$\bar{c}_{12} = 2 - \pi_1 + \pi_2 = 11$$
$$\bar{c}_{32} = 5 - \pi_3 + \pi_2 = 17$$
$$\bar{c}_{34} = 2 - \pi_3 + \pi_4 = 9$$
$$\bar{c}_{45} = 3 - \pi_4 + \pi_5 = 6$$
$$\bar{c}_{54} = 2 - \pi_5 + \pi_4 = -1$$

EL costo reducido del arco $(5, 4)$ es negativo, por lo que no se está en el óptimo.

◇ **Iteración 2:**
El arco $(5, 4)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{54} = 4$, $x_{56} = 0$, $(5, 6)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

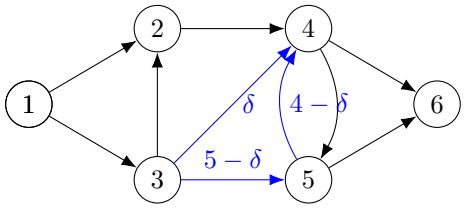
$$\pi_1 - \pi_3 = 3$$
$$\pi_2 - \pi_4 = 2$$
$$\pi_3 - \pi_5 = 1$$
$$\pi_4 - \pi_6 = 4$$
$$\pi_5 - \pi_4 = 2$$

Fijando $\pi_4 = 0$ se obtiene $\pi_1 = 6, \pi_2 = 2, \pi_3 = 3, \pi_5 = 2, \pi_6 = -4$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

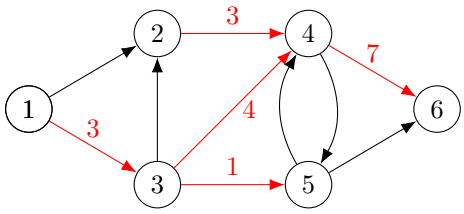
$$\bar{c}_{12} = 2 - \pi_1 + \pi_2 = -2$$
$$\bar{c}_{32} = 5 - \pi_3 + \pi_2 = 4$$
$$\bar{c}_{34} = 2 - \pi_3 + \pi_4 = -1$$
$$\bar{c}_{45} = 3 - \pi_4 + \pi_5 = 5$$
$$\bar{c}_{56} = 7 - \pi_5 + \pi_6 = 1$$

EL costo reducido del arco $(3, 4)$ es negativo, por lo que no se está en el óptimo.

◇ **Iteración 3:**
El arco $(3, 4)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{34} = 4$, $x_{54} = 0$, $(5, 4)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

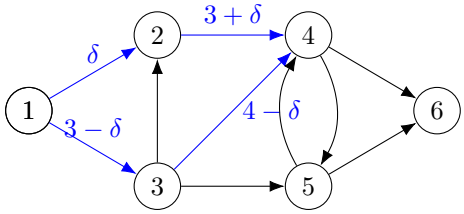
$$\pi_1 - \pi_3 = 3$$
$$\pi_2 - \pi_4 = 2$$
$$\pi_3 - \pi_5 = 1$$
$$\pi_4 - \pi_6 = 4$$
$$\pi_3 - \pi_4 = 2$$

Fijando $\pi_4 = 0$ se obtiene $\pi_1 = 5, \pi_2 = 2, \pi_3 = 2, \pi_5 = 1, \pi_6 = -4$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

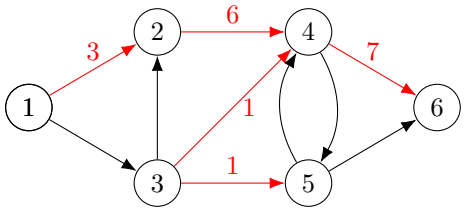
$$\bar{c}_{12} = 2 - \pi_1 + \pi_2 = -1$$
$$\bar{c}_{32} = 5 - \pi_3 + \pi_2 = 5$$
$$\bar{c}_{54} = 2 - \pi_5 + \pi_4 = 1$$
$$\bar{c}_{45} = 3 - \pi_4 + \pi_5 = 4$$
$$\bar{c}_{56} = 7 - \pi_5 + \pi_6 = 2$$

EL costo reducido del arco $(1, 2)$ es negativo, por lo que no se está en el óptimo.

◇ **Iteración 4:**
El arco $(1, 2)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{12} = 4$, $x_{13} = 0$, $(1, 3)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

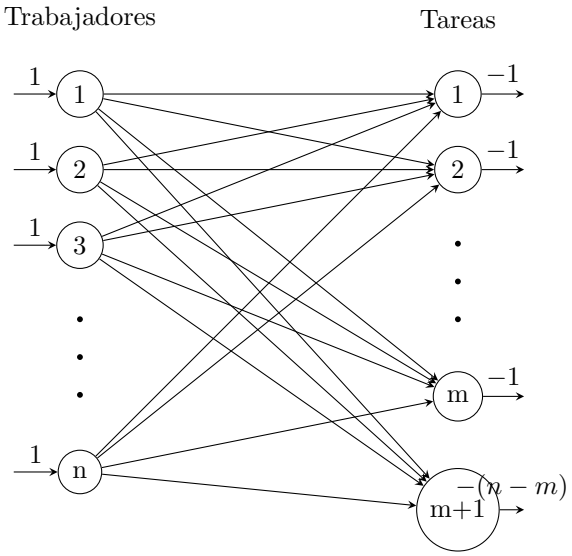
$$\pi_1 - \pi_2 = 2$$
$$\pi_2 - \pi_4 = 2$$
$$\pi_3 - \pi_5 = 1$$
$$\pi_4 - \pi_6 = 4$$
$$\pi_3 - \pi_4 = 2$$

Fijando $\pi_4 = 0$ se obtiene $\pi_1 = 4, \pi_2 = 2, \pi_3 = 2, \pi_5 = 1, \pi_6 = -4$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

$$\bar{c}_{13} = 5 - \pi_1 + \pi_3 = 3$$
$$\bar{c}_{32} = 5 - \pi_3 + \pi_2 = 5$$
$$\bar{c}_{54} = 2 - \pi_5 + \pi_4 = 1$$
$$\bar{c}_{45} = 3 - \pi_4 + \pi_5 = 4$$
$$\bar{c}_{56} = 7 - \pi_5 + \pi_6 = 2$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo que se está en el óptimo y el árbol recién encontrado es la base óptima. El valor óptimo de la función objetivo es 42.

d) Se puede plantear el siguiente grafo:



donde se tiene que $c_{ij} = -d_{ij}$ con $j \leq m$ y 0 para $j = m + 1$. Finalmente, resolviendo este grafo como flujo a costo mínimo se resolverá a asignación de trabajadores a cada tarea.

Problema 4. (14 puntos)

a) (7 puntos) Considere una cuadrícula de $m \times n$, tal que en cada posición (i, j) hay un router instalado que entrega conexión de red. Usted sabe que en el futuro cercano, exactamente uno de dichos routers fallará, siendo $p_{ij} > 0$ la probabilidad que sea el router ubicado en la posición (i, j), donde $\sum_{i=i}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Por otro lado, ha determinado que existe un conjunto R de potenciales lugares para instalar repetidores de señal. Instalar un repetidor en el lugar $r \in R$ cuesta $f_r > 0$, y de hacerlo, este cubrirá las posiciones

contenidas en el conjunto C_r. Si el router defectuoso está en una posición cubierta por un repetidor de señal, entonces la conexión de red se mantendrá. En caso contrario, la conexión se caerá en la posición del router. Dado $\alpha \in (0,1)$, formule un problema de optimización lineal que permita determinar qué repetidores instalar, a costo mínimo, de modo que la probabilidad de que la cuadrícula se quede sin conexión no exceda α.

b) (7 puntos) Suponga que usted es un alumno de ingeniería muy estudioso y que para adelantar trabajo ha decidido avanzar en distintas tareas durante el fin de semana. Para esto, dispone de 4 tareas en las que puede trabajar: *Cálculo III (C-III)*, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)*, *Optimización (OPT)* e *Introducción a la Porgramación (IP)*, y cada tarea consta de 2 preguntas. Para planificar mejor su fin de semana, usted calculó que tendrá 7 horas disponibles el sábado y 9 el domingo. Además, se puso la meta de trabajar al menos 1 hora en cada tarea, 7 horas en las tareas de ingeniería (IP o OPT), incluyendo la hora mínima de cada tarea, y 3 horas en las tareas de matemáticas (EDO o C-III), incluyendo la hora mínima de cada tarea. Considere que se demora 3 horas en terminar cada una de las preguntas de cualquier tarea, y que para empezar a trabajar en la segunda pregunta ya debe haber terminado la primera pregunta de la misma tarea. Por otro lado, también tiene la posibilidad de dedicar parte de las horas disponibles al ocio, sin embargo, esta actividad tiene un costo (diferente para cada día). Por último, los costos de realizar cada actividad son:

actividad	*costo/hr*
$OPT, 1$	8
$OPT, 2$	11
$IP, 1$	1
$IP, 2$	3
$C-III, 1$	3
$C-III, 2$	4
$EDO, 1$	3
$EDO, 2$	7
$ocio, sab$	11
$ocio, dom$	7

Finalmente, debe plantear un modelo que resuelva la asignación óptima de horas que dedicará al ocio o a trabajar en cada tarea y que minimice los costos del fin de semana. El modelo propuesto debe ser representado como un problema de flujo en redes a costo mínimo. (Sólo es necesario que plantee el grafo, no es necesario el planteamiento matemático)
Hint: Si lo necesita, puede ser de ayuda agregar cotas máximas o mínimas de flujo a cada arco.

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

$$x_r = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala un repetidor en la posición } r. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la posición } (i,j) \text{ está cubierta por algún repetidor.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{r \in R} f_r x_r$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

(1) Una posición está cubierta sólo si pertenece al conjunto de un repetidor instalado:

$$y_{ji} \leq \sum_{r:(i,j)\in C_r} x_r \qquad \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, m$$

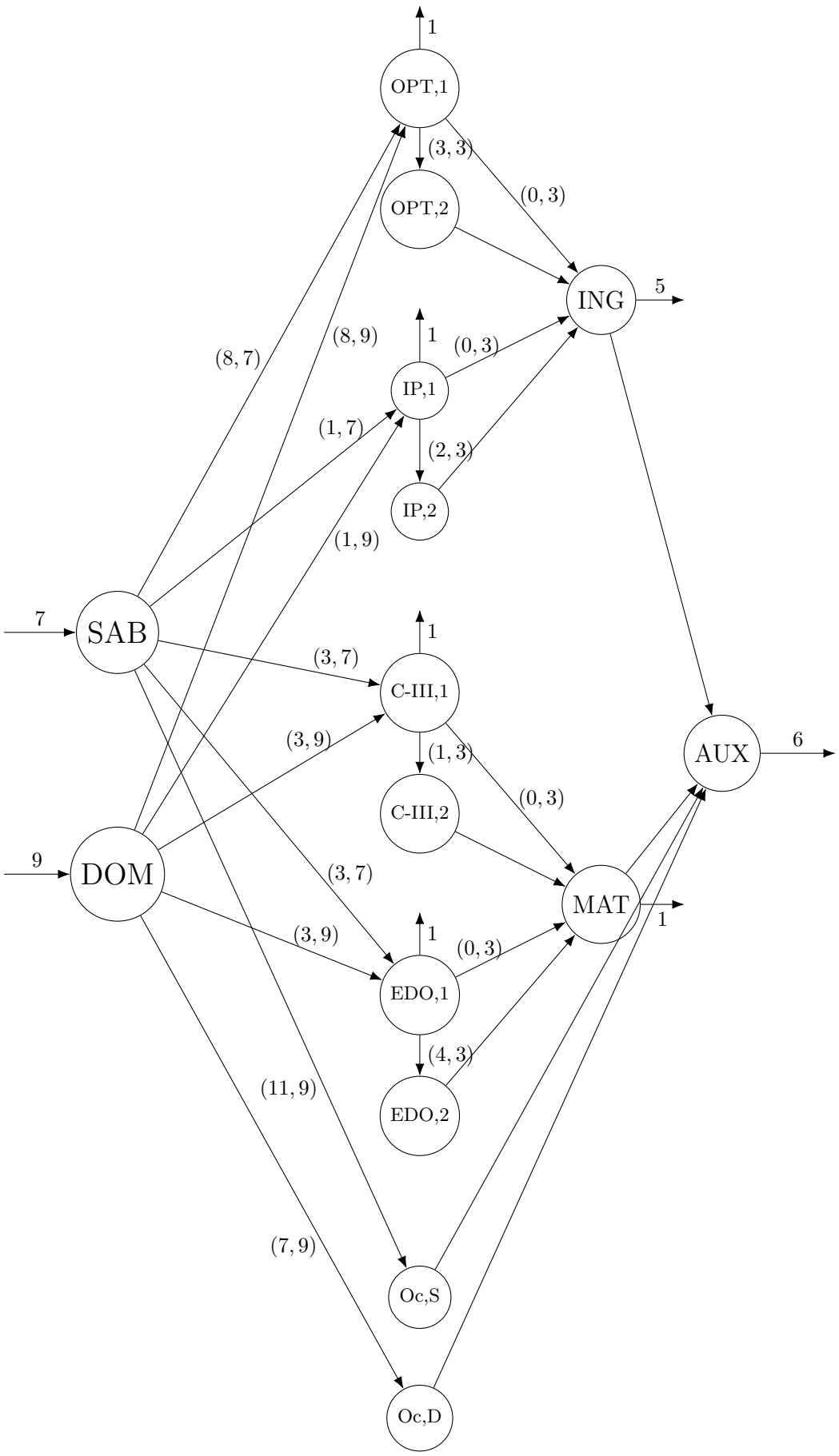
(2) Probabilidad no exceda α:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \left(1 - y_{ij}\right) \leq \alpha$$

(3) Naturaleza de las variables:

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, m$$
$$x_r \in \{0, 1\} \qquad \forall r \in R$$

b) El grafo del problema es el siguiente:


1
OPT,1
(3, 3)
OPT,2
(0, 3)
ING
5
(8, 9)
1
(0, 3)
(8, 7)
IP,1
(1, 7)
(2, 3)
IP,2
(1, 9)
7
SAB
1
(3, 7)
C-III,1
(3, 9)
(1, 3)
AUX
6
C-III,2
(0, 3)
9
DOM
(3, 7)
MAT
1
(3, 9)
1
(0, 3)
EDO,1
(4, 3)
(11, 9)
EDO,2
(7, 9)
Oc,S
Oc,D

En este grafo, el flujo de cada arco equivale a las horas que se le dedica a la actividad, ING y MAT son nodos que representan tareas de ingeniería y matemáticas, y AUX es un nodo auxiliar que recibe la demanda restante. Además sobre cada grafo se encuentra su información (c_{ij}, u_{ij}) con c_{ij} el costo de viajar por el arco (i, j) y u_{ij} la cota máxima de flujo que puede circular por el arco (i, j). Cabe destacar que los arcos que no tienen información es equivalente a $(0, \infty)$