PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-2
Profesores: M. Klapp, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Tarea 3

Fecha de entrega: Viernes 12 de noviembre - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea. Sin embargo, también es posible hacer la tarea individualmente.
- La entrega de la tarea es online en formato PDF a través de un **Google Form** dispuesto en Canvas. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano. Si es a mano, se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable. El formato de entrega del archivo es **nombre_completo_1 - nombre_completo_2.pdf o nombre_completo_1.pdf**, dependiendo de si hiceron la tarea en pareja o solos (Ej: camila_ignacia_toro_uquillas - pedro_pablo_perez_pereira.pdf o camila_ignacia_toro_uquillas.pdf).

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la tarea para incentivar este formato. También, el ayudante podrá descontar **3 décimas sobre la nota final** si la tarea está ilegible o desordenada de acuerdo a su criterio.
- El plazo de entrega es impostergable. Tarea atrasada se considera **tarea NO entregada**.
- La tarea es en pareja. No se recomienda dividir el trabajo en dos, sino que hacer un trabajo completo en conjunto. Pueden discutir los problemas con los profesores y ayudantes del curso, pero al final cada grupo es responsable de sus resultados y conclusiones. Una actitud deshonesta será sancionada de acuerdo a lo estipulado en el programa de este curso.[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, debe ser envíada a través del foro **Tarea 3** publicado en Canvas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se recomienda hacer las preguntas anticipadamente. El **día de la entrega se dejará de responder consultas**.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. Análisis de Sensibilidad (20 puntos)

(a) Considere el siguiente modelo de optimización:

$$\text{máx } 3x + 7y$$

$$x + y \geq 3 \tag{1}$$

$$x + 2y \leq 10 \tag{2}$$

$$-3x + 5y \leq 15 \tag{3}$$

$$x, y \geq 0 \tag{4}$$

(I) (2 puntos) Resuelva el problema de optimización indicando una solución y valor óptimo.

(II) (3 puntos) Si se elimina la segunda restricción, ¿Cambia la solución del problema? Podría decir algo respecto al algoritmo simplex sin resolver nuevamente y solo considerando la información disponible en la solución del problema con la restricción.

(III) (3 puntos) ¿Cuánto debe valer b_3 (lado derecho de la restricción 3) para que la solución óptima encontrada sea degenerada?

(IV) (3 puntos) Si le dieran la posibilidad de aumentar el lado derecho de la segunda restricción a 20, ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar en unidades de función objetivo?

(V) (3 puntos) ¿Cuánto debe valer c_2 (coeficiente de la función objetivo que acompaña a y) para que existan múltiples soluciones?

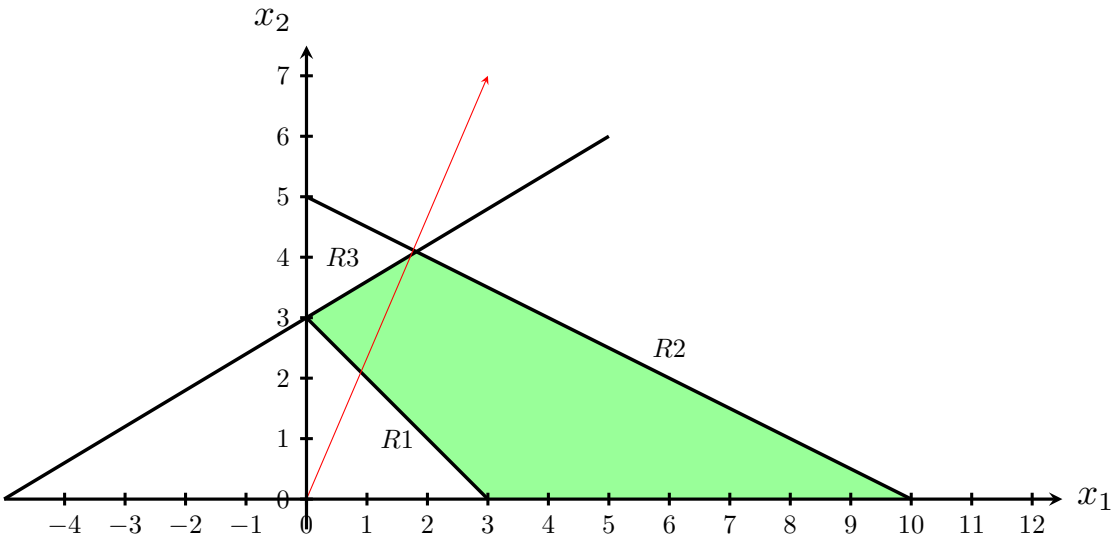
(VI) Si al problema se agrega una variable no negativa z con coeficientes en las restricciones de (1, 2 , 1). Cuánto debe valer el coeficiente de z en la función objetivo para que el problema:

1) (2 puntos) Tenga solución óptima única.
2) (2 puntos) Tenga múltiples soluciones.
3) (2 puntos) Cambie la solución óptima.

Solución Problema 1.

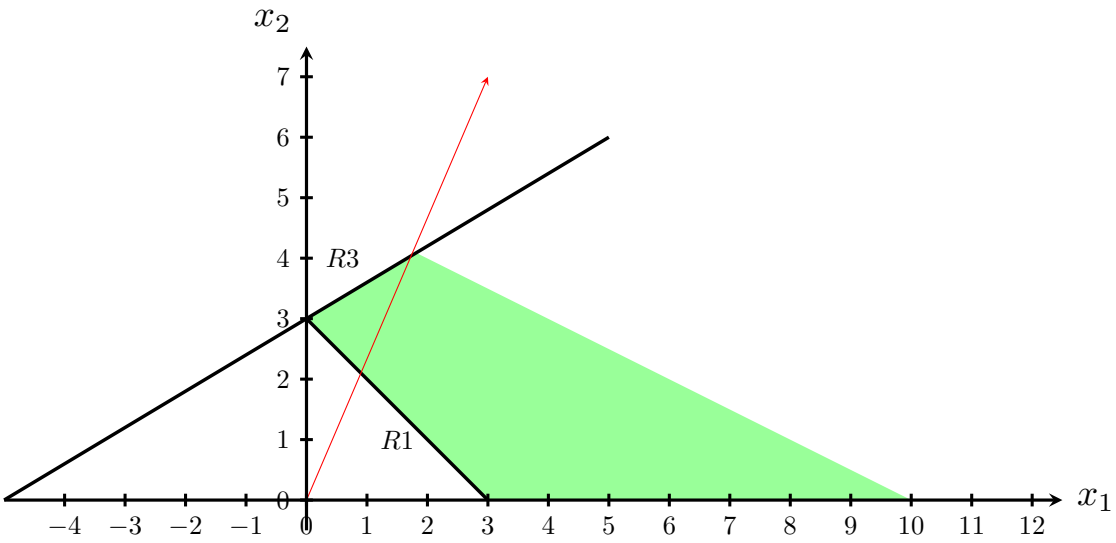
(I) Para obtener la solución óptima se acepta con método simplex o de manera gráfica. (1 pto por realizar bien el método elegido)

Gráficamente, el problema se ve de la siguiente forma:



La solución óptima se da en la intersección de las restricciones 2 y 3, en el punto $x_1 = \frac{20}{11}$ y $x_2 = \frac{45}{11}$ (0.5 ptos) lo que da un valor óptimo de $34,09$.(0.5 ptos)

(II) Al eliminar la segunda restricción el dominio se vuelve no acotado. Como la función objetivo mejora en la dirección de no acotamiento, el problema se vuelve no acotado. Esto se observa en el siguiente gráfico. (1.5 ptos)

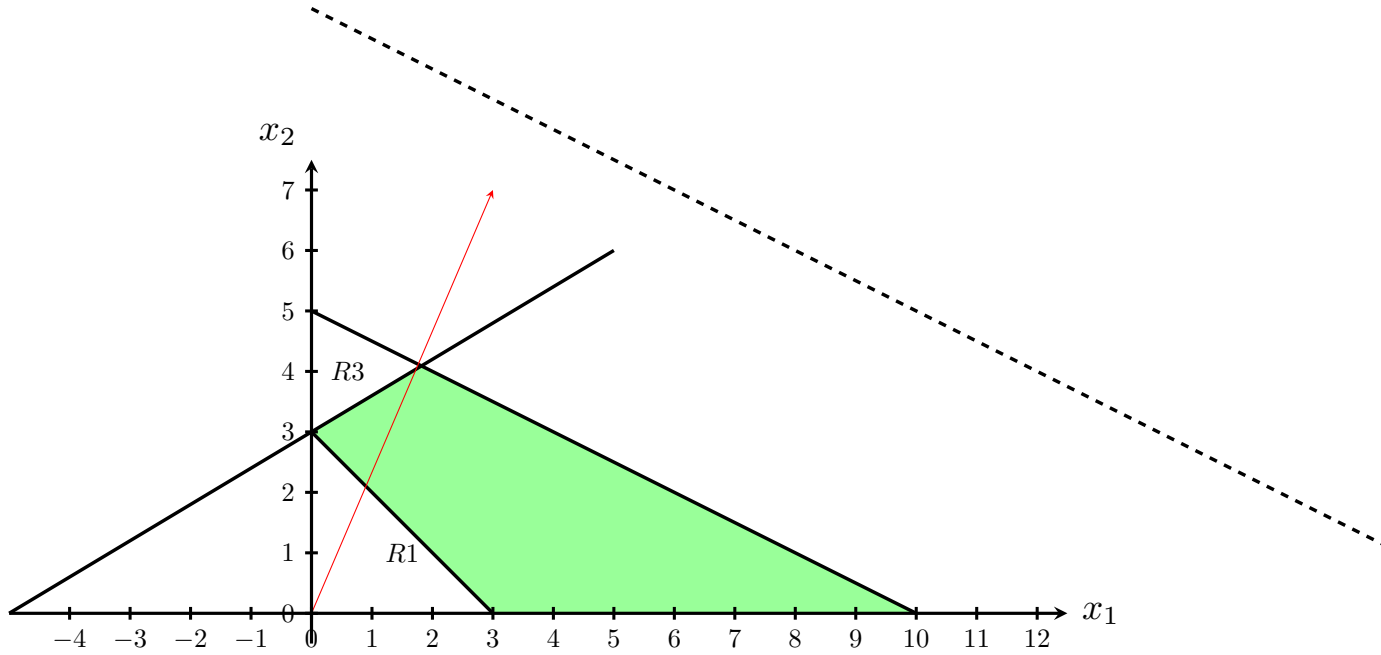


En el algoritmo simplex esto se ve reflejado en el criterio de salida donde no se puede elegir la variable que sale de la base. (1.5 ptos)

(III) Una solución degenerada gráficamente se ve como un punto en el que pasan más restricciones de las necesarias. Para que la solución actual sea degenerada, deben pasar más de 2 restricciones por ese punto. Dado que la restricción 3 ya es activa, no hay forma de que un valor de b_3 provoque una solución degenerada.

(IV) En primer lugar se debe notar que la restricción 2 está activa en el punto óptimo, por lo que si se mueve la restricción va a cambiar el valor óptimo.

Gráficamente, el aumentar en 20 unidades el lado derecho de la segunda restricción se ve así:



El nuevo punto óptimo se da en la intersección de la restricción 3 y la 2 (punteada). En este punto $x_1 = \frac{70}{11}$, $x_2 = \frac{75}{11}$ y el valor óptimo es 66.8.

Lo máximo que se está dispuesto a pagar por aumentar a 20 el lado derecho de la segunda restricción es la diferencia entre el valor óptimo original y el nuevo valor al cambiar b_2.

$$MaxPagar = 66.8 - 34.09 = 32.71$$

(V) Se puede calcular de manera gráfica o a través de simplex.

Método gráfico: Para que hayan múltiples soluciones, el gradiente de la función objetivo debe calzar con el gradiente de alguna de las restricciones que pasan por ese punto. Esto implica que al evaluar puntos de la recta en la función objetivo todos van a tomar el mismo valor.

- ◇ Restricción 2 es óptima: Al evaluar la función objetivo en 2 puntos de la recta esta debe tomar el mismo valor. Tomamos los puntos $(\frac{20}{11}, \frac{45}{11})$ y $(10, 0)$.

$$R2 : \frac{20}{11} \cdot 3 + c_2 \cdot \frac{45}{11} = 3 \cdot 10 + 0 \cdot c_2$$

$$c_2 = 6$$

Ahora, se debe verificar que el punto actual siga siendo óptimo. Para esto se puede evaluar el valor del resto de los vértices en la F.O. Se observa que la recta de la restricción es óptima. Por lo tanto, para que hayan múltiples soluciones $c_2 = 6$.

- ◇ Restricción 3 es óptima: Al evaluar la función objetivo en 2 puntos de la recta esta debe tomar el mismo valor. Tomamos los puntos $(\frac{20}{11}, \frac{45}{11})$ y $(0, 3)$.

$$R3 : \frac{20}{11} \cdot 3 + c_2 \cdot \frac{45}{11} = 3 \cdot 0 + c_2 \cdot 3$$

$$c_2 = -5$$

Ahora, se debe verificar que el punto actual siga siendo óptimo. Para esto se puede evaluar el valor del resto de los vértices en la F.O. Se observa que el punto óptimo ahora es el vértice (10,0). Por

lo tanto, $c_2 = -5$ no es válido para lo que se pide en el enunciado.

Método simplex: Para que hayan múltiples soluciones en los costos reducidos debe haber al menos uno con valor igual a 0. Para esto escribimos el problema en forma estándar y formamos las matrices de simplex:

$$\text{mín } -3x - 7y$$

$$x + y - h_1 = 3 \tag{1}$$
$$x + 2y + h_2 = 10 \tag{2}$$
$$-3x + 5y + h_3 = 15 \tag{3}$$
$$x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0 \tag{4}$$

Las variables básicas son $\{x, y, h_1\}$ y las no básicas $\{h_2, h_3\}$. Con esto formamos las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5/11 & -2/11 \\ 0 & 3/11 & 1/11 \\ -1 & 8/11 & -1/11 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -3 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se calculan los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/11 & -2/11 \\ 3/11 & 1/11 \\ 8/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} \frac{15+3c_2}{11} & \frac{c_2-6}{11} \end{bmatrix}$$

Para que hayan múltiples soluciones puede pasar que:

- $\frac{15+3c_2}{11} = 0$ y $\frac{c_2-6}{11} \geq 0$. Esto implica que $c_2 = -5$ y $c_2 \geq 6$. Hay una contradicción, por lo que este caso no es válido.
- $\frac{15+3c_2}{11} \geq 0$ y $\frac{c_2-6}{11} = 0$. Esto implica que $c_2 = 6$ y $c_2 \geq -5$. Es decir, para que hayan múltiples soluciones $c_2 = 6$

(VI) Al agregar una nueva variable el problema queda de la siguiente forma:

$$\text{mín } -3x - 7y + c_3 \cdot z$$

$$x + y + z - h_1 = 3 \tag{1}$$
$$x + 2y + 2z + h_2 = 10 \tag{2}$$
$$-3x + 5y + z + h_3 = 15 \tag{3}$$
$$x, y, z, h_1, h_2, h_3 \geq 0 \tag{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5/11 & -2/11 \\ 0 & 3/11 & 1/11 \\ -1 & 8/11 & -1/11 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Para ver los casos pedidos escribimos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/11 & -2/11 & 8/11 \\ 3/11 & 1/11 & 7/11 \\ 8/11 & -1/11 & 4/11 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -36/11 & -1/11 & -73/11 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 36/11 & 1/11 & c_3 + 73/11 \end{bmatrix}$$

1) Solución óptima única: Para esto los costos reducidos deben ser estrictamente mayor a 0. Esto se da cuando:

$$c_3 + \frac{73}{11} > 0$$
$$c_3 > -\frac{73}{11}$$

2) Múltiples soluciones: Para esto al menos uno de los costos reducidos debe ser igual a 0. Esto se da cuando:

$$c_3 + \frac{73}{11} = 0$$
$$c_3 = -\frac{73}{11}$$

3) Cambie la solución óptima: Para esto al menos uno de los costos reducidos debe ser menor a 0. Esto se da cuando:

$$c_3 + \frac{73}{11} < 0$$
$$c_3 < -\frac{73}{11}$$

Problema 2. Dualidad (22 puntos)

(a) Un agricultor es propietario de 500 Ha. de tierras, adecuadas para cultivar trigo, avena o centeno. Por cada hectárea que cultive, necesita la mano de obra, incurre en los costes y obtiene los beneficios que se indican en la siguiente tabla:

Cosecha	Horas-hombre	Coste	Beneficio
Trigo	6	100.000	60.000
Avena	8	150.000	100.000
Centeno	10	120.000	80.000

Si el agricultor dispone de mano de obra capaz de proporcionar 5000 horas-hombre en el periodo de cultivo, y de 60.000.000 CLP para gastos de cultivo, se pide que:

(I) (2 puntos) Encuentre las superficies de cultivo que maximicen los beneficios del agricultor.

(II) (3 puntos) Plantee el problema dual y obtenga su solución óptima sin desarrollar el algoritmo simplex.

(III) (2 puntos) Si el agricultor pudiese contratar 500 horas-hombre de trabajo adicional por 1.500.000 CLP, ¿le interesaría hacerlo?

(IV) (3 puntos) Sin resolver nuevamente el problema, determine en cuánto cambia la solución y valor óptimo si se cuenta con 6.000.000 CLP adicionales para gastos de cultivo.

(b) (6 puntos) Se tiene un problema primal de la forma $\max c^T x$ s.a. $Ax \leq b$ y su problema dual asociado. Suponiendo que el problema primal admite solución óptima, demuestre que al menos uno de los dos dominios (dual o primal) es no acotado.

(c) (6 puntos) Demuestre que si un problema es no acotado, se genera infactibilidad en el problema dual. Determine un certificado de dicha infactiblidad basándose en condiciones de no acotamiento primal.

Solución Problema 2.

(a) (I) El problema que describe la situación es:

$$\max 60.000x + 100.000y + 80.000z$$

$$x + y + z \leq 500$$

$$6x + 8y + 10z \leq 5000$$

$$100.000x + 150.000y + 120.000z \leq 60.000.000$$

$$x, y, z \geq 0$$

Para solucionarlo utilizamos simplex. El problema en forma estándar es:

$$\min -60.000x - 100.000y - 80.000z$$

$$x + y + z + h_1 = 500$$

$$6x + 8y + 10z + h_2 = 5000$$

$$100.000x + 150.000y + 120.000z + h_3 = 60.000.000$$

$$x, y, z, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

Para desarrollar el algoritmo podemos usar un punto inicial por inspección o mediante Fase 1. Iniciaremos en el punto (0,0,0) donde no se cultiva nada. Aquí las variables básicas son $\{h_1, h_2, h_3\}$ y las no básicas $\{x, y, z\}$.

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 10 \\ 100.000 & 150.000 & 120.000 \end{bmatrix} \qquad b = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 500 \\ 5000 \\ 60.000.000 \end{bmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} -60.000 & -100.000 & -80.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 10 \\ 100.000 & 150.000 & 120.000 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} -60.000 & -100.000 & -80.000 \end{bmatrix}$$

Entra a la base la variable y. Luego, determinamos el criterio de salida:

$$\min_{u>0} \frac{b}{u} = \{\frac{500}{1}, \frac{5000}{8}, \frac{60.000.000}{150.000}\} = \{500, 625, 400\}$$

La variable que sale de la base es h_3. Ahora realizamos la segunda iteración donde las variables básicas son $\{h_1, h_2, y\}$ y las no básicas $\{x, h_3, z\}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 150.000 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/150.000 \\ 0 & 1 & -1/18.750 \\ 0 & 0 & 1/150.000 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 10 \\ 100.000 & 1 & 120.000 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/150.000 & 1/5 \\ 2/3 & -1/18.750 & 18/5 \\ 2/3 & 1/150.000 & 4/5 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 100 \\ 1800 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} -60.000 & 0 & -80.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -100.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/150.000 & 1/5 \\ 2/3 & -1/18.750 & 18/5 \\ 2/3 & 1/150.000 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} \frac{20.000}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales a 0, estamos en el óptimo. La solución óptima se da cuando $x = 0$, $y = 400$ y $z = 0$ con lo que se tiene un valor óptimo de 40.000.000.

(II) El problema dual es (1 punto):

$$\min 500p_1 + 5000p_2 + 60.000.000p_3$$

$$p_1 + 6p_2 + 100.000p_3 \geq 60.000$$

$$p_1 + 8p_2 + 150.000p_3 \geq 100.000$$

$$p_1 + 10p_2 + 120.000p_3 \geq 80.000$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Para obtener la solución óptima utilizamos el Teorema de Holguras Complementarias (2 puntos).

$$(x + y + z - 500) \cdot p_1 = 0$$

$$(6x + 8y + 10z - 5000) \cdot p_2 = 0$$

$$(100.000x + 150.000y + 120.000z - 60.000.000) \cdot p_3 = 0$$

$$(p_1 + 6p_2 + 100.000p_3 - 60.000) \cdot x = 0$$

$$(p_1 + 8p_2 + 150.000p_3 - 100.000) \cdot y = 0$$

$$(p_1 + 10p_2 + 120.000p_3 - 80.000) \cdot z = 0$$

Como $y \neq 0$ y las restricciones 1 y 2 del problema primal están inactivas, utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$(x + y + z - 500) \cdot p_1 = 0$$
$$(6x + 8y + 10z - 5000) \cdot p_2 = 0$$
$$(p_1 + 8p_2 + 150.000p_3 - 100.000) \cdot y = 0$$

Así, $p_1 = p_2 = 0$ y $p_3 = \frac{10}{15}$.

(III) No es conveniente hacerlo dado que la restricción relacionada a las horas hombre no está activa en el problema primal.

(IV) Esto implica que el lado derecho de la restricción asociada a gastos de cultivo aumenta a 66.000.000. En primer lugar, verificamos que el aumento en el lado derecho no cambia la solución óptima. Para esto verificamos que el punto óptimo siga siendo factible:

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/150.000 \\ 0 & 1 & -1/18.750 \\ 0 & 0 & 1/150.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 5000 \\ 66.000.000 \end{bmatrix} \geq 0$$
$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 60 \\ 1480 \\ 440 \end{bmatrix}$$

Como se cumple la factibilidad, el cambio en el lado derecho no altera la configuración óptima. Ahora utilizamos el precio sombra para ver cuánto varía la F.O al hacer este cambio. Como el cambio es en la restricción 3, está asociada a la variable p_3 del problema dual.

$$\Delta F.O = p_3 \cdot \Delta b_3$$
$$\Delta F.O = \frac{10}{15} \cdot 6.000.000$$
$$\Delta F.O = 4.000.000$$

(b) Sea

$$\text{máx}\, c^T x$$
$$Ax \leq b$$

el problema primal y sea

$$\text{mín}\, b^T y$$
$$A^T y = c$$
$$y \geq 0$$

el problema dual asociado. Por enunciado sabemos que los problemas admiten solución óptima y por lo tanto ambos son problemas factibles.

Supongamos que el dominio del problema primal es acotado, es decir, $Ax \leq b$ es acotado. Que el dominio sea acotado, implica que $\forall i$ los siguientes dos problemas son acotados:

$$\text{máx}\, x_i = v_i < \infty$$
$$Ax \leq b$$
$$\text{máx} -x_i = v_i < \infty$$

$$Ax \leq b$$

Al ser acotados, implica que ambos duales respectivos son factibles. Es decir:

$$\exists \lambda^{'} \quad t.q. \quad \lambda^{'} A = e_i \quad con \quad \lambda^{'} \geq 0$$

$$\exists \lambda^{''} \quad t.q. \quad \lambda^{''} A = -e_i \quad con \quad \lambda^{''} \geq 0$$

Si tomamos un $h = \lambda^{'} + \lambda^{''}$ implica que $h \geq 0$ y

$$hA^T = \lambda^{'T} A + \lambda^{''T} A = e_i - e_i = 0$$

Esto implica que existe un vector h con $h \geq 0$ que cumple $h^T A = 0$. Es decir, h es un rayo de escape del poliedro dual.

En resumen, cuando el problema primal tiene un dominio acotado y el dominio dual es factible, $\exists \overline{\lambda} \quad t.q. \quad \overline{\lambda}^T A = c, \overline{\lambda} \geq 0 \Longrightarrow \exists \widehat{\lambda} = \overline{\lambda} + th$ lo que implica que el dominio dual es no acotado.

Por simetría se puede demostrar que si el dual es acotado el primal tiene un rayo de escape.

(c) Sea

$$\text{máx}\, c^T x$$
$$Ax \leq b$$

el problema primal y sea

$$\text{mín}\, b^T y$$
$$A^T y = c$$
$$y \geq 0$$

el problema dual asociado.

Si el problema primal es no acotado se cumple que $\exists h \neq 0$ t.q. $Ah \leq 0$ y $c^T h > 0$

Supongamos que el problema dual es factible. Por lo tanto, $\exists y$ factible en el dual. Si tomamos las restrciciones del problema dual se cumple que:

$$y^T A = c$$
$$y^T Ah = c^T h$$

De lo mencionado anteriormente sabemos que $y \geq 0$ y $Ah \leq 0$ por lo que $y^T Ah \leq 0$. Por otro lado, sabemos que $c^T h > 0$, por lo que en la ecuación $y^T Ah = c^T h$ se genera una contradicción. Así queda demostrado que si el problema primal es no acotado, su dual debe ser infactible.

Problema 3. Programación Entera (18 puntos)

(a) (2 puntos) Sea P) un problema lineal de optimización cuyo dominio relajado es igual a su envoltura convexa. Si la relajación lineal de P) tiene múltiples soluciones óptimas, entonces P) tiene al menos dos soluciones óptimas. ¿Verdadero o Falso? Justifique.

(b) Indique cuál de estos conjuntos posee una matriz TU. Justifique su respuesta.

(I) (2 puntos) $\{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\}$

(II) (2 puntos) $\{x \in \mathbb{R}^3_+ : 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3\}$

(III) (2 puntos) $\{x \in \mathbb{R}^3_+ : -x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, x_1 + x_2 \geq 1, x_2 - x_3 \geq 3\}$

(c) Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \text{máx}\, x + 3y$$
$$x + 2y \leq 9$$
$$-x + 4y \leq 14$$
$$2x + y \leq 11$$
$$x, y \in \mathbb{Z}^+_0$$

(I) (3 puntos) Plantee el problema dual de la relajación lineal de P).

(II) (3 puntos) Explique por qué el valor óptimo del problema planteado en (I) es una cota válida para el valor óptimo al problema entero P).¿Por qué eventualmente pueden no coincidir?.

(III) (4 puntos) Formule el problema que describe la envoltura convexa de P).

Solución Problema 3.

(a) Verdadero. Si el dominio relajado es igual a la envoltura convexa, entonces los vértices son puntos enteros. Si el problema tiene múltiples soluciones óptimas estas están en el borde del dominio, por lo que necesariamente la solución es una combinación convexa de al menos 2 soluciones del dominio original.

(b) Para justificar se debe obtener los subdeterminantes de la matriz que describe el conjunto. Estos sub determinantes deben ser todos iguales a 1, -1 o 0.

(I) La matriz que describe este conjunto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al calcular los sub determinantes todos dan 1, -1 o 0 por lo que el conjunto posee una matriz TU.

(II) La matriz que describe este conjunto es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Al calcular los sub determinantes se ve que el de la esquina inferior derecha da un valor de 2, por lo que el conjunto no posee una matriz TU.

(III) La matriz que describe este conjunto es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Al calcular los sub determinantes se ve que el de la esquina superior izquierda da un valor de -2, por lo que el conjunto no posee una matriz TU.

(c) (I) La relajación lineal de P) es (1 punto):

$$\text{máx}\, x + 3y$$

$$x + 2y \leq 9$$

$$-x + 4y \leq 14$$

$$2x + y \leq 11$$

$$x, y \geq 0$$

Su problema dual asociado es (2 puntos):

$$\text{mín}\, 9p + 14q + 11r$$

$$p - q + 2r \geq 1$$

$$2p + 4q + r \geq 3$$

$$p, q, r \geq 0$$

(II) El problema entero P) tiene un valor óptimo menor o igual al problema relajado P), esto debido a que el dominio relajado incluye tanto los puntos enteros del problema entero como los puntos continuos. Por lo que si P es el valor óptimo del problema entero y PR el valor óptimo del problema relajado de P), se cumple que:

$$P \leq PR$$

Además, por el teorema débil de dualidad el problema de minimización (en este caso dual) es una cota superior para el problema de maximización (primal), es decir, si PR es el valor óptimo del primal relajado y DR el valor óptimo del dual relajado, se cumple que:

$$PR \leq DR$$

Juntando ambas relaciones, se cumple que:

$$P \leq PR \leq DR$$

Por lo que el valor óptimo del dual relajado es una cota superior válida para el problema entero P). Si el dominio del problema entero no es igual a su envoltura convexa, entonces el óptimo se puede encontrar en un punto fraccionario, por lo que el valor óptimo será mayor al problema entero.

(III) El problema que describe la envoltura convexa de P) es (1 punto por restricción, 0.5 puntos por F.O y 0.5 puntos por N.V):

$$\text{máx}\, x + 3y$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \leq 5$$

$$y \leq 3$$

$$x, y \geq 0$$