PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2012
Profesores: P. Álvarez - A. Cataldo - R.Giesen
A. Lüer - V. Valdebenito

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d), e) y f)****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**4 puntos**) Usando nociones de convexidad, muestre que el siguiente problema de programación lineal, tiene infinitas soluciones óptimas.

$$\begin{array}{rcrcl} \text{Min z} & = & 6x+4y & & \\ s.a & : & 3x+2y & \geq & 6 \\ & & 4x+y & \leq & 8 \\ & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Respuesta: Podemos responder el problema de dos formas alternativas:

Alternativa 1: Se puede mostrar que los puntos extremos de este problema son $u_1 = (0,3)$, $u_2 = (0,8)$ y $u_3 = (2,0)$, teniendo que $z(u_1) = 12$, $z(u_2) = 32$ y $z(u_3) = 12$. Así, u_1 y u_3 son soluciones óptimas para el problema propuesto. La Figura 1 muestra la región factible del problema y los puntos extremos del mismo.

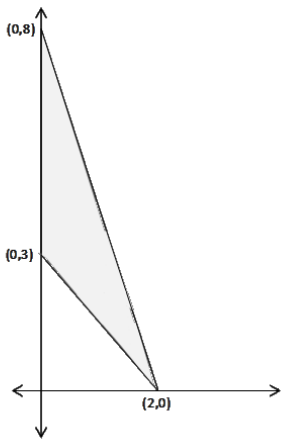


Figura 1: Esquema asociado a la solución de la Pregunta 1-a).

Ahora, definiendo u como un punto cualquiera en el segmento que une u_1 y u_3 se tiene:

$$u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_3 \qquad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

así,

$$\begin{aligned} z(u) &= \lambda z(u_1) + (1-\lambda) z(u_3) \\ &= 12\lambda + 12(1-\lambda) \\ &= 12 \end{aligned}$$

por lo que cada punto en el segmento que une u_1 y u_3 es solución óptima del problema, luego, el problema posee infinitas soluciones óptimas.

Alternativa 2: La primera restricción junto con las de no negatividad da una cota inferior a la función objetivo de 12. De esto se deduce que los puntos (2,0) y (0,3), que tiene valor 12 en su evaluación en la función objetivo, deben ser soluciones óptimas del problema. Como el problema es lineal, el dominio es convexo, por lo que toda combinación lineal convexa de estos puntos entregará un mismo valor de la función objetivo. Por lo tanto, el problema tiene múltiples soluciones que son las que se encuentran en el segmento que une los puntos (2,0) y (0,3).

b) (**4 puntos**) Se define como "problema de transporte" el que busca determinar la cantidad de producto a transportar desde diversos orígenes hacia diversos destinos, minimizando el costo total de transporte. El problema se puede representar según la Figura 2, donde se tienen m orígenes cada uno con una oferta a_i y n destinos cada uno con una demanda de b_j. El costo unitario de transporte entre cada origen y destino es c_{ij}.

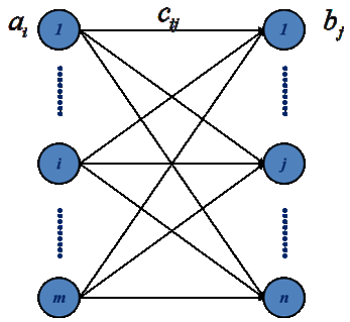


Figura 2: Esquema asociado a la Pregunta 1-b).

El problema indicado anteriormente, ¿es válido para modelar un "problema de asignación"(que busca generar parejas)? De serlo cómo lo haría. Justifique adecuadamente su respuesta.

Respuesta: El problema de asignación, también se puede modelar según la Figura 3, considerando que $m = n$ (dos conjuntos de la misma cardinalidad). Además se puede asumir que la "oferta" y "demanda"de cada origen o destino es unitaria. También se busca minimizar una medida de desempeño (costo, tiempo, etc.). Para que los modelos coincidan, se puede asumir como variable de decisión "la cantidad de producto a transportar desde cada origen a cada destino".

c) (**4 puntos**) Tres productos A, B, y C son producidos usando cuatro máquinas (1, 2, 3 y 4). Las secuencias y tiempos de producción $(a_1, a_3, a_4, b_1, b_2, b_4, c_1, c_3)$ son indicados en el siguiente esquema:

definiendo como x_{ij} al tiempo en que la producción del producto $i = \{A, B, C\}$ comienza a trabajar en la máquina $j = \{1, 2, 3, 4\}$, construya las restricciones asociadas a las siguientes situaciones:

i) (1 punto) Que los tiempos respeten la secuencia tecnológica requerida para el producto A.

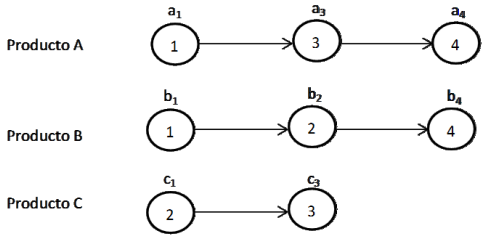


Figura 3: Esquema asociado a la Pregunta 1-c).

ii) (2 puntos) Que la máquina 1 no trabaja en más de un producto a la vez.

iii) (1 punto) Se requiere que el producto B sea producido a lo más d horas luego del comienzo de la producción.

RESPUESTA:

i) Esto queda:

$$\begin{aligned} x_{A1} + a_1 &\leq x_{A3} \\ x_{A3} + a_3 &\leq x_{A4} \end{aligned}$$

ii) Definimos la variable binaria γ_1 que toma valor 1 si el producto A ingresará a la máquina 1 antes que el producto B. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} x_{A1} + a_1 - x_{B1} &\leq M\gamma_1 \\ x_{B1} + b_1 - x_{A1} &\leq M(1-\gamma_1) \end{aligned}$$

donde M es un número positivo suficientemente grande.

iii) esto es:

$$x_{B4} + b_4 \leq d$$

d) (**4 puntos**) Pruebe que el conjunto definido por restricciones lineales, $S = \{x \in \mathcal{R}^n | Ax \leq b\}$ es convexo. Donde A es una matriz $m \times n$ y $b \in \mathcal{R}^m$. Además, dado dos vectores a y b, $a \leq b$ implica que cada elemento de a es menor o igual que el correspondiente elemento de b.

RESPUESTA: Suponga que $x, y \in S$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces debemos mostrar que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$. Dado que $x \in S$, entonces $Ax \leq b$, y como $y \in S$ también se tiene que $Ay \leq b$. Luego,

$$\begin{aligned} Az &= A(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &= \lambda Ax + (1-\lambda)Ay &&\leq \lambda b + (1-\lambda)b \\ &&&\leq b(\lambda + (1-\lambda)) \\ &&&\leq b \end{aligned}$$

Así, $Az \leq b$, y por lo tanto, $z \in S$. Entonces, dado que $x, y \in S$ y $\lambda \in [0,1]$ son valores arbitrarios, podemos concluir que S es convexo.

e) (**4 puntos**) Sea el siguiente problema de optimización,

$$\left(\begin{array}{ll} \text{mín} & e^{\left(x^2-2\right)+(y-3)^3} \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & x^2 + 4y^2 \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

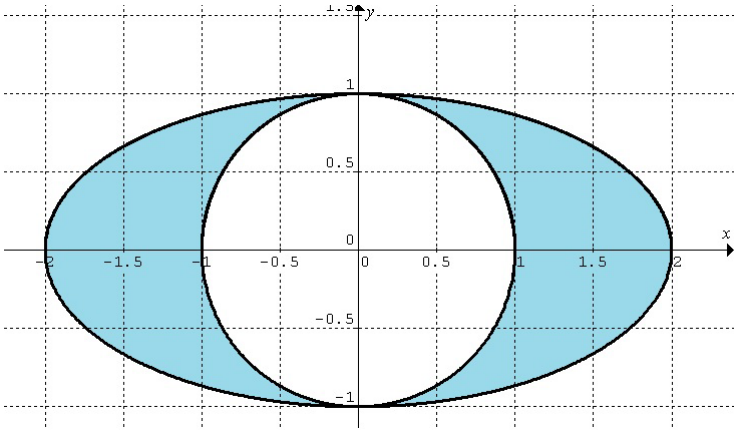


Figura 4: Dominio factible del problema 1-e).

Verifique si se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano-Weierstrass.

RESPUESTA: Verificando las condiciones:

- ◇ La función en continua, por ser una exponencial de argumento real.
- ◇ El dominio es compacto, porque
  - El dominio es cerrado, al ser las desigualdades no son estrictas.
  - El dominio es acotado, ya que de la segunda restricción se deduce que $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$.
- ◇ El dominio es no vacío, ya que el punto $(2, 0)$ es factible.

Puede mostrarse también que el dominio es acotado y no vacío usando un gráfico como el de la Figura 4, pese a que no era parte de la materia evaluada.

Bono (6 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 6 puntos.

f) (**6 puntos**) Sea $C \subseteq \mathcal{R}^n$ un conjunto convexo. Sean $x_1 \in \text{env}(C)$ (envoltura) y $x_2 \in \text{int}(C)$ (interior). Demuestre que $\forall\, \lambda \in]0, 1[$ se tiene que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(C)$.

RESPUESTA: Sea $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Debemos probar que $\exists r > 0$ tal que $B(y, r) \subset C$. Como $x_2 \in \text{int}(C)$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_2, \epsilon) \subset C$. Como $x_1 \in \text{env}(C)$, $\forall\, \eta > 0$, $B(x_1, \eta) \cap C \neq 0$.

Definimos $z \in B(y, z)$ y veamos que $z \in C$. Para eso, escogemos dos puntos de C de los cuales z es combinación convexa. De la definición de x_1 sabemos que $\exists z_1 \in B(x_1, \eta) \cap C$, con $\|x_1 - z_1\| < \eta$. Definimos $z_2 = \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda}$. Debemos ver que $z_2 \in C$, para lo cual aseguraremos que $z_2 \in B(x_2, \epsilon) \subset C$:

$$\begin{aligned} \|z_2 - x_2\| &= \left\| \tfrac{z - \lambda z_1 - (1-\lambda) z_2}{1-\lambda} \right\| \\ &= \left\| \tfrac{z - \lambda z_1 + y + \lambda x_1}{1-\lambda} \right\| \\ &\leq \tfrac{\lambda}{1-\lambda} \|x_1 - z_1\| + \tfrac{\lambda}{1-\lambda} \|z - y\| \\ &\leq \tfrac{\lambda}{1-\lambda} \eta + \tfrac{\lambda}{1-\lambda} \|z - y\| < \epsilon \end{aligned}$$

donde imponemos la última desigualdad. Dado que η es cualquiera, podemos escoger $\eta = \frac{e - \|z - y\|}{\lambda}$ para concluir, reemplazando, que $\frac{r}{1-\lambda} < \epsilon$. Así, si escogemos $r < (1 - \lambda)\epsilon$ obtenemos que $z_2 \in B(x_2, \epsilon)$.

Así, finalmente tenemos dos puntos $z_1, z_2 \in C$ que es convexo. Por ende, $z \in C$ lo es. Dado que z es arbitrario concluimos que $B(y, r) \subset C$, por lo que $y \in \text{int}(C)$.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A

Considere el siguiente problema lineal de minimización, al cual llamaremos P):

$$
\begin{array}{rlrcll}
Z = \text{mín} & 4x_1 + 7x_2 - x_3 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 100 & (1) & \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} D \\
& 2x_1 + x_2 & \geq & 10 & (2) & \\
& f(x_1, x_2, x_3) & \leq & 0 & (3) & \\
& x_2 - x_3 & \geq & 7 & (4) & \\
& x_3 & \geq & 0 & (5) &
\end{array}
$$

donde se sabe que la función $f(x_1, x_2, x_3)$ es una función convexa construida de tal manera que $f(x_1, x_2, x_3) \leq 0$ contiene a un cuadrado de lado 8 cuyo centro de gravedad está en las coordenadas $(x_1 = 7, x_2 = 7, x_3 = 0)$.

a) (5 puntos) Demuestre que P) admite solución óptima.

b) (5 puntos) Muestre que el conjunto de soluciones óptimas de P), que llamaremos $\hat{X}$, es un conjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío.

Respuesta:

a) Para demostrar que P) admite solución óptima utilizaremos el teorema práctico de la programación lineal. Podemos utilizar este teorema ya que podemos reemplazar la condición (3) por las restricciones lineales asociadas al cuadrado contenido por ella. Estas condiciones son: $3 \leq x_1 \leq 11$, $3 \leq x_2 \leq 11$ y $-4 \leq x_3 \leq 4$. Luego, si el problema más restringido admite solución óptima, el problema original admitirá, mientras podamos asegurar que la función objetivo está acotada sin considerar el espacio descrito por (3).

   Entonces tenemos:

   - ◇ La función objetivo es un polinomio de primer orden, entonces es lineal, luego continua.
   - ◇ El espacio es cerrado pues las restricciones están construidas con desigualdades no estrictas.
   - ◇ Para verificar que D es no vacío probemos que el punto $(10, 10, 0) \in D$. Se puede ver directamente que cumple las restricciones (1), (2), (4) y (5). Para verificar que cumple (3) verificamos que el punto $(10, 10, 0)$ está contenido en el cuadrado cuyo centro de gravedad está en $(x_1 = 7, x_2 = 7, x_3 = 7)$ y cuyo lado vale 8. El espacio descrito por el cuadrado están definidos por: $3 \leq x_1 \leq 11$, $3 \leq x_2 \leq 11$ y $-4 \leq x_3 \leq 4$. Luego, el punto pertenece al cuadrado que sabemos está contenido en $f(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, entonces satisface esa restricción, y entonces pertenece a D.
   - ◇ Para verificar que la función objetivo está acotada tenemos que multiplicar por 2 la restricción (2) y sumarla a 5 veces la restricción (4) quedando:

     $$(4x_1 + 2x_2) + (5x_2 - 5x_3) \geq 20 + 35 \Leftrightarrow 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 \geq 55$$

     como $x_3 \geq 0$ sabemos que $4x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 \geq 55$. Luego, existe una constante que limita el valor mínimo que puede alcanzar la función objetivo, luego ésta está acotada, sin necesidad de utilizar (3).

Luego, como se cumplen todos las condiciones para demostrar existencia bajo el teorema práctico de la programación lineal, podemos decir que $\exists\, \hat{x} \in D$ que es solución óptima de P).

b) Veamos una a una las características solicitadas para $\hat{X}$:

- $\diamond$ $\hat{X}$ es no vacío. Se tiene de a) que $\exists\, \hat{x} \in D$ que es solución de P), luego $\hat{x} \in \hat{X}$, con lo que $\hat{X}$ es no vacío.
- $\diamond$ Se tiene que $\hat{X} = D \cap \{x | 4x_1 + 7x_2 - x_3 \leq 4\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 - \hat{x}_3\}$, donde tanto D (demostrado en la parte a)) como $\{x | 4x_1 + 7x_2 - x_3 \leq 4\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 - \hat{x}_3\}$ son convexos y cerrados, luego $\hat{X}$ construido como la intersección es convexo y cerrado.
- $\diamond$ De la construcción anterior se deduce directamente que $\hat{X} \subseteq D$, luego, como D es acotado, $\hat{X}$ también lo está.

Parte B

Sea el siguiente problema no lineal de optimización (PNL):

$$(PNL) \left(\begin{array}{lll} Z = \text{máx} & -\prod_{i=1}^{m} b_i \exp(d_i X_i) & (\alpha) \\ \text{s.a.} & \left| \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \right| \geq c_j,\ \forall j = 1, \ldots, n & (\beta) \\ & l_i \leq X_i \leq u_i,\ \forall i = 1, \ldots, m & (\gamma) \end{array} \right)$$

Con $b_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, m$, y donde se verifica que las instancias resueltas de este problema tienen al menos una respuesta posible.

Encuentre un problema lineal equivalente de (PNL), para esto determine,

a) (4 puntos) Una función objetivo lineal equivalente a (α).

b) (4 puntos) Un conjunto de restricciones lineales equivalentes[1] a (β).

c) (2 puntos) Utilice el teorema práctico de existencia de soluciones de la programación lineal para demostrar que el problema no lineal de optimización PNL admite solución óptima.

Hint: Recuerde como se expresa una desigualdad de la forma $|x| \geq p$, con $p > 0$.

Respuesta:

a) Los pasos necesarios son,

$$\begin{aligned} \text{máx} -\prod_{i=1}^{m} b_i \exp(d_i X_i) &\equiv \text{mín} \prod_{i=1}^{m} b_i \exp(d_i X_i) \qquad / \ln(\cdot) \\ &\equiv \text{mín} \sum_{i=1}^{m} \ln(b_i \exp(d_i X_i)) \\ &\equiv \text{mín} \sum_{i=1}^{m} \{\ln(b_i) + d_i X_i\} \\ &\equiv \text{mín} \sum_{i=1}^{m} d_i X_i \end{aligned}$$

[1] Sin los operadores de valor absoluto

b) Recordemos que $|x| \geq p,\ p > 0 \equiv \{x \geq p\} \vee \{x \leq -p\}$. Esto, para las restricciones (β) equivale a,

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \geq c_j\right\} \vee \left\{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \leq -c_j\right\},\ \forall j = 1, \ldots, n$$

Lo que no es lineal mixto, convencional, por lo que deben definirse las siguientes variables,

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \geq c_j \\ & \\ 0, & \text{si } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \leq -c_j \end{cases}, \ \forall j = 1, \ldots, n$$

La versión lineal mixta equivalente utiliza estas variables, y corresponde a,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \geq c_j Y_j - M\left(1 - Y_j\right),\ \forall j = 1, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j \leq -c_j\left(1 - Y_j\right) + N \cdot Y_j,\ \forall j = 1, \ldots, n$$

Donde $M, N >> 1$ son números suficientemente grandes. Se puede comprobar que, para un $j' \in \{1, \ldots, n\}$,

$$Y_{j'} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij'} X_{j'} \geq c_{j'} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij'} X_{j'} \leq N \quad \text{redundante} \end{cases}$$

$$Y_{j'} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij'} X_{j'} \geq -M \quad \text{redundante} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij'} X_{j'} \leq -c_{j'} \end{cases}$$

c) En las partes a) y b) se ha demostrado que es posible escribir una formulación lineal continua equivalente al PNL. El teorema práctico requiere que el dominio sea no vacío, cerrado y que la función objetivo sea continua que posee una cota inferior a su valor. Claramente el dominio no es vacío, ya que, según el enunciado "las instancias resueltas de este problema tienen al menos una respuesta posible". En b) encontramos una expresión equivalente al sistema de ecuaciones que considera restricciones no estrictas, luego el espacio es cerrado. La función equivalente encontrada en a) es un polinomio de primer orden, luego continua. Por último, para encontrar una constante K, tal que $c^T x \geq K$, basta utilizar las cotas inferiores de las variables. En este caso, $K = \sum_{i=1}^{m} d_i l_i$.

En consecuencia, de acuerdo al teorema y la información del enunciado, el problema lineal equivalente admite solución óptima, luego, PNL admite.

Pregunta 3 (20 puntos)

Una compañía puede producir los mismos K productos ($k = 1, 2, \ldots, K$) en I plantas ($i = 1, 2, \ldots, I$). Cada planta cuenta con una capacidad máxima de producción que debe repartir entre los distintos productos (podría decidir no producir algunos de ellos). Las plantas están ubicadas en un plano en puntos con coordenadas (x_i, y_i), que luego son transportados a J bodegas regionales ($j = 1, 2, \ldots, J$), que abastecen a sus respectivos mercados de influencia. La compañía debe satisfacer la demanda por cada producto en cada mercado regional en T ($t = 1, 2, \ldots, T$) períodos sucesivos. Los productos no utilizados en un período se pueden almacenar sólo en las bodegas regionales, para satisfacer demanda de uno o más periodos sucesivos (en las plantas no es posible almacenar). Asuma que las bodegas regionales no tienen inventarios de períodos anteriores en $t = 1$. Los siguientes datos son conocidos:

- $\diamond$ v_{ikt} : Costo variable de producir una unidad del producto k en la planta i en el período t.
- $\diamond$ c_{ijk} : Costo de transporte por unidad de producto k transportado de la planta i a la región j.
- $\diamond$ h_{jk} : Costo de almacenamiento por unidad de un período a otro del producto k en la bodega regional j.
- $\diamond$ Q_{it} : Capacidad de la planta i en el período t, medida en horas equivalentes de producción (por ejemplo se dispone de 15.000 horas equivalentes de producción al mes).
- $\diamond$ q_{ikt} : Número de horas equivalentes de producción que se requieren para producir una unidad del producto k en la planta i en el período t.
- $\diamond$ U_j : Capacidad de almacenaje, medido como volumen, de la bodega regional j (por ejemplo 10.000 metros cúbicos).
- $\diamond$ u_k : Volumen utilizado por cada unidad del producto k.
- $\diamond$ d_{jkt} : Demanda del producto k en el región j en el período t.

1) (10 puntos) Formule el problema de optimización que minimiza el costo total de producción, transporte y almacenamiento para el horizonte temporal $[1, T]$. Defina claramente sus variables de decisión, restricciones y función objetivo.

2) (6 puntos) Asuma ahora que el costo de producción tiene dos componentes: un costo fijo por producir unidades de un cierto tipo (sólo se paga si se produce al menos una unidad) y un costo variable asociado al número de unidades producidas. Así, considere los siguientes parámetros adicionales:

   - $\diamond$ f_{ikt} : Costo fijo asociado a producir el producto k en la planta i en el período t.
   - $\diamond$ m_{ik} : Cantidad mínima del producto k que se debe producir en la planta i, si esta planta produce dicho producto en un período (es decir, o no se produce el producto, o se produce al menos m_{ik} unidades).
   - $\diamond$ M_{ik} : Cantidad máxima del producto k que se puede producir en la planta i en un período.

   En este nuevo escenario, formule el problema de optimización entera que minimiza el costo total de producción, transporte y almacenamiento para el horizonte temporal $[1, T]$. En su respuesta escriba sólo lo que cambia respecto al modelo que propuso en 1).

3) (4 puntos) Indique cómo incorporar las siguientes restricciones al problema:

i) En cada período, el producto k puede producirse como máximo en I^k_{max} plantas.

ii) En el horizonte $[1, T]$ ninguna planta puede producir más de K_{max} productos distintos.

iii) En cada período, cada región debe ser abastecida desde a lo más dos plantas de producción.

Respuesta:

1) La respuesta consta de,

◇ Variables de decisión

- X_{ikt} : cantidad producida del producto $k \in 1, \ldots, K$ en la planta $i \in 1, \ldots, I$ en el periodo $t \in 1, \ldots, T$.
- Y_{ijkt}: cantidad transportada del producto $k \in 1, \ldots, K$ de la planta $i \in 1, \ldots, I$ a la bodega regional $j \in 1, \ldots, J$ en el periodo $t \in 1, \ldots, T$.
- Z_{jkt}: cantidad de inventario almacenado del producto $k \in 1, \ldots K$ en la bodega regional $j \in 1, \ldots, J$ del período t al $t+1$, $t \in 1, \ldots, T-1$.

◇ Función objetivo

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{I} v_{ikt}X_{ikt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} c_{ijk}Y_{ijkt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} h_{jk}Z_{jkt}$$

◇ Restricciones

- Capacidad de las plantas.

$$\sum_{k=1}^{K} q_{ikt}X_{ikt} \leq Q_{it},\ \forall i = 1, \ldots, I;\ t = 1, \ldots, T$$

- Capacidad de almacenaje en las bodegas regionales.

$$\sum_{k=1}^{K} u_k Z_{jkt} \leq U_j,\ \forall j = 1, \ldots, J;\ t = 1, \ldots, T$$

- Continuidad de flujos (inventarios) en las plantas de producción.

$$X_{ikt} = \sum_{j=1}^{J} Y_{ijkt},\ \forall i = 1, \ldots, I;\ k = 1, \ldots, K;\ t = 1, \ldots, T$$

- Continuidad de flujos (inventarios) y satisfacción de demanda en las bodegas regionales.

$$Z_{jkt} + \sum_{i=1}^{I} Y_{ijkt} = d_{jkt} + Z_{jkt},\ \forall j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K;\ t = 1, \ldots, T$$

- Naturaleza de las variables.

$$X_{ikt} \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, I;\ k = 1, \ldots, K;\ t = 1, \ldots, T$$
$$Y_{ijkt} \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K;\ t = 1, \ldots, T$$
$$Z_{jkt} \geq 0,\ \forall j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K;\ t = 1, \ldots, T$$

2) Los cambios son:

- Variables de decisión adicionales,

◇ $W_{ikt} = \begin{cases} 1, & \text{si se produce el producto } k \in 1,\ldots,K \text{ en la planta } i \in 1,\ldots,I \\ & \text{en el periodo } t = 1,\ldots,T \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$

- Nueva función objetivo

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{I}(f_{ikt}W_{ikt} + v_{ikt}X_{ikt}) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} c_{ijk}Y_{ijkt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} h_{jk}Z_{jkt}$$

- Restricciones adicionales,

◇ Producciones mínimas y máximas para cada producto en cada planta en todos los períodos.

$$m_{ik}W_{ikt} \leq X_{ikt} \leq M_{ik}W_{ikt},\ \forall i = 1,\ldots,I;\ k = 1,\ldots,K;\ t = 1,\ldots,T$$

◇ Naturaleza de las variables adicionales,

$$W_{ikt} \in \{0,1\},\ \forall i = 1,\ldots,I;\ k = 1,\ldots,K;\ t = 1,\ldots,T$$

3 Para cada caso,

(I) En esto,

$$\sum_{i=1}^{I} W_{ikt} \leq I^{k}_{max},\ \forall k = 1,\ldots,K;\ t = 1,\ldots,T$$

(II) Ahora,

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} W_{ikt} \leq K_{max},\ \forall i = 1,\ldots,I$$

(III) Deben crearse las siguientes variables adicionales,

$$R_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{si se transporta cualquier producto desde la planta } i \in 1,\ldots,I \\ & \text{a la bodega regional } j \in 1,\ldots,J \text{ en el periodo } t \in 1,\ldots,T \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Además de agregarse un término de penalización en la función objetivo, de la forma,

$$\alpha\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} R_{ijt}$$

Y finalmente las siguientes restricciones,

$$\sum_{i=1}^{I} R_{ijt} \leq 2,\ \forall j = 1,\ldots,J;\ t = 1,\ldots,T$$

$$\sum_{k=1}^{K} Y_{ijkt} \leq A \cdot R_{ijt},\ \forall i = 1,\ldots,I;\ j = 1,\ldots,J;\ t = 1,\ldots,T$$

Donde A es un número suficientemente grande.