PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - M.Fuentes
J.Vera - A.Cataldo - D.Pozo

Tarea 2

Fecha de Entrega: 18 de Mayo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea debe ser desarrollada individualmente.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **nombre, sección**[1] **y número de alumno con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupo de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día Lunes 18 de Mayo a las 13:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaria del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a la sección a la que están inscritos.
- ◇ La copia o intento de copia será castigada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.

Problema 1. (13 puntos)

a) (2 puntos) Sea $CV(P)$ la envoltura convexa de un conjunto P de puntos discretos. Sea Q el conjunto de todos los poliedros convexos que contienen a todos los puntos de P. Definamos $CI(P) = \bigcap_{i:q_i \in Q} q_i$.

Muestre que

$$CV(P) = CI(P)$$

Hint: Asuma sabido que $CI(P)$ es convexo.

b) (4 puntos) En programación lineal, existen casos en que una coordenada o punto sobredeterminado en el espacio puede ser óptima en un problema de optimización, sin embargo, alguna de las bases asociadas a ese punto no cumpla el criterio de optimalidad de Simplex. Explique por qué ocurre este fenómeno.

c) (5 puntos) Sea (P) un problema de maximización y (D) el problema dual correspondiente. Sean:

- ◇ (x^*, z^*) la solución óptima y el valor óptimo de (P).
- ◇ (y^*, w^*) la solución óptima y el valor óptimo de (D).
- ◇ (x, z) una solución factible para (P) y su valor objetivo.
- ◇ (y, w) una solución factible para (D) y su valor objetivo.

Comente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

[1] La sección que deben escribir es aquella a la que están inscritos y no a la que asisten.

i) (1 punto) $z^* = w^*$.

ii) (1 punto) $z \geq w$.

iii) (1 punto) $z^* \leq w$ y $z \leq w^*$.

iv) (1 punto) (P) infactible $\rightarrow$ (D) infactible.

v) (1 punto) (P) no acotado $\rightarrow$ (D) no acotado.

d) (2 puntos) Sea A una matriz simétrica. Sea el siguiente PPL:

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ \text{s.a.} & Ax & \geq & c \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Muestre que si $\bar{x}$ satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es una solución óptima.

Solución Problema 1.

a) Podemos demostrarlo por doble contención. Es decir, $CV(P) \subseteq CI(P)$ y $CV(P) \supseteq CI(P)$.

Por una parte, dado que la envoltura convexa es un conjunto convexo que contiene a P, forma parte de de $CI(P)$, por lo que $CV(P) \subseteq CI(P)$.

Por otro lado, sabemos que la intersección de conjuntos convexos es siempre un conjunto convexo. Esto nos permite decir que $CI(P)$ es un conjunto convexo. Ahora, como contiene a P, está contenido en el menor conjunto convexo que contiene a P, que es $CV(P)$.

Como $CV(P) \subseteq CI(P)$ y $CV(P) \supseteq CI(P)$, entonces $CV(P) = CI(P)$.

b) Este fenómeno ocurre como consecuencia del teorema débil de Dualidad. Supongamos un caso de $\mathbb{R}^2$, en que tres restricciones definen un punto óptimo. Ese punto estará asociada a 3 bases, sin embargo, puede que alguna de ellas no sea óptima.

Esto ocurre dado que, en el problema dual, si bien las bases duales asociadas tendrán el mismo valor, no necesariamente serán las 3 bases factibles. Y por lo tanto, esa base dual infactible estará asociada a la base primal que está sin cumplir el criterio de optimalidad. Si la base fuera factible, obligatoriamente sería la óptima, esto ya por teorema fuerte.

c) i) Esto es el teorema fuerte de dualidad, y es verdadera sólo si (P) y (D) tienen solución óptima finita.

ii) Falso. El problema de maximización siempre está «por debajo» del problema de minimización, luego $z \leq w$, por teorema débil de dualidad.

iii) Esto es verdadero. Son casos particulares del Teorema Débil.

iv) Falso. Si (P) es infactible, (D) puede ser infactible o no acotado.

v) Falso. Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible. Esto es corolario del Teorema Débil de Dualidad.

d) Sea (D) el dual de (P):

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & c^T y & & \\ \text{s.a.} & Ay & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

y sea $\bar{y}$ tal que:

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= c \qquad / \cdot cA^{-1} \\ c\bar{y} &= cA^{-1}c \end{aligned}$$

Por enunciado, además:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= c \qquad / \cdot cA^{-1} \\ c\bar{x} &= cA^{-1}c \\ c\bar{x} &= c\bar{y} \end{aligned}$$

Como $\bar{y}$ es factible en (D), por dualidad débil se tiene que

$$c\bar{y} \leq cx \qquad \forall x \text{ factible en } (P)$$

$$c\bar{x} \leq cx \qquad \forall x \text{ factible en } (P)$$

Así, se tiene que $\bar{x}$ es óptimo de (P).

Problema 2. (15 puntos)

Sea el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & 45x_1 + 19x_2 + 8x_3 + 15x_4 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 3x_4 & \leq & -1 \\ & 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2, x_3 & \leq & 0 \\ & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a) (2 puntos) Resuelva el problema dual de (P). Fíjese que la dimensión de la matriz A de P) permite resolverlo de manera gráfica.

b) (2 puntos) ¿Cuál es la solución óptima del primal? Indique la base.

c) (2,5 puntos) ¿Cuánto puede variar c_2 (costo asociado a la variable primal x_2) con tal de que la base óptima encontrada en (b) no cambie? Haga su análisis utilizando los criterios de Simplex.

d) (2,5 puntos) Si tuviera ingresos ilimitados para alterar cualquiera de los recursos (b_1 y b_2) en máximo 20 unidades, pero sólo uno y siempre que la base actual se mantenga óptima, ¿cuál cambiaría y en cuánto? ¿Cuál sería el valor objetivo óptimo con su cambio?

e) (3 puntos) Sin considerar los cambios anteriores, en el problema primal se decide agregar una nueva variable x_5, tal que $R_{j5} = (0 \;\; 1)^T$, y $c_5 = 2$. ¿Qué ocurre con las bases óptimas en el primal y en el dual?

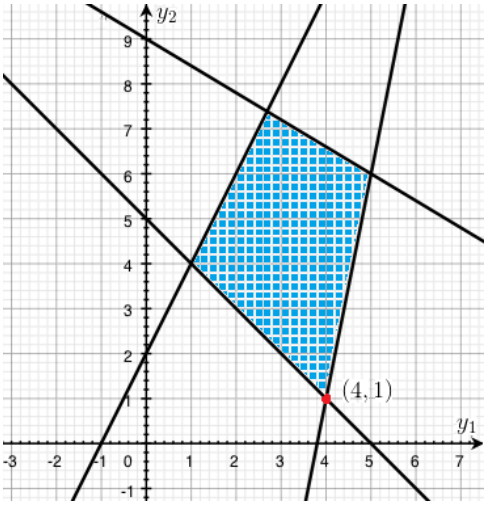
f) (3 puntos) Utilizando solamente Simplex **desde la base dual obtenida en (a)**, encuentre el nuevo óptimo del dual.

Solución Problema 2.

a) El problema dual es:

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & -y_1 + 3y_2 & & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + 5y_2 & \leq & 45 \\ & 5y_1 - y_2 & \leq & 19 \\ & -8y_1 + 4y_2 & \leq & 8 \\ & 3y_1 + 3y_2 & \geq & 15 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Esto, al ser de dos variables, es posible resolverlo de manera gráfica:



El óptimo se encuentra en el punto (4,1), otorgando un valor óptimo dual de $w^* = -1$.

b) Las ecuaciones del Teorema de Holgura Complementaria nos permitirán determinar los valores de las variables primales:

$$\begin{aligned}
(3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 1) \cdot y_1 &= 0 \quad (1)\\
(5x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 3) \cdot y_2 &= 0 \quad (2)\\
(3y_1 + 5y_2 - 45) \cdot x_1 &= 0 \quad (3)\\
(5y_1 - y_2 - 45) \cdot x_2 &= 0 \quad (4)\\
(-8y_1 + 4y_2 - 8) \cdot x_3 &= 0 \quad (5)\\
(3y_1 + 3y_2 - 15) \cdot x_4 &= 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

Como las variables duales son distintas de 0, y como las restricciones 1 y 3 están inactivas, las ecuaciones (1), (2), (3) y (5) nos aportan información útil. Así, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 3x_4 &= -1\\
5x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3\\
x_1 &= 0\\
x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo, determinamos que $x_2 = \frac{-2}{3}$ y $x_4 = \frac{7}{9}$.

Para determinar la base primal asociada a este punto, construimos la forma estándar:

$$\begin{aligned}
&\text{mín} && 45x_1' + 19x_2' + 8x_3' - 15x_4 && &\\
PE)\quad &\text{s.a.} && 3x_1' + 5x_2' - 8x_3' - 3x_4 - x_5 &= 1\\
& && -5x_1' + x_2' - 4x_3' + 3x_4 + x_6 &= 3\\
& && x_1', x_2', x_3', x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Así, podemos determinar los valores de las variables, y notar que la base está de la siguiente manera:

$$VB = \{x_2', x_4\} \quad VNB = \{x_1', x_3', x_5, x_6\}$$

c) Al alterar el costo c_2, podemos utilizar dos caminos para hacer este ejercicio. Verificar el criterio de optimalidad en el problema primal, o verificar el criterio de factibilidad en el problema dual. En este caso, realizaremos lo primero.

La matriz básica y su inversa son:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/18 & 5/18 \end{bmatrix}$$

Así, el criterio de optimalidad resulta ser:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 45 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_2 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/18 & 5/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{195}{9} + \frac{c_2}{3} \\ 2c_2 - 2 \\ \frac{c_2}{6} + \frac{15}{18} \\ \frac{-c_2}{6} + \frac{75}{18} \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{c} c_2 \geq -65 \\ c_2 \geq 1 \\ c_2 \geq -5 \\ c_2 \leq 25 \end{array}\right\} \rightarrow c_2 \in [1, 25]$$

Luego, c_2 debe estar en ese intervalo para que la base encontrada no cambie.

d) Es fácil determinar el valor de los precios sombra, dado que conocemos los valores de las variables duales.

$$\vec{y}^* = \vec{\pi}^* = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, es necesario el rango en el cuál estos valores corresponderán a ese precio sombra sin que cambie la base. Para ello, hacemos análisis de sensibilidad para cada b_j por separado.

- $\diamond$ b_1: Verificamos que se cumpla el criterio de factibilidad.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/18 & 5/18 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c} b_1 \leq 3 \\ b_1 \geq -15 \end{array}$$

  Así, determinamos que el límite de cuánto puede aumentar el valor de b_1 sin que cambie la base es en 4 unidades.

- $\diamond$ b_2: Verificamos que se cumpla el criterio de factibilidad.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/18 & 5/18 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c} b_2 \geq -1 \\ b_2 \geq \frac{1}{5} \end{array}$$

  Así, determinamos que el límite de cuánto puede aumentar el valor de b_2 sin que cambie la base es infinito. Luego, el límite para el problema lo indica la restricción del enunciado.

Ahora:

$$\delta z^* = \text{máx}\{\pi_1 \cdot \delta b_1, \pi_2 \cdot \delta b_2\} = \text{máx}\{4 \cdot 4, 1 \cdot 20\} = 20$$

Así, concluimos que ocupamos los ingresos en aumentar en 20 unidades el recurso de la segunda restricción, haciendo aumentar en 20 unidades la función objetivo: de –1 a 19.

e) Agregar una variable indica agregar una restricción en el problema dual. Esta restricción corresponde a $y_2 \geq 2$. Para ver qué ocurre con la solución en el dual, basta con evaluar el punto (4,1) en la restricción para ver si esa base sigue siendo factible.

La base en el dual determinada en (a) ya no es factible, y por lo tanto dejó de ser óptima. Por otro lado, dado que la base dual deja de ser factible, y el espacio de soluciones primal no se ha modificado, podemos concluir que la base primal determinada en (b) dejó de ser óptima.

f) Construyamos la forma estándar del problema dual considerando la nueva restricción:

$$
DE) \quad \begin{array}{lrcll} \text{mín} & & -y_1 + 3y_2 & & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + 5y_2 + y_3 & = & 45 & \\ & 5y_1 - y_2 + y_4 & = & 19 & \\ & -8y_1 + 4y_2 + y_5 & = & 8 & \\ & 3y_1 + 3y_2 - y_6 & = & 15 & \\ & y_2 - y_7 & = & 2 & \\ & y_j & \geq & 0 & \forall j = 1, \ldots, 7 \end{array}
$$

Así, la Fase I para el problema dual se construye agregando una variable auxiliar en la última restricción, dado que es la única restricción que no está cumpliendo la base determinada en (a).

$$
DI) \quad \begin{array}{lrcll} \text{mín} & & t & & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + 5y_2 + y_3 & = & 45 & \\ & 5y_1 - y_2 + y_4 & = & 19 & \\ & -8y_1 + 4y_2 + y_5 & = & 8 & \\ & 3y_1 + 3y_2 - y_6 & = & 15 & \\ & y_2 - y_7 + t & = & 2 & \\ & y_j & \geq & 0 & \forall j = 1, \ldots, 7 \\ & t & \geq & 0 & \end{array}
$$

Así, el tableau inicial queda:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	t	
3	5	1	0	0	0	0	0	45
5	−1	0	1	0	0	0	0	19
−8	4	0	0	1	0	0	0	8
3	3	0	0	0	−1	0	0	15
0	1	0	0	0	0	−1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	1	·

Analizando el punto (4,1), notamos que las variables y_1, y_2, y_3 e y_5 deben estar en la base. Además, y_7 no puede tomar la diferencia, porque sería infactible. Así, queda que la última variable básica será t, mientras que y_4, y_6, y_7 son no básicas. Como y_3, y_5 y t ya tienen vectores canónicos asociados, basta con pivotear las columnas de y_1 e y_2 para llegar a la forma canónica asociada a la base:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	t	
0	0	1	$1/3$	0	$14/9$	0	0	28
0	1	0	$-1/6$	0	$-1/18$	0	0	1
0	0	0	2	1	$2/3$	0	0	36
1	0	0	$1/6$	0	$-1/18$	0	0	4
0	0	0	$1/6$	0	$5/18$	−1	1	1
0	0	0	$-1/6$	0	$-5/18$	1	0	−1

Los costos reducidos no son todos negativos, y entra a la base la variable y_6 al ser la más negativa de las que invalidan el criterio. Luego, realizando el criterio del cuociente, sale la variable t. Pivoteando:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	t	
0	0	1	$-9/15$	0	0	$28/5$	$-28/5$	$112/5$
0	1	0	0	0	0	−1	1	2
0	0	0	$8/5$	1	0	$12/5$	$-12/5$	$168/5$
1	0	0	$1/5$	0	0	$-1/5$	$1/5$	$21/5$
0	0	0	$3/5$	0	1	$-18/5$	$18/5$	$18/5$
0	0	0	0	0	0	0	1	0

Luego, hemos llegado al óptimo de fase I. Como el valor objetivo en el óptimo es 0, la base final corresponde a una base factible del problema dual para poder analizar con Fase II.

Construyendo la fila de costos con los costos del problema dual original (el cuerpo se mantiene igual), y eliminando la columna de t:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z
-1	3	0	0	0	0	0	0

Pivoteando a la base:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z
0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{14}{5}$	$\frac{51}{5}$

Y luego, la base actual es la óptima, dado que todos los costos reducidos son no negativos. Luego, nos encontramos en la base óptima dual.

Problema 3. (17 puntos)

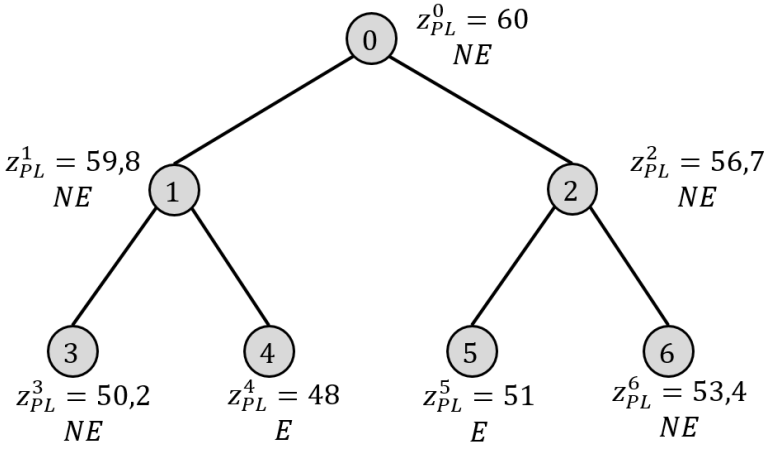
a) (8 puntos) Sea el siguiente problema de optimización (P):

$$
P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & \leq & 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_4 & \geq & 0 \\ & x_3 & \leq & 0 \end{array}
$$

i) (5 puntos) Encuentre la mejor solución entera, usando B&B, del problema dual de (P). Si debe escoger entre dos variables para ramificar, escoja la que tenga mayor valor.

ii) (3 puntos) La solución del problema entero de (P) es $x_1^* = x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. Utilice el Teorema de Holguras Complementarias para encontrar su imagen dual. Concluya sobre qué relación existe entre esta solución y la obtenida en (i).

b) (6 puntos) Un problema de programación entera se está resolviendo utilizando el algoritmo de *Branch and Bound*. A continuación se presenta el árbol de problemas que se tiene hasta la iteración actual. El primer problema representa la relajación lineal del problema entero original y el resto corresponde a sus ramificaciones. Para cada sub-problema se tiene el valor óptimo de la función objetivo. Además, cada subproblema se identifica con E si su solución es entera (factible para el problema Original) y con NE en caso contrario.



i) (2 puntos) ¿El árbol anterior corresponde a un problema de maximización o a uno de minimización? ¿Cuál es el incumbente hasta la iteración actual?

ii) (1 punto) En las siguientes iteraciones, ¿qué nodos seguiría ramificando y qué nodos no seguiría ramificando? Explique.

iii) (2 puntos) Dé una cota superior y una inferior para el valor óptimo de la función objetivo del problema entero original según la información que conoce hasta la iteración actual. Suponga que los coeficientes de la función objetivo son enteros.

c) (2 puntos) Tras resolver un problema usando Simplex matricial, se llegó a la siguiente información:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} -2/15 & 77/30 & -11/3 \\ 1/15 & -1/30 & 1/3 \\ -1/15 & 8/15 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 73/15 \\ 31/15 \\ 29/15 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \{x_4, x_1, x_2\} \quad x_R = \{x_5, x_3, x_6\}$$

Genere dos cortes de Gomory para acotar el espacio, y justifique por qué estos cortes son válidos.

d) (2 puntos) Explique en pocas líneas y con un ejemplo sencillo por qué no es tan sencillo realizar análisis de sensibilidad cuando se trata de programación entera.

Solución Problema 3.

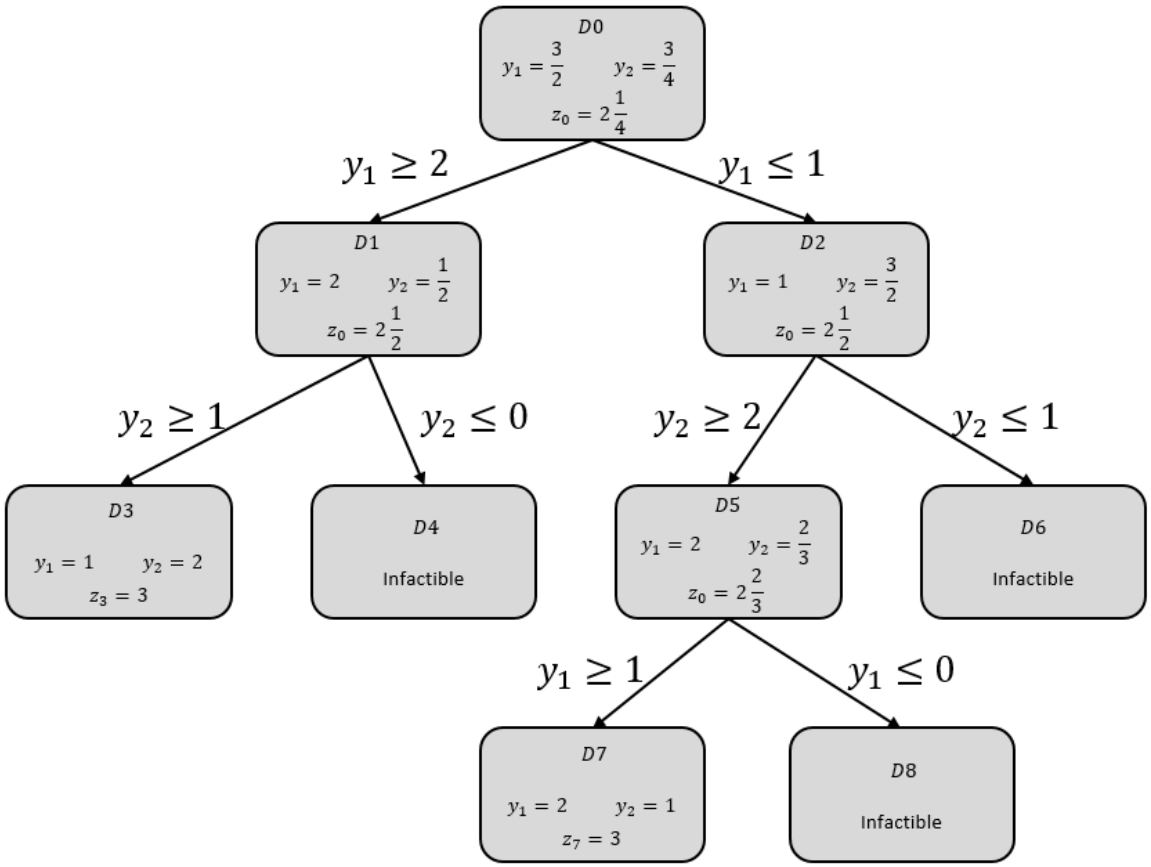
a) i) El dual del problema sería:

$$D0) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & y_1 + y_2 & & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + 2y_2 & \geq & 6 \\ & y_1 + 2y_2 & \geq & 3 \\ & y_1 - y_2 & \leq & 2 \\ & 3y_1 - y_2 & \geq & 0 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

El problema a resolver, entonces, es el con variables enteras:

$$D') \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & y_1 + y_2 & & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + 2y_2 & \geq & 6 \\ & y_1 + 2y_2 & \geq & 3 \\ & y_1 - y_2 & \leq & 2 \\ & 3y_1 - y_2 & \geq & 0 \\ & y_1, y_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Ahora, para resolver con B&B, se debe relajar la naturaleza de variables, $D0$), y comenzar el algoritmo. En cada rama, incluye la restricción indicada sobre su caja respectiva que se agrega al dominio.



ii) Falta.

b) i) Se debe recordar que a medida que se va ramificando se van agregando restricciones al problema lo que va haciendo cada vez más pequeña la región factible, por esto mismo se van obteniendo peores soluciones.

Como notamos que las soluciones van disminuyendo se concluye que el problema es una de maximización y el incumbente es 51.

ii) Solo el nodo 6, ya que el 3 y 4 tienen valores bajo el incumbente. Además, el nodo 4 ya arrojó una solución entera. El nodo 5, en tanto, arrojó solución entera (nuestro actual incumbente). En cambio, el nodo 6 posee un valor de la función objetivo mayor que el incumbente y su solución no es entera.

iii) $51 \leq z^* \leq 53$. El primer valor corresponde al incumbente actual, y el segundo valor corresponde a la mejor solución entera posible si ramificamos el nodo 6.

c) Los cortes generados utilizando la técnica de Gomory son pueden ser 3:

$$\frac{13}{15}x_5 + \frac{17}{30}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \geq \frac{13}{15}$$
$$\frac{1}{15}x_5 + \frac{29}{30}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \geq \frac{1}{15}$$
$$\frac{14}{15}x_5 + \frac{8}{15}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \geq \frac{14}{15}$$

Estos cortes son válidos dado que cortan el espacio (en particular, a los valores de las variables no básicas se le está impidiendo valer cero), excluyendo a la solución fraccionaria actual.

d) Cuando se realiza análisis de sensibilidad -o sea, uno de los parámetros del problema se modifica levemente- en un problema lineal con variables continuas, se sabe que si es que la solución llega a cambiar, la nueva solución estará "cerca"de la anterior solución. Lamentablemente, esto no se puede

asegurar en problemas lineales con variables enteras. Por ejemplo, una persona cuenta con \$100 para gastar en dos productos, y busca maximizar su beneficio total por comprar. El costo de comprar una unidad del producto 1 cuesta \$1, y una unidad del producto 2 cuesta \$101. El beneficio que otorga cada unidad del producto 1 es 1 y cada unidad del producto 2 entrega 2000. En la situación actual la solución será comprar 100 unidades del producto 1 y 0 del producto 2 generando un beneficio de 100. Ahora, si se quiere realizar un "análisis de sensibilidad"donde se aumenta en 1 unidad el presupuesto (y entonces, en un 1 %), la nueva solución será comprar 0 unidades del producto 1 y 1 unidad del producto 2, obteniéndose un beneficio de 2000. En este ejemplo se puede apreciar que ambas soluciones no se encuentran "cerca", y por lo tanto, para obtener la nueva solución se debe resolver el problema completo nuevamente.

Problema 4. (15 puntos)

a) (9 puntos) Nuestro ya conocido amigo Enrique es un amante de las pasas. Tan así, que decidió comprar hectáreas de parras para tener tantas pasas como quiera y no tener que sacarle a escondidas a sus amigos. Sin embargo, se excedió y está produciendo más de las que puede o quiere comer. Por lo mismo, se iniciará en el negocio de la venta de pasas.

Enrique debe seleccionar a qué clientes atender, para lo cual cuenta con un único vehículo de capacidad V. Cada cliente $i = 1, \ldots, n$ requiere un volumen V_i que desea recibir antes del instante T_i. El beneficio por atender al cliente i es de $B_i > 0$ pesos, menos un descuento de $d > 0$ pesos por cada minuto de atraso. En caso de no ser atendido, él incurre en una multa prometida $M_i > 0$ por no satisfacer el pedido. Sin embargo, por ambicioso que es, no sólo quiere determinar qué clientes atender, si no que además el orden en que los atenderá. Se sabe que el vehículo debe regresar al campo ($i = 0$) al final de la jornada. El tiempo de traslado desde i hasta j es t_{ij}, y el costo de bencina es de $c_{ij} > 0$ pesos.

Considere que un cliente puede ser atendido si y sólo si hay un viaje hasta él, y que si Enrique llega hasta un cliente, debe retirarse de ahí. Además, por razones lógicas, pretende generar un solo tour y que debe pasar por el campo.

Formule un problema de programación lineal mixta que le permita a Enrique resolver su problema pasístico, con tal de maximizar su beneficio.

b) (6 puntos) La Dirección de la Escuela son tímidamente seguidores de los reality show. Por lo mismo han decidido implantar la modalidad de *eliminado por convivencia* y *eliminado por talento* con los ayudantes de los distintos cursos. Para ello, ha decidido que el o la ayudante que obtenga la peor evaluación en la encuesta docente (realizada mediante una votación para eliminar o no al ayudante) y el o la ayudante que tenga el curso con el mejor promedio serán eliminados de la escuela en cada semestre. Ante esta noticia, los ayudantes de optimización se han confabulado y han decidido utilizar sus conocimientos para evitar sufrir una eliminación.

Dados los antecedentes históricos de este curso, se ha podido formular un modelo predictivo exacto para la nota que obtendrá cada alumno del curso en cada una de las J evaluaciones que se realizarán. Este modelo consiste en tomar la nota promedio de los cursos ya cursados por el alumno y agregarle un factor de corrección. La nota promedio ha sido obtenida de la base de datos de la escuela y corresponde a M_i, para el alumno i de los I inscritos este semestre. El factor de corrección es el producto entre el grado de dificultad que el profesor decide para cada evaluación y un ponderador que es particular para cada alumno. Este ponderador ha sido estimado en α_i para el alumno i, y el grado de dificultad será definido por los ayudantes entre los valores -10 y 10, donde -10 corresponde a una evaluación extremadamente difícil y 10 a una evaluación extremadamente fácil. Por otro lado, los ayudantes pueden convencer a los profesores de realizar una bonificación a la nota final que obtuvo cada alumno.

La ponderación que tiene la evaluación j en el promedio final corresponde a β_j, y además, como política del curso puede haber a lo más 3 promedios 7.0 en el semestre. Además, de manera de no generar conflictos entre los alumnos que puedan dañar la imagen para los próximos semestres, los profesores han decidido que entre la bonificación máxima y mínima no debe existir una diferencia mayor a 2 puntos.

Se ha realizado un estudio del comportamiento de los alumnos de la escuela, y este permitió determinar la siguiente función que entrega la probabilidad de que un alumno vote para que el ayudante sea eliminado por convivencia al final de cada semestre:

$$P_i = 1 - \frac{(3 \cdot NotaObtenidaEnElCurso + Pol_i - 3)}{20}$$

Donde Pol_i indica si el alumno i está pololeando o no, información que es conocida. Por último, la probabilidad de ser eliminado por talento puede ser estimada a través de:

$$B = (PromedioObtenidoPorLaSeccion - 1)/6$$

La idea de los ayudantes consiste en desarrollar un modelo de programación lineal continua que permita minimizar la probabilidad de ser eliminado, por convivencia o por talento, de la escuela, asumiendo que la probabilidad de ser eliminado por convivencia es la media de las probabilidades de que cada alumno del curso vote para que el profesor sea expulsado de la escuela.

Solución Problema 4.

a) A continuación se presenta el modelo.

Variables

y_i: variable binaria que vale 1 si el cliente i es atendido, y que vale 0 en otro caso.

x_{ij}: variable binaria que vale 1 si el auto va de i a j, y que vale 0 en otro caso.

t_i: instante de arribo al cliente i.

s_i: retraso en atender al cliente i.

Función objetivo Maximizar el beneficio total del problema:

$$\text{máx} \sum_i (y_i B_i - d s_i - (1 - y_i) M_i) - \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij}$$

Restricciones

R1) Un cliente es atendido si y sólo si hay un viaje hasta él.

$$y_j = \sum_i x_{ij} \qquad \forall i = 0, \ldots, n$$

R2) Si llega hasta un cliente, debe retirarse.

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i x_{ji} \qquad \forall j = 0, \ldots, n$$

R3) Hay un solo tour, y debe pasar por el campo.

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subseteq \{1, \ldots, n\}, S \neq \emptyset$$

Notar que no debe incluir el nodo de la fábrica $i = 0$ pues la solución es un sub-ciclo (es decir, se debe prohibir solo los sub-ciclos que no incluyan a la fábrica).

R4) La carga de pasas en el vehículo no puede superar su capacidad.

$$\sum_i V_i y_i \leq V$$

R5) Si se viaja de i a j, los arribos deben ser compatibles con el tiempo de traslado.

$$t_j \geq t_i + x_{ij} t_{ij} - (1 - x_{ij}) M \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n \qquad M \geq \sum_i \sum_j t_{ij}$$

R6) Relación entre retrasos y tiempos de arribo

$$s_i \geq t_i - T_i \qquad \forall i = 0, \ldots, n$$

R7) Naturaleza de las variables

$y_i \in \{0,1\}$, para $i = 0, \ldots, n$.
$x_{ij} \in \{0,1\}$, para $i, j = 0, \ldots, n$.
$t_i \geq 0$, para $i = 0, \ldots, n$.
$s_i \geq 0$, para $i = 0, \ldots, n$.

b) A continuación se presenta el modelo.

Variables

y_i: nota final del alumno i.
x_{ij}: nota del alumno i en la evaluación j.
δ_j: nivel de dificultad dado a la evaluación j.
s_i: bonificación extra en nota dada al alumno i.

Función objetivo Minimizar las probabilidades de ser eliminado:

$$\text{máx}\left(B + \frac{\sum_{i=1}^{I} P_i}{I}\right) = \left(\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{I} y_i}{I} - 1\right)}{6} + \frac{\sum_{i=1}^{I}\left(1 - \left(\frac{3 \cdot y_i + Pol_i - 3}{20}\right)\right)}{I}\right)$$

Restricciones

R1) Cálculo de la nota en cada evaluación.

$$x_{ij} = M_i + \delta_j \cdot \alpha_i \qquad \forall i = 1, \ldots, I \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

R2) Límites sobre el valor posible para el grado de dificultad.

$$\delta_j \geq -10 \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

$$\delta_j \leq 10 \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

R3) No poner a ningún alumno una nota inferior a 1.0.

$$x_{ij} \geq 1{,}0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I \qquad \forall j = 1, \ldots, J$$

R4) Calcular la nota obtenida al final del curso por cada alumno.

$$y_i = \sum_{j=1}^{J} x_{ij} \cdot \beta_j + E_i \qquad \forall i = 1, \ldots, I$$

R5) No poner a ningún alumno con nota superior a 7.0.

$$y_i \leq 7{,}0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I$$

R6) No colocar más de 3 notas 7.0 en el semestre:

$$\sum_{i \in S} y_i \leq (7{,}0 \cdot |S|) - 0,1 \qquad \text{con } |S| = 4 \text{ y } S \subseteq I$$

donde S son todos los subconjuntos de I formados por 4 elementos.

R7) Evitar que exista una diferencia mayor a 2 puntos entre la bonificación mínima y máxima.

$$E_i - E_k \leq 2 \qquad \forall i, k \in I$$

$$E_k - E_i \leq 2 \qquad \forall i, k \in I$$

R8) Naturaleza de las variables

$y_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I$.
$x_{ij} \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I, \forall j = 1, \ldots, J$.
$E_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I$.
$\delta_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, \ldots, J$.