PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado
F. Palomino - A. Cataldo - J. Vera

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 1 de julio.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 1 de Julio a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (4 puntos) Considere el algoritmo de Dijkstra sobre una red $G(N, A)$ acíclica en que cada $c_{ij} > 0$, $\forall (i, j) \in A$. Sin embargo, le haremos las siguientes modificaciones. ¿Es la manera correcta de modificar el algoritmo para que nos entregue la ruta más larga de un nodo s a un nodo t? Justifique su respuesta.

i) (2 puntos)

- ◇ Al inicializar el algoritmo, todos los nodos $i \neq s$ tienen etiqueta $d_i = -\infty$ en lugar de $d_i = \infty$.
- ◇ Si, al estar revisando los arcos que salen de un nodo i, encontramos que $d_j < c_{ij} + d_i$, entonces se le actualiza la etiqueta $d_j \leftarrow c_{ij} + d_i$ y $p_j \leftarrow i$.

ii) (2 puntos) Lo mismo que (i), solo que además se le modifica:

- ◇ Una vez cerrado un nodo, al seleccionar el siguiente nodo a ser revisado, en lugar de seleccionar aquél que tenga menor etiqueta d_k de entre los no cerrados, se selecciona al que tenga mayor etiqueta d_k.

b) (4 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la desigualdad siguiente:

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad h > 0$$

i) (2 puntos) Demuestre que el máximo de f en un intervalo cerrado $[a, b]$ es alcanzado en a o en b.

ii) (2 puntos) Demuestre que f es convexa.

Indicación: Considere $L(x) = \dfrac{(x-a)f(b) - (x-b)f(a)}{b-a}$ y $G(x) = f(x) - L(x)$.

c) (3 puntos) Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0 & \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local de (P). Sea $I = \{i \,:\, g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suponga que $f, g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall i = 1, \ldots, m$. Demuestre que $F_0 \cap G = \emptyset$, donde

$$F_0 = \{d :\ \nabla f(\bar{x})^T d < 0)$$
$$G = \{d :\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0), i \in I\}$$

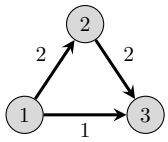
d) (4 puntos) Ilustre con un ejemplo <u>y</u> explique con palabras su respuesta a las siguientes preguntas:

i) (2 puntos) De existir un óptimo en un espacio de soluciones factibles, ¿el criterio de entrada del algoritmo de Simplex asegura que se iterará la menor cantidar posible de veces para llegar al óptimo?

ii) (2 puntos) ¿Qué debe ocurrir para que el algoritmo de Simplex determine un óptimo entero, independiente de c en la función objetivo $c^T x$?

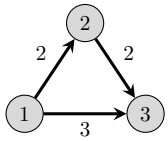
Solución Problema 1.

a) i) Estas modificaciones no permiten encontrar la ruta más larga. Un contraejemplo es el siguiente:



En un algoritmo de Dijkstra modificado según (i), el orden de visita según etiqueta d_i sería $1-3-2$, por lo que al estar en el nodo 2, no se actualizará la información del nodo 3 pues ya está cerrado. De esta manera, este algoritmo indicará que la ruta más larga es $1-3$ cuando en realidad es $1-2-3$

ii) Aún así no es posible. Un contraejemplo es el siguiente:



En un algoritmo de Dijkstra modificado según (i) y (ii), el orden de visita según etiqueta d_i sería $1-3-2$, por lo que al estar en el nodo 2, tampoco se actualizará la información del nodo 3 pues ya está cerrado. De esta manera, este algoritmo indicará que la ruta más larga es $1-3$ cuando en realidad es $1-2-3$

b) i) Primero, sabemos que el problema tiene solución óptima en $[a,b]$ por el teorema de Bolzano-Weierstrass (función objetivo continua, intervalo -dominio- acotado, cerrado y no vacío). Procedamos por contradicción. Supongamos que el máximo no se alcanza en los extremos, es decir, $\exists c \in (a,b)$ que maximiza a f. Además, dado que $f(a) < f(c)$ y $f(b) < f(c)$, se tiene por continuidad de f que $\exists a_0, b_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) < f(c)$ si $x \in [a,a_0]$ o $x \in [b_0,b]$.
Sea $h > 0$ tal que $c-h \in [a,a_0)$ o $c+h \in (b_0,b]$ y que, además, $[c-h, c+h] \subseteq [a,b]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $c-h \in [a,a_0)$, luego, aplicando la desigualdad enunciada, se tiene:

$$\begin{aligned}
f(c) &\leq \frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h} f(y)\,dy \\
&\leq \frac{1}{2h}\left(\int_{c-h}^{a_0} f(y)\,dy + \int_{a_0}^{c+h} f(y)\,dy\right) && (f(y) < f(c), \forall y \in [c-h, a_0]) \\
&< \frac{1}{2h}\left(\int_{c-h}^{a_0} f(c)\,dy + \int_{a_0}^{c+h} f(c)\,dy\right) && (f(c) = \text{cte.}) \\
&= \frac{1}{2h}\big((a_0 - c + h)f(c) + (c + h - a_0)f(c)\big) \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

Lo cual no puede ser, luego se tiene lo pedido.

ii) Consideremos $L(x)$ como en el enunciado. Como es lineal, entonces es convexa y más aún, verifica la desigualdad del enunciado (de hecho es una igualdad). Ahora consideremos $G(x) = f(x) - L(x)$, luego por linealidad de la integral y, dado que f y L verifican la desigualdad entonces, G también la verifica. Así, aplicando la parte (i) se tiene que G alcanza un máximo en a o en b. Pero $G(a) = G(b) = 0$. Por lo tanto, se tiene que

$$G(x) \leq 0) \Rightarrow f(x) \leq L(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Finalmente para cualquier $t \in [0,1]$, tomando $(1-t)a + tb \in [a,b]$, substituyendo esto en la reciente desigualdad se obtiene que f es convexa.

c) Por contradicción, supongamos que $\exists d \in F_0 \cap G$. Luego como $\bar{x}$ es un mínimo local, satisface las condiciones de KKT, esto es, $\exists \mu_1, \ldots, \mu_m \geq 0$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Multiplicando la ecuación anterior por d^T se tiene

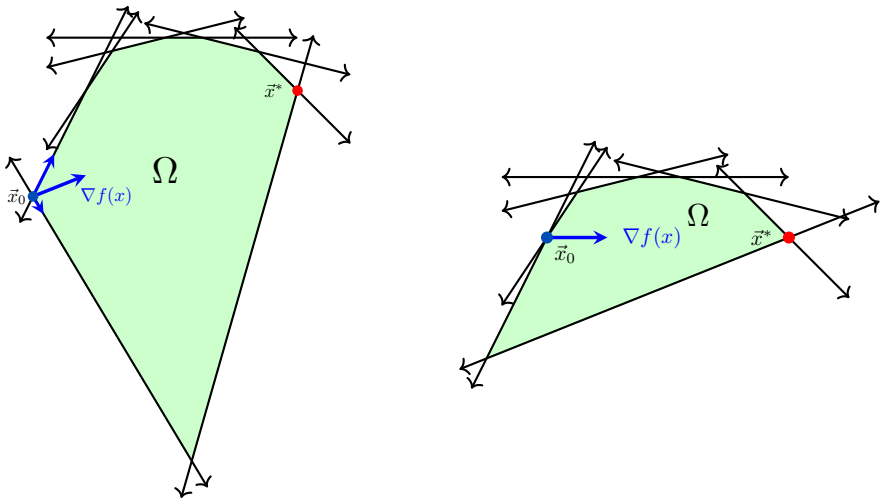
$$\nabla f(\bar{x})^T d + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0 \Longrightarrow \nabla f(\bar{x})^T d = -\sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x})^T d$$

Esto no puede ser, pues el lado izquierdo de la ecuación es < 0, sin embargo, el lado derecho ≥ 0 pues es el opuesto a una combinación lineal positiva de números negativos. Finalmente $F_0 \cap G = \emptyset$.

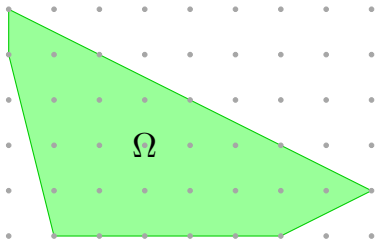
d) i) No, el criterio de entrada asegura que nos moveremos hacia una base que aumente más de forma marginal el cambio en la función objetivo, pero esto no implica lo enunciado. Puede que Simplex nos lleve por un "camino" que tenga muchos más cambios de bases que otro para llegar al óptimo.

Un ejemplo es el de la izquierda, en que Simplex escogerá el camino que cambia de base 6 veces en lugar de cambiar de base solamente 2 veces. Eso ocurre porque la proyección del grandiente sobre la restricción a la derecha resulta ser mayor que la de la derecha.

Otro caso es cuando es preferible "devolverse" en curvas de nivel, alejándose de la curva de nivel óptima. Simplex eso no lo admite, ya que siempre mejorará el valor objetivo (o lo mantendrá) de iteración en iteración, moviéndonos a una curva de nivel mejor. El ejemplo de la derecha ilustra que es mejor empeorar curvas de nivel para lograr llegar al óptimo en 2 cambios de base, mientras que Simplex lo llevaría en 5.



ii) Basta que todos los puntos extremos del poliedro solución sean enteros, y que este sea acotado. Un ejemplo se ilusta en la siguiente imagen.



Problema 2. (15 puntos)

a) (5 puntos) Resuelva utilizando el algoritmo de Simplex el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} & f(x_1, x_2) = \text{máx}\{x_1 - 2, x_2\} \\ \text{s.a.} & x_1 + |x_2| & \leq 1 \\ & x_1 & \geq 0 \end{array}$$

b) (5 puntos) La Tía Marta se ha iniciado en la venta de arreglos florales y requiere de ayuda de su sobrino Yiyo para optimizar su producción. Yiyo, tras analizarlo, le recomendó comenzar el negocio con dos tipos distintos de arreglos: primaveral y veraniego.

Para armar un arreglo primaveral se requiere 1 rosa, 1 tulipán y 3 ibizcos; mientras que para armar un arreglo veraniego se requieren de 3 rosas, 1 tulipán y 1 ibizco. Tía Marta le dijo que un arreglo primaveral se podría vender en 1000 pesos, mientras que un arreglo veraniego en 2000.

i) (1 punto) Considerando que el negocio de la Tía Marta tiene como disponibilidad de flores un total de 300 rosas, 140 tulipanes y 300 ibizcos, ayude a Yiyo a plantear el problema (P) al que se enfrenta la florista para optimizar su producción.

ii) (2 puntos) Determine el problema dual (D) de (P). ¿Qué representa?

iii) (2 puntos) Si el óptimo del problema (P) es armar 60 arreglos primaverales y 80 veraniegos, encuentre el óptimo del problema dual sin resolverlo. ¿Cómo interpreta estos valores según su respuesta en (ii)?

c) (5 puntos) Considere el siguiente problema de programación entera.

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{máx} & 5x + 2y & \\ & y & \leq 10 \\ & 3x + 2y & \leq 27 \\ & x - 2y & \leq 5 \\ & x \ , \ y & \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

i) (1 punto) Resuelva el problema relajado de (P) usando el algoritmo de Simplex.

ii) (2 puntos) Genere un corte de Gomory a partir de la resolución de (i). Escríbalo de tal manera que pueda ser graficado.

iii) (2 puntos) Resuelva el problema entero (P) utilizando el algoritmo de Branch & Bound (o Ramificación y Acotamiento). Indique claramente el árbol de subproblemas, sus soluciones y el incumbente respectivo a cada subproblema. No considere el corte generado en (ii) para esta pregunta.

Solución Problema 2.

a) Primero pasémoslo a un problema equivalente lineal, para luego generar el estándar:

$$\begin{array}{lll} \sim (P) \quad \text{mín} & \text{máx}\{x_1 - 2, x_2\} & \\ \text{s.a.} & x_2 & \leq 1 - x_1 \\ & x_2 & \geq x_1 - 1 \\ & x_1 & \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lll} \sim\sim (P) \quad \text{mín} & z & \\ \text{s.a.} & x_2 + x_1 & \leq 1 \\ & x_1 - x_2 & \leq 1 \\ & x_1 - 2 & \leq z \\ & x_2 & \leq z \\ & x_1 & \geq 0 \end{array}$$

Al estandarizar, consideramos $x_2 = u - v$ y $z = r - s$

$$\begin{array}{lll} \sim\sim\sim (P) \quad \text{mín} & z & \\ \text{s.a.} & u - v + x_1 & \leq 1 \\ & x_1 - u + v & \leq 1 \\ & x_1 - r + s & \leq 2 \\ & u - v - r + s & \leq 0 \\ & x_1, u, v, r, s & \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lll} (FE) \quad \text{mín} & r - s & \\ \text{s.a.} & u - v + x_1 + h_1 & = 1 \\ & x_1 - u + v + h_2 & = 1 \\ & x_1 - r + s + h_3 & = 2 \\ & u - v - r + s + h_4 & = 0 \\ & x_1, u, v, r, s, h_1, h_2, h_3, h_4 & \geq 0 \end{array}$$

Así, ahora podemos resolver por Simplex. Consideremos como base la formada por las variables de holgura. Así, la base está asociada a las variables h_1, h_2, h_3 y h_4, y la no-base a las variables u, v, x_1, r y s.

$$B = B^{-1} = I_{3\times 3} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned}\bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_{3\times 3} R \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T\end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice la variable s debería entrar a la base. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b} = B^{-1}b = b$:

$$\text{mín}\left\{\bullet, \bullet, \frac{2}{1}, \frac{0}{1}\right\} = 0 \rightarrow h_4 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son h_1, h_2, h_3 y s, mientras que las variables no básicas son u, v, x_1, r e h_4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned}\bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T\end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que v es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\bullet, \frac{1}{1}, \bullet, \bullet\right\} = 1 \rightarrow h_2 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son h_1, v, h_3 y s, mientras que las variables no básicas son u, h_2, x_1, r y h_4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned}\bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq \vec{0}^T\end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina de iterar con Simplex.

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_B = \begin{pmatrix} h_1 \\ v \\ h_3 \\ s \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

En el problema original, tenemos que el óptimo corresponde a $x_1 = 0, x_2 = u - v = -1$ con $z = -1$

b) i) Haciendo x_1 la variable que indica la cantidad de arreglos primaverales a hacer y x_2 la variable que indica la cantidad de arreglos veraniegos a hacer, el problema primal queda asociado al siguiente modelo:

$$\begin{array}{llll} P) & \text{máx} & 1000x_1 + 2000x_2 & \\ & \text{s.a.} & x_1 + 3x_2 & \leq 300 \\ & & x_1 + x_2 & \leq 140 \\ & & 3x_1 + x_2 & \leq 300 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

ii) El problema dual queda representado como sigue:

$$\begin{array}{llll} D) & \text{mín} & 300y_1 + 140y_2 + 300y_3 & \\ & \text{s.a.} & y_1 + y_2 + 3y_3 & \geq 1000 \\ & & 3y_1 + y_2 + y_3 & \geq 2000 \\ & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array}$$

El dual representa el problema de un agente externo que quiere saber que precio unitario ofrecer por cada una de las flores si quiere comprarle todas las flores a la Tía Marta. Así y_1, y_2 e y_3 son los precios asociados a las rosas, tulipanes e ibizcos.

iii) Por Teorema de Holguras Complementarias, se tiene

$$\begin{aligned} y_1(x_1 + 3x_2 - 300) &= 0 \\ y_2(x_1 + x_2 - 140) &= 0 \\ y_2(3x_1 + x_2 - 300) &= 0 \\ x_1(y_1 + y_2 + 3y_3 - 1000) &= 0 \\ x_2(3y_1 + y_2 + y_3 - 2000) &= 0 \end{aligned}$$

Como $x_1^* = 60$ y $x_2^* = 80$, tenemos que:

$$\begin{aligned} y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &= 0 \\ y_1 + y_2 &= 1000 \\ 3y_1 + y_2 &= 2000 \end{aligned}$$

Resolviendo, $y_1^* = 500, y_2^* = 500, y_3^* = 0$, lo que da un valor igual al primal de 220 000.

La Tía Marta venderá rosas y tulipanes a un precio de \$500 cada una y entregará como oferta los ibizcos gratis, pero esto solo si se vende todo como un paquete. Esto toma sentido pues, si vende todas las rosas y tulipanes (dado que solo sabe hacer los arreglos florales descritos), no podrá sacarle provecho alguno a los ibizcos.

c) i) La forma estándar del problema relajado es

$$\begin{array}{llll} FE) & \text{mín} & -5x - 2y & \\ & \text{s.a.} & y + h_1 & = 10 \\ & & 3x + 2y + h_2 & = 27 \\ & & x - 2y + h_3 & = 5 \\ & & x, y, h_1, h_2, h_3 & \geq 0 \end{array}$$

Dado que $(x, y) = (0, 0)$, la base está asociada a las variables h_1, h_2 y h_3.

$$B = B^{-1} = I_{3\times 3} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_{3\times 3} R \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T \end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice la variable x debería entrar a la base. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b} = B^{-1}b = b$:

$$\text{mín}\left\{\bullet, \frac{27}{3}, \frac{5}{1}\right\} = 5 \to h_3 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son h_1, h_2 y x, mientras que las variables no básicas son h_3 e y.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T \end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que y es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\frac{10}{1}, \frac{12}{8}, \bullet\right\} = \frac{12}{8} \to h_2 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son h_1, y y x, mientras que las variables no básicas son h_3 y h_2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/8 & 3/8 \\ 0 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/8 & 3/8 \\ 0 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \geq \vec{0}^T \end{aligned}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina de iterar con Simplex.

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 3/2 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

La solución asociada al problema relajado, entonces, es $(x, y) = (8, 3/2)$, y el valor óptimo es $z^* = 43$.

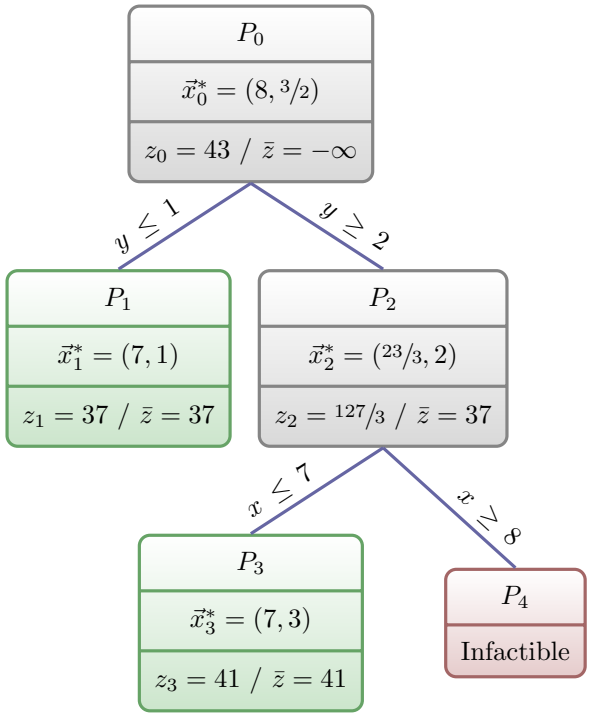
ii) Dado que y es fraccionaria, el corte de Gomory posible es utilizando la tercera restricción en su forma canónica asociada a la base óptima:

$$\left(\frac{-3}{8} - (-1)\right) h_3 + \left(\frac{1}{8} - 0\right) h_2 \geq \left(\frac{3}{2} - 1\right)$$
$$\leftrightarrow \quad \frac{5}{8}h_3 + \frac{1}{8}h_4 \geq \frac{1}{2}$$

Dado que, de la forma estándar, queda que $h_3 = 5 - x + 2y$ y que $h_2 = 27 - 3x - 2y$, luego

$$\frac{5}{8}(5 - x + 2y) + \frac{1}{8}(27 - 3x - 2y) \geq \frac{1}{2}$$
$$-x + y \geq -6$$

iii) El árbol de resoluciones queda como sigue en que cada P_i fue resuelto según el orden i. Los nodos verdes representan problemas con solución entera y, en este caso, actualización del incumbente; mientras que los nodos rojos corresponden a nodos cortados por infactibilidad:

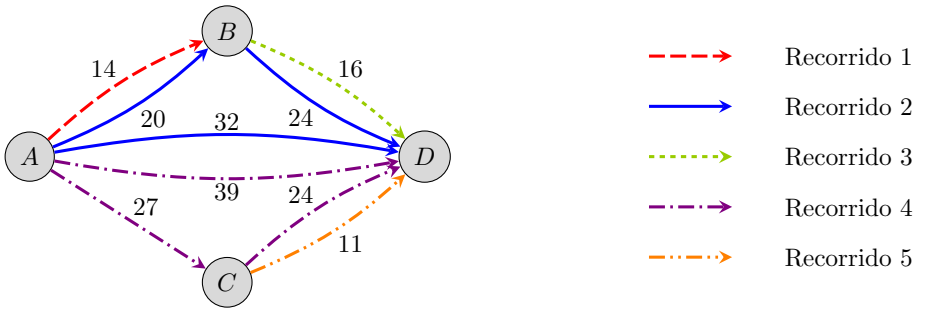


Así, el óptimo del problema (P) entero corresponde a $(x, y) = (7, 3)$, con un valor objetivo igual a $z^* = 41$.

Problema 3. (15 puntos)

a) (10 puntos) Usted se encuentra en el nodo en su casa (S) y desea tomar el transporte público hacia la universidad (U). Su casa se encuentra a 5 minutos caminando del nodo A y a 20 del nodo B, la Universidad se encuentra a 5 minutos caminando desde el nodo D y a 14 del nodo C.

Tras ilustrar todas las posibilidades de viaje que le permiten los recorridos que le sirven, se llegó a un grafo como el que se muestra a continuación, en que cada arco (i, j) representa el tiempo de espera promedio y el tiempo de viaje (sumados) en minutos si es que esperase la micro en el nodo i y se baja en j.



i) (4 puntos) Determine cuál es el itinerario (es decir, qué recorrido tomar desde dónde hasta dónde) que le tome el menor tiempo posible en llegar desde su casa a la Universidad, utilizando el algoritmo de Dijkstra.

ii) (2 puntos) Si en (i) finalizó el algoritmo al terminar de revisar el nodo U y no ha cerrado todos los nodos, continúe iterando hasta que obtenga el árbol de distancias óptimas. Usted quedó estudiar el fin de semana con un amigo que vive en el nodo B. ¿Considerará caminar hacia B?

iii) (4 puntos) Corrobore el árbol de distancias mínimas obtenido en (ii) utilizando Simplex especializado en redes.

b) (5 puntos) Considere el problema que busca encontrar el mínimo de $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ al considerar todos los puntos que pertenecen al conjunto Ω, donde

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 4 \ , \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \ , \ x_1 - x_2 \leq 2\}$$

Considere también la lista de puntos $A = (\sqrt{2} - 2, 2 - \sqrt{2})$, $B = (0, 2)$, $C = (1, -1)$, $D = (-1, -1)$ y $E = (2, 0)$, todos factibles.

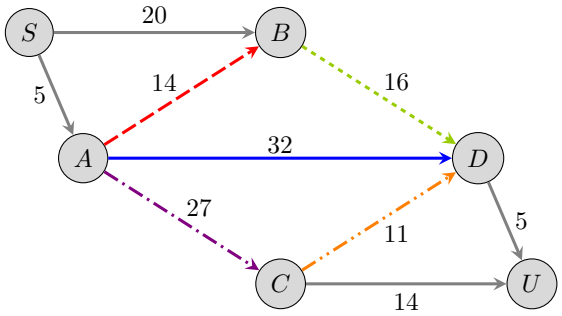
i) Haga un gráfico del dominio y las curvas de nivel de la función objetivo.

ii) Determine qué puntos de la lista satisfacen las condiciones de KKT.

iii) ¿Qué punto cree que debe ser el óptimo? Justifique su respuesta.

Solución Problema 3.

a) i) Primero, notemos que podemos simplificar el arco eliminando los arcos repetidos y dejando el con menor distancia de todos los (i, j). Así, el grafo queda más sencillo. Agregando los nodos S y U:

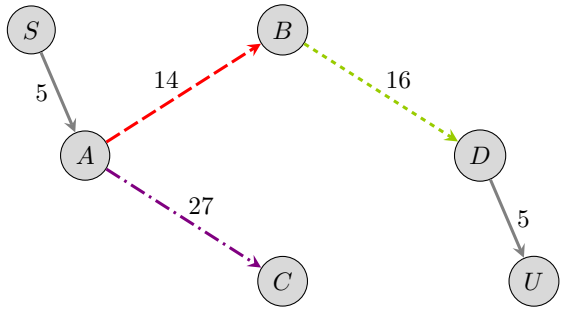


Así, sobre esta red podemos ejecutar Dijkstra. Su desarrollo es como sigue, en que cada etiqueta muestra (d_i, p_i), cada etiqueta en rojo indica el nodo que está siendo cerrado en esa iteración. En color verde se indican las etiquetas que fueron actualizadas por iteración. El conjunto V indica los nodos que ya están cerrados después de cada iteración, en orden de cierre.

It.	S	A	B	C	D	U	V
0	$(0, S)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$\{\}$
1	$(0, S)$	$(5, S)$	$(20, S)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$(-, \infty)$	$\{S\}$
2	–	$(5, S)$	$(19, A)$	$(32, A)$	$(37, A)$	$(-, \infty)$	$\{S, A\}$
3	–	–	$(19, A)$	$(32, A)$	$(35, B)$	$(-, \infty)$	$\{S, A, B\}$
4	–	–	–	$(32, A)$	$(35, B)$	$(46, C)$	$\{S, A, B, C\}$
5	–	–	–	–	$(35, B)$	$(40, D)$	$\{S, A, B, C, D\}$
6	–	–	–	–	–	$(40, D)$	$\{S, A, B, C, D, U\}$

Así, el itinerario óptimo corresponde en caminar hasta A, tomar el recorrido 1 y bajarse en B, luego tomar el recorrido 3 y bajarse en D para, finalmente, caminar hacia la Universidad.

ii) Como ya se encuentran todos los nodos cerrados, no es necesario seguir iterando. El árbol de distancias óptimas es el que sigue:



Así, queda visto que caminando a A y tomando el recorrido 1 hasta B se demoraría, en promedio, menos que caminando directo a B (19 vs 20 respectivamente). Luego, no consideraría caminar.

iii) Se tiene que las variables que aparecen en el árbol anterior son básicas, mientras que las que no son variables no básicas.

Calculemos el valor de las variables duales, para luego calcular los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{SA} = 5 - \pi_S + \pi_A = 0 \\ \bar{c}_{AB} = 14 - \pi_A + \pi_B = 0 \\ \bar{c}_{AC} = 27 - \pi_A + \pi_C = 0 \\ \bar{c}_{BD} = 16 - \pi_B + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{DU} = 5 - \pi_D + \pi_U = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \pi_S \\ \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \\ \pi_D \\ \pi_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 21 \\ 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrll} \bar{c}_{SB} = & 20 - (40) + (21) = 1 & \geq 0 & (l) \\ \bar{c}_{AD} = & 32 - (35) + (5) = 2 & \geq 0 & (l) \\ \bar{c}_{CD} = & 11 - (8) + (5) = 8 & \geq 0 & (l) \\ \bar{c}_{CU} = & 14 - (8) + (0) = 6 & \geq 0 & (l) \end{array}$$

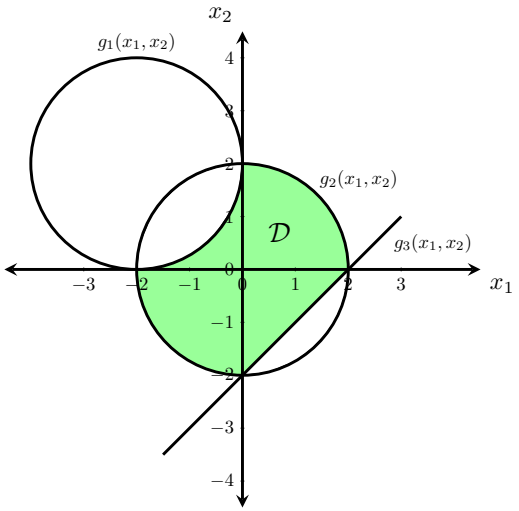
Dado que todos los arcos no básicos cumplen con el criterio de optimalidad de Simplex, se tiene que la solución encontrada en (i) es óptima.

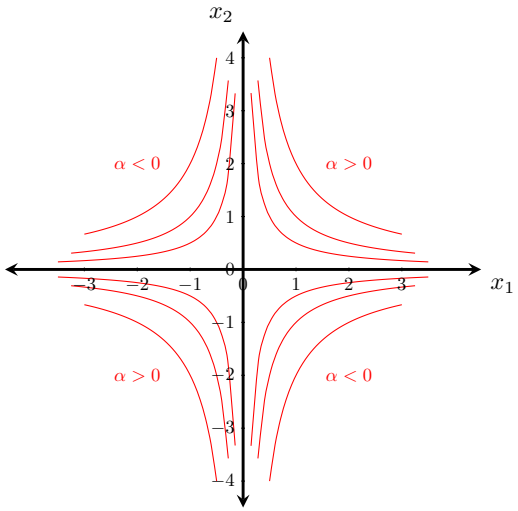
Entonces, el itinerario indicado en (i) efectivamente es el óptimo.

b) i) Considerando el problema como:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} & x_1 x_2 & \\ \text{s.a.} & g_1(x_1, x_2) = -\left((x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^4\right) + 4 & \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 - 4 & \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 2 & \leq 0 \end{array}$$

El espacio de soluciones factibles queda como el grafo de la izquierda. Ahora, las curvas de nivel $x_1 x_2 = \alpha$ se representan en el grafo de la derecha, en que cuando $\alpha = 0$ son los ejes, mientras que si $\alpha \neq 0$ son hiérbolas.:





ii) Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = x_1 x_2 + \mu_1\big(-(x_1+2)^2 - (x_2-2)^2 + 4\big) + \mu_2\big(x_1^2 + x_2^2 - 4\big) + \mu_3(x_1 - x_2 - 2)$$

Dado que no hay naturaleza variable, las condiciones de KKT asociadas a él son las que siguen:

$$2 - \sqrt{2} - 2\mu_1(\sqrt{2}) = 0$$

i)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}$	$=$	$x_2 - 2\mu_1(x_1+2) + 2\mu_2 x_1 + \mu_3$	$=$	0
ii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}$	$=$	$x_1 - 2\mu_1(x_2-2) + 2\mu_2 x_2 - \mu_3$	$=$	0
iii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$-(x_1+2)^2 - (x_2-2)^2 + 4$	$\leq$	0
iv)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$x_1^2 + x_2^2 - 4$	$\leq$	0
v)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$x_1 - x_2 - 2$	$\leq$	0
vi)	$\mu_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$\mu_1\big(-(x_1+2)^2 - (x_2-2)^2 + 4\big)$	$=$	0
vii)	$\mu_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$\mu_2\big(x_1^2 + x_2^2 - 4\big)$	$=$	0
viii)	$\mu_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$\mu_3\big(x_1 - x_2 - 2\big)$	$=$	0
ix)			μ_1	$\geq$	0
x)			μ_2	$\geq$	0
xi)			μ_3	$\geq$	0

Ahora, veamos para los puntos de la lista. Dado que todos los puntos son factibles, sabemos altiro que las ecuaciones (iii), (iv), y (v) se cumplen. Veamos el resto:

- $\diamond$ A: Dado que g_2 y g_3 son inactivas, tenemos que $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Así, de (i),

$$2 - \sqrt{2} - 2\mu_1(\sqrt{2}) = 0$$
$$\mu_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} > 0$$

Reemplazando en (ii),

$$\sqrt{2} - 2 - 2\frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2} - 2) = 0$$
$$\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2} = 0$$

Luego, A sí satisface las condiciones.

◇ B: Dado que g_3 es inactiva, tenemos que $\mu_3 = 0$. Así,

$$2 - 2\mu_1 \cdot 2 + 2\mu_2 \cdot 0 = 0$$
$$0 - 2\mu_1 \cdot 0 + 2\mu_2 \cdot 2 = 0$$

Resolviendo, llegamos a que $\mu_1 = 1/2$, $\mu_2 = 0$, ambos ≥ 0 Luego, B sí satisface las condiciones.

◇ C: Dado que g_1 y g_2 son inactivas, tenemos que $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Así,

$$-1 + \mu_3 = 0$$
$$1 - \mu_3 = 0$$
$$\mu_3 = 1 \geq 0$$

Luego, C sí satisface las condiciones.

◇ D: Dado que g_1, g_2 y g_3 son inactivas, tenemos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Así,

$$-1 \neq 0$$

Luego, D no satisface las condiciones.

◇ E: Dado que g_1 es inactiva, tenemos que $\mu_1 = 0$. Así,

$$0 + 4\mu_2 + \mu_3 = 0$$
$$2 - \mu_3 = 0$$

Resolviendo, llegamos a que $\mu_3 = -4\mu_2$, lo que hace que $\mu_2 = -1/2 < 0$. Luego, E no satisface las condiciones.

iii) El óptimo debe ser un punto que satisface $f(x_1, x_2) < 0$, por lo tanto debe estar en la recta $x_1 - x_2 = 2$, con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \leq 0$.
No es difícil ver que en el interior de este dominio no se encuentra el óptimo, pues $\nabla f(x_1, x_2) = (x_1\,,\, x_2)^T = (0\,,\, 0)^T$ sólo en (0,0), que no es el óptimo.
Además, $\nabla g_3(x_1, x_2) = (1\,,\, -1)^T$, por lo que los puntos de la recta son regulares. Como el óptimo satisface KKT, el óptimo debe ser $C = (1, -1)$.
Observemos que, en la recta $g_3(x_1, x_2) = 0$, se tiene que las condiciones de KKT son

$$\left.\begin{array}{l} x_2 + \mu_3 = 0 \\ x_1 - \mu_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = \mu_3, x_2 = -\mu_3$$

Así, reemplazando en la recta, queda $\mu_3 - (-\mu_3) = 2$, lo que resulta en $\mu_3 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1$.

Problema 4. (15 puntos)

El connotado empresario gastronómico Jorge Troncoso ha instalado un nuevo local de su cadena de restoranes BarNicandro. Para asegurar el éxito de este proyecto ha hecho un exhaustivo estudio de las condiciones del mercado, obteniendo los siguientes resultados:

Jorge ha definido N posibles platos a poner en el menú. Cada uno tiene un costo de C_i por porción y se vendería a un precio P_i por porción. Además, en esta lista existen platos muy parecidos entre sí, por lo que se pueden considerar sustitutos, el parametro S_{ij} define este parentezco, siendo 0 si los platos i y j no son sustitutos y 1 si lo fueran. Jorge no quiere tener 2 platos sustitutos entre los escogidos.

Por otra parte, para atraer al público, Jorge cuenta con E espectáculos posibles para presentar en las noches, los cuales influyen directamente en la cantidad de público que va al local y pide un plato. Así, si Jorge escogiera el espectaculo k para la noche t, la demanda mínima de porciones del plato i sería $DMin_{ik}^t$, y la demanda máxima sería $DMax_{ik}^t$. Todas las noches deben haber uno o dos espectáculos, cuidando que si en una noche hay 2 espectáculos, entonces no puede haber otra noche con 2 espectáculos en los próximos 5 días. En una noche de 2 espectaculos las demandas mínimas y máximas corresponden a la suma de las demandas mínimas y máximas de cada espectáculo entregado esa noche, respectivamente. Cada espectáculo tiene un costo de $CosEsp_k^t$ en el día t.

En base a estos datos, Jorge le ha solicitado a usted que modele el problema como un problema de programación lineal mixto que maximice las utilidades y permita decidir los platos a colocar en el menú y los espectáculos a contratar para los próximos T días.

Solución Problema 4.

El modelo de Jorge se presenta a continuación:

Variables

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se escoge el plato } i \text{ para poner en menú.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$y_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si se escoge el espectáculo } k \text{ para el día } t. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$z_i^t =$ cantidad de platos i a preparar el día t.

Función objetivo : Se debe maximizar las utilidades.

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (P_i - C_i) z_i^t - \sum_{k=1}^{E} \sum_{t=1}^{T} CosEsp_k^t y_k^t$$

Restricciones

R1) No se pueden escoger 2 platos sustitutos para el menú.

$$x_i + x_j \leq 2 - S_{ij} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, N$$

R2) Se debe escoger como mínimo un espectáculo diario.

$$\sum_{k=1}^{E} y_k^t \geq 1 \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R3) Se debe escoger como máximo 2 espectáculos diarios.

$$\sum_{k=1}^{E} y_k^t \leq 2 \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R4) No pueden haber noches de 2 espectáculos con una diferencia menor de 5 días.

$$\sum_{p=t}^{t+5} \sum_{k=1}^{E} y_k^p \leq 7 \qquad \forall t = 1, \ldots, T-5$$

R5) Cubrir la demanda mínima de platos.

$$z_i^t \geq \sum_{k=1}^{E} DMin_{ik}^t y_k^t - Q x_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad Q \gg 0$$

Se puede tomar $Q \geq \sum_{k=1}^{E} DMin_{ik}^t$.

R6) Cubrir la demanda máxima de platos.

$$z_i^t \leq \sum_{k=1}^{E} DMax_{ik}^t y_k^t \qquad \forall i = 1, \ldots, N \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R7) Producir porciones de un plato, solo si así se decidió.

$$z_i^t \leq M x_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad M \geq \sum_{k=1}^{E} DMax_{ik}^t$$

R8) Naturaleza de las variables

$$
\begin{aligned}
x_i &\in \{0,1\} && \forall i = 1,\ldots,n && \forall t = 1,\ldots,T \\
y_k^t &\in \mathbb{N}_0 && \forall k = 1,\ldots,E && \forall t = 1,\ldots,T \\
z_i^t &\geq 0 && \forall i = 1,\ldots,N && \forall t = 1,\ldots,T
\end{aligned}
$$