PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 2
Profesores: M. Castro - M. Klapp - G. Perez - E. Salgado

Interrogación 2
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- ◇ **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- ◇ Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- ◇ La evaluación es **individual**.
- ◇ Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- ◇ Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Interrogación 2 ICS1113". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después determinar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- ◇ **Debe entregar la prueba física** antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad.
- ◇ Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- ◇ Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba a CANVAS en su puesto.
- ◇ Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.

- ◇ Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

Nota de corrección: Solo asignar el puntaje en números enteros en cada inciso.

Pregunta 1 (20 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal continua:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & 5x_1 + 2x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \ (*) \\ & 5x_1 + 4x_3 \geq 3, \ (**) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) **(4 puntos)** Escriba el problema en forma estándar y obtenga la solución básica factible en donde las restricciones (*), (**) y $x_2 \geq 0$ están activas.

Solución: Para formular el el problema en forma estándar, agregamos una variable de exceso en la segunda restricción:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & 5x_1 + 2x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ & 5x_1 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Luego, considerando que nos entregan información sobre un vértice: $x_2 = 0$ y que el exceso de la segunda restricción también es nulo ($x_4 = 0$) dado que nos indican que la restricción está activa. Entonces, podemos resolver este sistema para encontrar la solución. De igual forma, podemos concluir que una base que representa ese vértice es la base $B = \{1, 3\}$ y tenemos lo siguiente:

$$A_B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, tenemos que la solución básica factible obtenida es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 puntos por formular correctamente el problema en FE.
- ◇ 1 punto por identificar la base.
- ◇ 2 puntos por obtener la solución básica (todo o nada. No asignar puntaje parcial).

(b) **(6 puntos)** Inicie el algoritmo algoritmo simplex en la solución encontrada en (a) y ejecútelo hasta obtener una solución óptima. Identifique el valor óptimo. Justifique si este problema tiene una única solución óptima o no.

Solución:

Comenzamos iterando desde la base $B = \{1, 3\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A_D} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$r_D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Analizando los costos reducidos, vemos que ese vértice no es óptimo y que conviene ingresar x_4 a la base.

Verificando el criterio de salida, vemos que debe salir x_1 dado que $\min_{k \in B:\, \bar{a}_{kj} > 0} \left\{ \frac{\bar{b_k}}{\bar{a_{kj}}} \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \cdot \right\} = 1.$

Luego, la nueva base es $B = \{4, 3\}$ y tenemos que:

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A_D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{A_D} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$r_D^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dado que todos los costos reducidos son no negativos, llegamos a la solución óptima con valor óptimo asociado igual a $v^* = 2$. Como todos los costos reducidos no básicos son positivos, la solución $x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la única solución óptima.

Nota de corrección:

- ◇ 2 puntos por revisar y calcular correctamente costos reducidos de la solución anterior.
- ◇ 1 punto por realizar correctamente el cambio de base.
- ◇ 2 puntos por revisar y calcular correctamente costos reducidos de la solución óptima.
- ◇ 1 punto por identificar que es solución única.

(c) **(4 puntos)** Considere la base asociada a la solución óptima obtenida en (b): ¿En qué rango de valores puede estar el lado derecho de la segunda restricción (actualmente igual a 3) para mantener óptima y factible a dicha base. Si ese lado derecho se modifica a un valor b_2' dentro del rango solicitado: ¿Cuánto cambiará el valor óptimo del problema?

Solución: Consideremos que el nuevo valor es b_2'. La condición de optimalidad no se altera con cambios del lado derecho. Para mantener la base, la solución debe ser factible, es decir $A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ b_2' \end{bmatrix} \geq 0$, es decir, $b_2' \leq 4$.

El cambio de objetivo se puede obtener mirando el precio sombra de la segunda restricción (dado que la restricción no está activa, sabemos que su precio sombra es cero por el teorema de holguras complementarias) y multiplicar por el cambio de lado derecho: $\Delta(FO) = 0 \cdot (b_2' - 3) = 0$. Entonces, en este caso no cambiará el valor óptimo.

Nota de corrección:

- ◇ 2 puntos por identificar el rango (1 punto por entender conceptualmente, 1 por el cálculo).
- ◇ 2 puntos por responder sobre el cambio de objetivo (1 punto por entender conceptualmente y 1 por el cálculo).

(d) **(6 puntos)** Considere la base óptima asociada la solución obtenida en (b). Suponga que el costo de la variable x_1 cambia a $c_1' = 3$. ¿Cambia su solución óptima? Si cambia, entonces identifique cuál es la nueva solución y certifique que es óptima. Si no, pruebe que la solución óptima se mantiene inalterada.

Solución: Es un cambio de un costo de una variable fuera de la base, por lo que debemos revisar su nuevo costo reducido:

$$r_1 = c_1' - c_B^\top \bar{A}_1 = 3 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

En este caso hay incentivos para incorporar a la variable x_1 a la base.

Para determinar qué variable debe salir de la base revisamos el criterio de salida $\text{mín}\{\bar{b_1}/\bar{a}_{11}, \bar{b_2}/\bar{a}_{12}\} = \text{mín}\{1/3, 1/2\} = \{1/3\}$, es decir, sale x_4 de la base.

Ahora tenemos para la nueva base $B = \{1, 3\}$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -5/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 5/6 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} r^\top &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 5/6 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & -1/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La nueva solución óptima es $x*^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

con valor óptimo $v^* = 5/3$.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por identificar que el problema es reevaluar solamente el costo reducido de x_1 y 2 puntos más por recalcularlo sin errores.
- ◇ 1 punto por entender que la base puede ser reciclada y reutilizada para hacer simplex
- ◇ 2 por actualizar la solución óptima desde esa base y probar su optimalidad.

Ayuda: La inversa de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Pregunta 2 (25 puntos)

(a) **(8 puntos)** Considere el siguiente poliedro:

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\,,\, x_1 - x_2 + x_3 \geq -1\,,\, -x_1 - x_2 + x_3 - 1 \leq 0\}$$

(i) **(2 puntos)** Identifique todos sus vértices.

Solución: La descripción de $\mathbb{X}$ consta de 3 restricciones en $\mathbb{R}^3$, por lo que el único vértice está formado al activar todas sus restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Este sistema tiene como única solución a $v = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nota de corrección: 1 punto por entender conceptualmente el problema (3 restricciones l.i. activas) y otro por calcular bien el vértice.

(ii) **(3 puntos)** Certifique que no es un polítopo.

Solución: Hay que probar que el cono recesivo $C(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ es no trivial. Es decir, hay que identificar un rayo $h \neq 0$ tal que $h \in C(\mathbb{X})$, donde

$$C(\mathbb{X}) := \{h \in \mathbb{R}^3 \,|\, h_1 + h_2 + h_3 \geq 0\,,\, h_1 - h_2 + h_3 \geq 0\,,\, -h_1 - h_2 + h_3 \leq 0\}.$$

Hay varios rayos no triviales que cumplen esto (basta indicar uno). Por ejemplo: $h_1 = (1, -1, 0)$, $h_2 = (1, 0, -1)$, $h_3 = (0, 1, 1)$.

Nota de corrección: 1 punto por entender conceptualmente que hacer (obtener h no trivial) y 2 por obtenerlo.

(iii) **(3 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{máx}\{-x_1 + x_2 + x_3 \,|\, x \in \mathbb{X}\}.$$

¿Tiene solución óptima? Entregue una o certifique que no la tiene.

Solución: El problema no tiene solución óptima, pues el problema es factible y existe un rayo en el cono recesivo (por ejemplo $h = (0, 1, 1) \in C(\mathbb{X})$) que tiene producto interno positivo con el vector objetivo $c = (-1, 1, 1)$

Nota de corrección: 1 punto por entender que el objetivo es no acotado y 2 por demostrarlo con un h de certificado.

(b) **(8 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal `(P)`

$$\left.\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x} & 2x_1 + x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 & \leq & 14 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1\,,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(P)}$$

(i) **(2 puntos)** Escriba `(D)` el problema dual de `(P)` y llame y al vector de variables duales.

Solución:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \min\limits_{y} & 14y_1 + 10y_2 + 3y_3 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 2y_2 + y_3 & \geq & 2 \\ & 2y_1 - y_2 - y_3 & \geq & 1 \\ & y_1\,,\, y_2\,,\, y_3 & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(D)}$$

Nota de corrección: 2 puntos por escribir el problema. Cualquier error es un punto. Dos o más es cero.

(ii) **(2 puntos)** Considere la solución $\tilde{x} = (\frac{20}{3}, x_2)$. Determina condiciones sobre x_2 para que sea primal factible.

Solución: Reemplazando $x_1 = \frac{20}{3}$ en las restricciones primales se tiene:

- $x_2 \leq \frac{11}{3}$
- $x_2 \geq \frac{10}{3}$
- $x_2 \geq \frac{11}{3}$

Por lo que la única solución es $\tilde{x} = (\frac{20}{3}\,,\, \frac{11}{3})$.

Nota de corrección: 1 punto por entender que hacer y otro por calcularlo.

(iii) **(4 puntos)** Muestre que $\tilde{x}$ es solución óptima para `(P)` y determine una solución dual óptima $\tilde{y}$ asociada.

Solución: El teorema de holguras complementarias dice que el par de variables primal-dual factibles $x^\star$, $y^\star$ son óptimas para `(P)` y `(D)` respectivamente ssi satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} y_1(x_1 + 2x_2 - 14) &= 0 \\ y_2(2x_1 - x_2 - 10) &= 0 \\ y_3(x_1 - x_2 - 3) &= 0 \\ x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 - 2) &= 0 \\ x_2(2y_1 - y_2 - y_3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si se evalúa con $x = \tilde{x}$, se tiene

$$\begin{aligned} y_1 \cdot 0 &= 0 \\ y_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) &= 0 \\ y_3 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $\tilde{y_2} = 0$. Reemplazando en las ecuaciones restantes se tiene

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 2 \\ 2y_1 - y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Cuya única solución es $\tilde{y_1} = 1$, $\tilde{y_3} = 1$.
Si es que el vector $\tilde{y} = (1, 0, 1)$ es dual factible, entonces por el teorema de holguras complementarias el par $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ son primal-dual óptimos.
Reemplazando en las restricciones de `(D)` se tiene

$$\begin{aligned} 2 &\geq 2 \\ 1 &\geq 1 \\ (1, 0, 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{x}$ es primal óptimo e $\tilde{y}$ es dual óptimo.
Nota de corrección: Hay varias forma de hacer esto. Por holgura complementaria es lo más fácil, pero podría optimizar el dual y llegar al mismo objetivo. 2 puntos por presentar una forma correcta de responder y 2 más por responder numéricamente bien. Todo o nada en ambas cosas, es decir, la pregunta puede tener 0, 2 o 4 puntos.

(c) **(9 puntos)** Para cada una de las siguientes afirmaciones: Demuestre matemáticamente su veracidad o entregue un contraejemplo que certifique su falsedad.

(i) **(3 puntos)** Considere un poliedro $\mathbb{X}$ cualquiera en forma estándar. En $\mathbb{X}$ siempre hay igual cantidad de bases factibles que vértices (es decir, puntos extremos).
Solución: Falso. Pueden haber múltiples bases factibles que representan un solo vértice (caso degenerado). Por ejemplo, el poliedro $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 0\,,\, x \geq 0\}$ tiene dos bases $B_1 = \{1\}$ y $B_2 = \{2\}$ y un solo vértice $(0, 0)$.

Nota de corrección: En todas las preguntas de V o F asignar 1 punto por responder bien y 2 por justificarla correctamente.

(ii) **(3 puntos)** El conjunto de soluciones óptimas de un problema factible y acotado de optimización lineal es siempre acotado.

Solución: Falso. El siguiente problema posee un conjunto de soluciones óptimas no acotado: mín$\{x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2 \geq 0\}$.

(iii) **(3 puntos)** El conjunto de soluciones óptimas de un problema factible y acotado de optimización lineal es siempre un poliedro.

Solución: Verdadero. Consideremos cualquier problema lineal continuo factible y acotado mín$\{c^\top x \,|\, Ax \leq b\}$ y su valor óptimo v^*. Su conjunto de soluciones óptimas es el poliedro definido por las siguientes finitas desigualdades lineales $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b, c^\top x \leq v^*\}$.

Pregunta 3 (15 puntos)

El equipo docente de un curso desea formar grupos de estudiantes para su proyecto semestral. Para esto, considere $\mathcal{E} = \{1, ..., E\}$ como el conjunto de los E estudiantes del curso y $\mathcal{G} = \{1, ..., G\}$ como el conjunto de los grupos, donde G es el máximo número de grupos a formar. Considere que pueden quedar índices de grupos sin usarse, es decir, sin estudiantes asignados. Cada estudiante debe estar exactamente en un solo grupo y existen suficientes grupos para cubrir a todos los estudiantes.

Cada grupo con estudiantes debe satisfacer las siguientes reglas. Primero, deben formarse grupos con al menos cuatro y no más de cinco estudiantes. Segundo, se exigen ciertas restricciones para balancear grupos de acuerdo a las características de sus integrantes. Para ello, cada estudiante $e \in \mathcal{E}$ tiene un indicador de sexo s_e, donde $s_e = 0$ si es masculino y 1 si es femenino. No se puede formar grupos con exactamente un integrante de sexo femenino (es decir, o no tiene o hay al menos dos en el grupo). Además, hay un curso optativo que es importante para el proyecto, por lo que se define $c_e \in \{0, 1\}$ que indica si el estudiante $e \in \mathcal{E}$ hizo el curso o no. Se pide que cada grupo a formar tenga al menos un estudiante que haya hecho el curso optativo. Finalmente, se desea minimizar la cantidad de grupos a utilizar para reducir el trabajo de corrección del equipo docente.

(a) **(8 puntos)** Formule un modelo de programación lineal entero mixto que represente este problema describiendo claramente todos sus componentes (variables, restricciones y función objetivo). Defina y explique cualquier notación adicional.

Solución: Variables:

- $x_g \in \{0, 1\}$: indica si el grupo $g \in \mathcal{G}$ está abierto (tiene integrantes) o no.
- $y_{eg} \in \{0, 1\}$: indica si el estudiante $e \in \mathcal{E}$ está asignado al grupo $g \in \mathcal{G}$ o no.

Modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g & & \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{g \in \mathcal{G}} y_{eg} = 1 & \forall e \in \mathcal{E} & \quad (1a) \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}} y_{eg} \geq 4x_g & \forall g \in \mathcal{G} & \quad (1b) \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}} y_{eg} \leq 5x_g & \forall g \in G & \quad (1c) \\
& 2y_{eg} \cdot s_e \leq \sum_{a \in \mathcal{E}} y_{ag} \cdot s_a & \forall e \in \mathcal{E},\ g \in \mathcal{G} & \quad (1d) \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}} y_{eg} \cdot c_e \geq x_g & \forall g \in \mathcal{G} & \quad (1e) \\
& x_g \in \{0, 1\} & \forall g \in \mathcal{G} & \quad (1f) \\
& y_{eg} \in \{0, 1\} & \forall e \in \mathcal{E},\ g \in \mathcal{G} & \quad (1g)
\end{aligned}
$$

La restricción (1a) fuerza a que todo estudiante esté en exactamente un grupo, mientras que (1b) y (1c) modelas la capacidad mínima y máxima de cada grupo con al menos un estudiante. Además, la restricción (1c) abre/activa el grupo cuando hay al menos un estudiante en el. La restricción (1d) fuerza la restricción de sexo femenino y la restricción (1e) modela la condición de que al menos un integrante haya hecho el curso optativo.

Observaciones:

- Se necesita al menos un conjunto de variables para asignar estudiantes a grupos y un grupo de variables para abrir/activar los grupos
- Se pueden ocupar variables adicionales para modelar ciertas relaciones lógicas, como la condición de integrantes de sexo femenino.
- Como siempre, varias restricciones se pueden modelar diferente aún con estas mismas variables.

Nota de corrección:

- 1 punto por definir los dos grupos mínimos de variables. Variables auxiliares o extra no tienen puntaje.
- 1 punto por función objetivo.
- 1 punto por asignar estudiantes a un solo grupos.

- ◇ 1 punto por mínimo y máximo de estudiantes en grupos activos/abiertos.
- ◇ 1 punto por relacionar variable de asignación con variable de grupo. Nota que no es necesario que se haga directamente en la restricción (1c) como sale en la pauta. Puede ponerse como una restricción extra.
- ◇ 2 puntos por condición de sexo femenino.
- ◇ 1 punto por condición de curso optativo.

Se dará puntaje total, parcial o cero siguiendo los siguientes criterios. No se puede obtener puntajes intermedios que no sean estos.

- ◇ Todo el puntaje si esta totalmente correcto
- ◇ La mitad del puntaje si hay errores menores, es decir, faltó algún detalle, pero iba bien encaminado. Por ejemplo, faltó poner x_g en la restricciones (1b) o (1e). Otro ejemplo, solo puso la mitad de las variables necesarias.
- ◇ Cero puntos si no está lo pedido en el modelo o si hay errores mayores. Por ejemplo, multiplicación de variables, falta una sumatoria o un "para todo".

Agregar restricciones inválidas, es decir, que restringen más allá el dominio de lo solicitado produce un descuento de 2 puntos en el puntaje de la pregunta.

(b) **(2 puntos)** En años anteriores, los estudiantes no han quedado conformes con su grupo ya que a veces quedan asignados con personas con las que no desean trabajar. Por lo mismo, se le ha pedido a cada estudiante $e \in \mathcal{E}$ que indique como máximo a cuatro personas que **no quiere** en su grupo. Sea A_e el conjunto de estudiantes que no pueden estar asignados en el mismo grupo que el estudiante $e \in \mathcal{E}$ y asuma que $e \notin A_e$. Incorpore esta nueva restricción en tu modelo de la parte (a) y defina claramente cualquier nueva variable que ocupes.

Solución: El nuevo modelo no necesita ninguna variable adicional y está dado por:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g \\ \text{s.a.} \quad & (1a) - (1g) \\ & y_{eg} \leq 1 - y_{ig} \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ i \in A_e,\ g \in \mathcal{G} \qquad (2a) \end{aligned}$$

La nueva restricción fuerza que si $e \in \mathcal{E}$ está asignado al grupo $g \in \mathcal{G}$, entonces nadie en A_e puede estar asignado a ese grupo

Observaciones de corrección:

- ◇ Se podrían ocupar variables extras, pero deben estar bien explicadas y funcionar correctametne en el modelo. De no ser así, se descuenta 1 punto.
- ◇ La condición pedida puede ser modelada de otras formas, pero debe representar lo mismo.
- ◇ Solo se otorga puntaje por nueva condición modelada. No es necesario replicar el modelo de la parte (a) como se muestra en la pauta.
- ◇ Seguir mismo esquema que en la pregunta anterior para puntaje total, parcial o cero.

(c) **(5 puntos)** Ahora considere que cada estudiante $e \in \mathcal{E}$ tiene un promedio ponderado de notas (PPA), dado por $1 \leq p_e \leq 7$. El equipo docente desea ocupar esta información para que los grupos sean homogéneos en notas. Cambie la función objetivo del modelo en (a) para que ahora se minimice la máxima dispersión de PPA sobre todos los grupos. La dispersión de PPA de un grupo es la diferencia de PPA entre el integrante con mayor PPA y el integrante con menor PPA. Por ejemplo, si un grupo tiene cuatro integrantes con PPA 4.5, 5.0, 4.8 y 4.3, la dispersión del grupo es 5.0 - 4.3 = 0.7. Indique y explique claramente la nueva función objetivo y cualquier nueva variables y/o restricción que requieras definir.

Solución: Agregamos dos nuevas variables para obtener el PPA mínimo y máximo de cada grupo:

- ◇ p_g^{max}: PPA máximo del grupo $g \in \mathcal{G}$
- ◇ p_g^{min}: PPA mínimo del grupo $g \in \mathcal{G}$
- ◇ z: máxima dispersión.

El modelo con la nueva función objetivo, variables y restricciones es:

$$
\begin{aligned}
&\text{mín } z \\
&\text{s.a. } (1a) - (1g) \\
&\quad (p_g^{max} - p_g^{min}) \leq z && \forall g \in \mathcal{G} && (3a)\\
&\quad p_e \cdot y_{eg} \leq p_g^{max} && \forall e \in \mathcal{E}\ , g \in \mathcal{G} && (3b)\\
&\quad p_e \cdot y_{eg} \geq p_g^{min} && \forall e \in \mathcal{E}\ , g \in \mathcal{G} && (3c)\\
&\quad 0 \leq p_g^{max}, p_g^{min} && \forall e \in \mathcal{E},\ g \in \mathcal{G} && (3d)
\end{aligned}
$$

Las restricciones (3b) y (3c) modelan el PPA máximo y mínimo de cada grupo, respectivamente. La restricción (3a) calcula la dispersión máxima de todos los grupos.

Observaciones de corrección:

- ◇ Se necesitan variable auxiliares para obtener PPA mínimo y máximo, y también para la dispersión máxima.
- ◇ Solo se otorga puntaje por nuevas condiciones, función objetivo y variables. No es necesario replicar el modelo de la parte (a) como se muestra en la pauta.
- ◇ Seguir mismo esquema que en la pregunta anterior para puntaje total, parcial o cero.

Pauta de corrección:

- ◇ 1 punto por definir todas las nuevas variables necesarias para el modelo.
- ◇ 1 punto por función objetivo.
- ◇ 2 puntos por modelar correctamente las restricciones que calculan el PPA mínimo y máximo de cada grupo.
- ◇ 1 punto por restricción que computa la dispersión máxima.