Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingenieria Industrial y de Sistemas
ICS1113 - Optimización
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Matías Villafranca.
Ayudante coordinador de tareas: Benjamín Rojas.

Tarea 1 ICS1113 - 2do semestre 2025

Reglas:

1. El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la evaluación presencial posterior.

2. Si la entrega es en pareja, entonces solo un integrante debe subir la tarea en Canvas hasta el 12/09/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.

3. No se asignará puntaje fraccionario en cada pregunta.

4. El formato de entrega es un archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de sus integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. Como archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto LaTeX o código de gurobi si corresponde. Se bonificará con 3 décimas en esta tarea a quienes utilicen LaTeX (y entreguen el .tex que lo verifique).

5. Se habilitará un foro en Canvas en donde se responderá dudas del enunciado.

Pregunta 1 [6 puntos]

Usted se encuentra planificando sus próximas vacaciones, las cuales llevará a cabo durante un conjunto $T = \{1, 2, \ldots, \mathcal{T}\}$ de días. Como quiere sacarle el mayor provecho a estas vacaciones, usted desea definir que actividades de un conjunto $A = \{1, 2, \ldots, \mathcal{A}\}$ realizará durante cada día. En particular, la actividad $a \in A$ le genera una utilidad de u_a en términos de satisfacción personal, y realizar dicha actividad durante el día t le supone un costo de $\$c_{at}$. Además, si realiza las actividades $a \in A$ y $b \in A$ tal que $b > a$ durante el mismo día $t \in T$, usted ahorrará $\$s_{abt}$. Asuma que cuenta con un presupuesto diponible dado por $\$\mathcal{P}$ para sus vacaciones. Considere que debe realizar un mínimo de $\mathcal{L} \in \mathbb{Z}_+$ y un máximo de $\mathcal{U} \in \mathbb{Z}_+$ actividades diarias, que no se puede repetir la misma actividad durante todas las vacaciones, y que por razones climáticas definió un conjunto Π que contiene pares de números $(a, t) \in \Pi$, donde cada uno obliga a no realizar la actividad a en el día t.

Formule un modelo de optimización lineal con variables binarias que le permita planificar unas vacaciones de máxima utilidad. Detalle variables, objetivo y restricciones.

Solución:

Variables de decisión y objetivo [2 puntos si está completamente correcto].
$x_{at} \in \{0, 1\}$: $x_{at} = 1$ si se realiza la actividad $a \in A$ durante el día $t \in T$, $x_{at} = 0$ en caso contrario.
$y_{abt} \in \{0, 1\}$: $y_{abt} = 1$ si las actividades $a \in A$ y $b \in A : b > a$ se realizan durante el día $t \in T$, $y_{abt} = 0$ en caso contrario.

Objetivo[1 punto si está completamente correcto]. Maximizar la utilidad total:

$$\text{máx} \sum_{a \in A} \sum_{t \in T} u_a x_{at}. \tag{1.1}$$

Restricciones. [3 puntos si todo está completamente correcto. 2 puntos si falta algo menor (naturaleza de vars, indices), 1 punto si hay error mayor (falta o sobra una restricción), 0 puntos en otro caso].

1. No sobrepasar el presupuesto:

$$\sum_{a \in A} \sum_{t \in T} c_{at} x_{at} - \sum_{a \in A} \sum_{\substack{b \in A \\ b > a}} \sum_{t \in T} s_{abt} y_{abt} \leq \mathcal{P}. \tag{1.2}$$

2. Relación entre y y x:

$$y_{abt} \leq x_{at} \quad \forall a \in A,\ b \in A : b > a,\ t \in T, \tag{1.3}$$

$$y_{abt} \leq x_{bt} \quad \forall a \in A,\ b \in A : b > a,\ t \in T. \tag{1.4}$$

3. Mínimo y máximo de actividades por día:

$$\mathcal{L} \leq \sum_{a \in A} x_{at} \leq \mathcal{U} \quad \forall t \in T. \tag{1.5}$$

4. Realizar cada actividad como máximo una vez durante todas las vacaciones:

$$\sum_{t \in T} x_{at} \leq 1 \quad \forall a \in A. \tag{1.6}$$

5. Actividades que no se pueden realizar por día:

$$x_{at} = 0 \quad \forall (a,t) \in \Pi. \tag{1.7}$$

6. Naturaleza de las variables de decisión:

$$x_{at} \in \{0,1\} \quad \forall a \in A,\ t \in T, \tag{1.8}$$

$$y_{abt} \in \{0,1\} \quad \forall a \in A,\ b \in A : b > a,\ t \in T. \tag{1.9}$$

NOTAS:

1. Se pueden evitar las restricciones (1.7) si es que se define $x_{at} \in \{0,1\} \quad \forall a \in A, t \in T : (a,t) \notin \Pi$ y se usa esa condición en todas las expresiones que involucren a x.

Pregunta 2 [6 puntos]

Contexto. Usted está a cargo de una empresa que elabora platos de comida preparados y busca definir su plan de compra de ingredientes, producción de platos y gestión de inventario para los siguientes $\mathcal{T}$ periodos, indexados por el conjunto $T = \{1, \ldots, \mathcal{T}\}$. En específico, su empresa prepara un conjunto I de tipos de plato a partir de un conjunto J de diferentes ingredientes. Su objetivo es definir la cantidad (en gramos) de cada ingrediente a comprar y/o mantener en inventario, además de la cantidad (en unidades) de cada tipo de plato a producir y/o mantener en inventario a lo largo del horizonte de planificación.

Demanda. Se estima que se requiere de d_{it} platos del tipo $i \in I$ en el periodo $t \in T$.

Producción. Por receta, para producir un plato del tipo $i \in I$, solo se pueden utilizar los ingredientes $j \in J_i \subseteq J$. Además, por políticas de calidad, cada plato tipo $i \in I$ debe pesar exactamente α_i gramos, y poseer un mínimo de β_{ij} gramos del ingrediente $j \in J_i$. Note que los datos hacen sentido si $\sum_{j \in J_i} \beta_{ij} \leq \alpha_i$ para todo $i \in I$.

Inventarios. El inventario inicial del plato $i \in I$ es de γ_i unidades y el inventario inicial del ingrediente $j \in J$ es de $\hat{\gamma}_j$ gramos. Cada unidad del plato $i \in I$ tiene una vida útil de $\theta_i \leq T$ periodos, y cada unidad del ingrediente $j \in J$ una vida útil de $\hat{\theta}_j \leq T$ periodos. Suponga que siempre debe satisfacer a tiempo la demanda del cliente, que no puede botar platos ni ingredientes a la basura, y que sus platos e ingredientes no deben vencer. Asuma que tiene espacio suficiente para guardar cualquier tipo de plato o ingrediente.

Costos. Los costos son los siguientes. Si usted produce cualquier cantidad del plato tipo $i \in I$ durante el periodo $t \in T$, entonces incurre en un costo fijo de $\$k_{it}$ por iniciar la producción (independiente de la cantidad producida), más un costo variable $\$c_{it}$ por unidad producida. Además, usted paga un costo de $\$h_{it}$ por unidad del plato $i \in I$ guardada en inventario desde el periodo t hasta el periodo $t+1$. Por otro lado, si usted compra el ingrediente $j \in J$ durante el periodo $t \in T$, incurrirá en un costo fijo de $\hat{k}_{jt}$ y un costo variable de $\hat{c}_{jt}$ por gramo comprado. Adicionalmente, por cada gramo de ingrediente $j \in J$ en inventario desde el periodo t hasta el periodo $t+1$, usted percibirá un costo de $\hat{h}_{jt}$.

Problema. Formule un modelo de optimización lineal entera mixta que le permita planificar sus compras, producción e inventario a mínimo costo. Si utiliza alguna restricción tipo M-grande, defina valores adecuados para M en función de los parámetros del problema. Hint: para fines de su modelación, puede considerar $I_j \subseteq I$ como el conjunto de platos que contienen el ingrediente $j \in J$.

Solución:

Variables de decisión [2 puntos si está todo correcto. 1 punto si hay un error, o falta de alguna variable clave. 0 puntos en otro caso].
$x_{it} \in \{0,1\}$: $x_{it} = 1$ si se produce el plato $i \in I$ en el periodo $t \in T$, $x_{it} = 0$ en caso contrario.
$y_{it} \in \mathbb{Z}_+$: unidades del plato $i \in I$ a producir en el periodo $t \in T$.
$z_{it} \in \mathbb{Z}_+$: unidades del plato $i \in I$ en inventario en el periodo $t \in T$.
$\hat{x}_{jt} \in \{0,1\}$: $\hat{x}_{jt} = 1$ si se compra el ingrediente $j \in J$ en el periodo $t \in T$, $\hat{x}_{jt} = 0$ en caso contrario.
$\hat{y}_{jt} \in \mathbb{R}_+$: gramos del ingrediente $j \in J$ a comprar en el periodo $t \in T$.
$\hat{z}_{jt} \in \mathbb{R}_+$: gramos del ingrediente $j \in J$ en inventario en el periodo $t \in T$.
$w_{ijt} \in \mathbb{R}_+$: gramos del ingrediente $j \in J$ utilizados para producir platos tipo $i \in I$ en el periodo $t \in T$.
$\hat{d}_{jt} \in \mathbb{R}_+$: demanda en gramos del ingrediente $j \in J$ en el periodo $t \in T$.

Función objetivo [1 punto si está completamente correcto]. Minimizar costos totales:

$$\text{mín} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (k_{it} x_{it} + c_{it} y_{it} + h_{it} z_{it}) + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \left(\hat{k}_{jt} \hat{x}_{jt} + \hat{c}_{jt} \hat{y}_{jt} + \hat{h}_{jt} \hat{z}_{jt} \right). \tag{2.1}$$

Restricciones. [3 puntos si todo está completamente correcto. 2 puntos si falta algo menor (naturaleza de vars, indices), 1 punto si hay error mayor (falta o sobra una restricción), 0 puntos en otro caso].

1. Relación entre y y x :

$$y_{it} \leq M_i x_{it} \quad \forall i \in I,\ t \in T, \tag{2.2}$$

donde

$$M_i = \sum_{t \in T} d_{it} - \gamma_i \quad \forall i \in I. \tag{2.3}$$

2. Definición de y_{it} :

$$y_{it} = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j \in J_i} w_{ijt} \quad \forall i \in I,\ t \in T. \tag{2.4}$$

3. Mínimo de ingredientes por plato :

$$w_{ijt} \geq \beta_{ij} y_{it} \quad \forall i \in I,\ j \in J_i,\ t \in T. \tag{2.5}$$

4. Inventario de platos :

$$z_{i0} = \gamma_i \quad \forall i \in I, \tag{2.6}$$

$$z_{it} = z_{i,t-1} + y_{it} - d_{it} \quad \forall i \in I,\ t \in T. \tag{2.7}$$

5. Evitar el vencimiento de platos:

$$z_{i0} + \sum_{\tau=1}^{t} y_{i\tau} \leq \sum_{\tau=1}^{t+\theta_i} d_{i\tau} \quad \forall i \in I,\ t \in \{1, \ldots, \mathcal{T} - \theta_i\}. \tag{2.8}$$

6. Definición de $\hat{d}_{jt}$:

$$\hat{d}_{jt} = \sum_{i \in I_j} w_{ijt} \quad \forall j \in J,\ t \in T. \tag{2.9}$$

7. Relación entre $\hat{y}$ y $\hat{x}$:

$$\hat{y}_{jt} \leq \hat{M}_j \hat{x}_{jt} \quad \forall j \in J,\ t \in T, \tag{2.10}$$

donde

$$\hat{M}_j = \sum_{i \in I_j} \sum_{t \in T} \alpha_i d_{it} - \hat{\gamma}_j \quad \forall j \in J. \tag{2.11}$$

8. Inventario de ingredientes :

$$\hat{z}_{0j} = \hat{\gamma}_j \quad \forall j \in M, \tag{2.12}$$

$$\hat{z}_{jt} = \hat{z}_{j,t-1} + \hat{y}_{jt} - \hat{d}_{jt} \quad \forall j \in M,\ t \in T. \tag{2.13}$$

9. Evitar el vencimiento de ingredientes :

$$\hat{z}_{j0} + \sum_{\tau=1}^{t} \hat{y}_{j\tau} \leq \sum_{\tau=1}^{t+\hat{\theta}_j} \hat{d}_{j\tau} \quad \forall j \in J,\ t \in \{1, \ldots, \mathcal{T} - \hat{\theta}_j\}. \tag{2.14}$$

10. Naturaleza de las variables de decisión :

$$x \in \{0,1\}^{I \times T}, \tag{2.15}$$

$$y \in \mathbb{Z}_{+}^{I \times T}, \tag{2.16}$$

$$z \in \mathbb{Z}_{+}^{I \times \{0\} \cup T}, \tag{2.17}$$

$$\hat{x} \in \{0,1\}^{J \times T}, \tag{2.18}$$

$$\hat{y} \in \mathbb{R}_{+}^{J \times T}, \tag{2.19}$$

$$\hat{z} \in \mathbb{R}_{+}^{J \times \{0\} \cup T}, \tag{2.20}$$

$$w_{ijt} \in \mathbb{R}_{+} \quad \forall i \in I,\ j \in J_i,\ t \in T. \tag{2.21}$$

Pregunta 3 [6 puntos]

Considere el siguente problema de optimización lineal

$$\text{máx}\, 4x_1 + 7x_2, \tag{3.1}$$

sujeto a

$$6x_1 + 7x_2 \leq 42, \tag{3.2}$$

$$4x_1 + x_2 \geq 8, \tag{3.3}$$

$$x_1 - x_2 \geq -2, \tag{3.4}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0. \tag{3.5}$$

Responda las siguientes preguntas:

1. **[1 punto]** Defina explícitamente los valores de c, x, A y b obtenidos al escribir el modelo (3.1)–(3.5) en notacion matricial con el formato $\text{máx}\{c^\top x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.
2. **[1 punto]** Adjunte un gráfico sobre un plano cartesiano (x_1, x_2) que ilustre la región factible del modelo de optimización. Puede dibujarlo a mano o utilizando algún software.
3. **[1 punto]** En base al gráfico: determine el conjunto completo de soluciones óptimas y su valor óptimo. Explique su procedimiento.
4. **[1 puntos]** Programe y resuelva este modelo en gurobi. Adjunte un pantallazo de su código y del resultado de la consola de gurobi.
5. **[2 puntos]** ¿En qué espacio 2D de valores reales pueden estar los coeficientes p_1 y p_2 de la función objetivo (actualmente $p_1 = 4$ y $p_2 = 7$) para mantener inalterado el conjunto de soluciones óptimas?

Solución.

1. [1 punto si está todo correcto. 0 puntos en caso contrario].
   $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 42 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. [1 punto si está todo correcto. 0 puntos en caso contrario].
   El gráfico se muestra a continuación

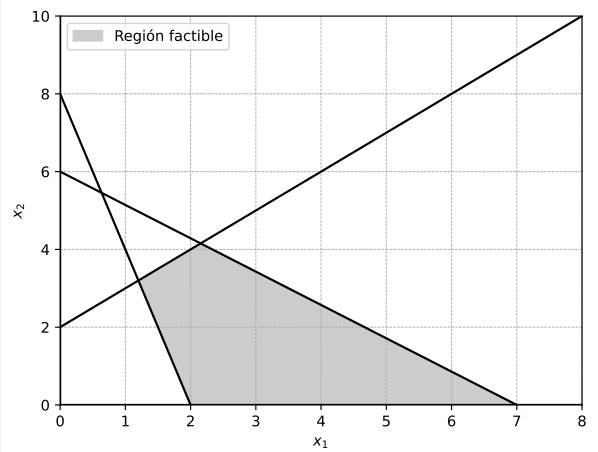


Figura 1: Plano cartesiano con región factible.

3. [1 punto si está todo correcto. 0 puntos en caso contrario]. En base a la dirección de crecimiento de la función objetivo $\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix}$, el conjunto de soluciones óptimas es $\left\{(\frac{28}{13}, \frac{54}{13})\right\}$, es decir, solo hay una solución óptima. El valor óptimo es $\frac{490}{13}$. Esto queda más claro en el siguiente gráfico:

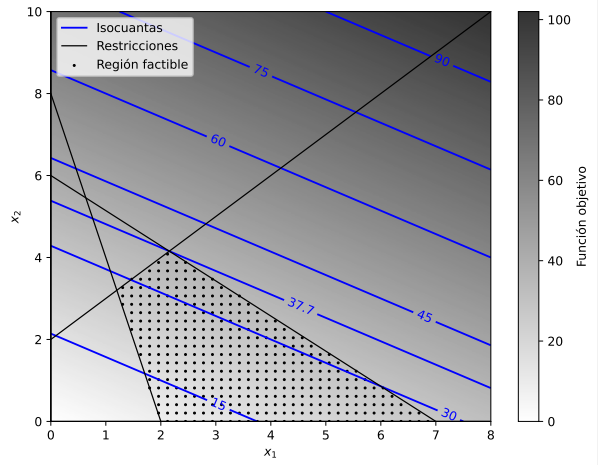


Figura 2: Región factible, mapa de calor e isocuantas.

4. [1 punto si está todo correcto. 0 puntos en caso contrario]. A continuación se muestra el código implementado

```
[1]
1  from gurobipy import Model, GRB
✓ 0.0s

1  # Crear un nuevo modelo
2  model = Model("Pregunta_3")
3
4  # Agregar variables
5  x_1 = model.addVar(name="x_2", lb=0)
6  x_2 = model.addVar(name="y_2", lb=0)
7
8  # Definir función objetivo
9  model.setObjective(4 * x_1 + 7 * x_2, GRB.MAXIMIZE)
10
11 # Agregar restricciones
12 model.addConstr(6 * x_1 + 7 * x_2 <= 42)
13 model.addConstr(4 * x_1 +     x_2 >= 8 )
14 model.addConstr(    x_1 -     x_2 >= -2)
15
16 # Optimizar
17 model.optimize()
18
19 # Mostrar resultados
20 if model.status == GRB.OPTIMAL:
21     print(f"Solución óptima encontrada:")
22     print(f"x_1 = {x_1.X}")
23     print(f"x_2 = {x_2.X}")
24     print(f"Valor objetivo = {model.ObjVal}")
25 else:
26     print("No se encontró solución óptima.")
27
[2]
✓ 0.0s
```

Figura 3: Código en python.

Los resultados de la consola de gurobi son

```
Set parameter Username
Set parameter LicenseID to value 2585095
Academic license - for non-commercial use only - expires 2025-11-14
Gurobi Optimizer version 12.0.0 build v12.0.0rc1 (win64 - Windows 11.0 (26100.2))

CPU model: AMD Ryzen 7 4700U with Radeon Graphics, instruction set [SSE2|AVX|AVX2]
Thread count: 8 physical cores, 8 logical processors, using up to 8 threads

Optimize a model with 3 rows, 2 columns and 6 nonzeros
Model fingerprint: 0x41265e11
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 7e+00]
  Objective range  [4e+00, 7e+00]
  Bounds range     [0e+00, 0e+00]
  RHS range        [2e+00, 4e+01]
Presolve removed 3 rows and 2 columns
Presolve time: 0.01s
Presolve: All rows and columns removed
Iteration    Objective       Primal Inf.    Dual Inf.      Time
       0    3.7692308e+01   0.000000e+00   0.000000e+00      0s

Solved in 0 iterations and 0.01 seconds (0.00 work units)
Optimal objective  3.76923076 9e+01
Solución óptima encontrada:
x_1 = 2.1538461538461537
x_2 = 4.153846153846153
Valor objetivo = 37.692307692307686
```

Figura 4: Resultados consola gurobi.

5. [2 puntos si está todo correcto. 1 punto si tiene errores menores (analiza fijando $p_1 = 4$ y luego

varía p_2 o viceversa, tiene algún error de arrastre en el cálculo). 0 puntos en otro caso]. Como vemos en el punto 3, para $p_1 = 4$ y $p_2 = 7$ las restricciones activas son (3.2) y (3.4). Para que el conjunto de soluciones óptimas no cambie, el ratio de los coeficientes de costo debe estar contenido en el intervalo formado por el ratio de los coeficientes de las restricciones activas, es decir

$$\frac{p_1}{p_2} \in \left(-1, \frac{6}{7}\right).$$

Esto es equivalente a decir que para cualquier $p_2 \in \mathbb{R}$, $p_1 \in \left(-p_2, \frac{6}{7}p_2\right)$ mantiene el conjunto de soluciones óptimas inalterado.