PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palominos
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Examen

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (18 puntos)

(a) **(12 puntos)** Justifique claramente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Note que el puntaje no estará asignado a "Verdadero" o "Falso", sino a su justificación.

(i) **(2 puntos)** Programación no lineal: Considere el problema $\min\{f(x) : g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$. Un punto completamente interior del espacio de soluciones factibles con gradiente nulo cumple las condiciones de KKT.

Solución: Verdadero. Llamemos $\bar{x}$ al punto interno. Luego, $g_i(\bar{x}) < 0, \forall i$. Por lo tanto, y dado que $\mu_i(g_i(x)) = 0$, se tiene que $\mu_i = 0, \forall i$. Si $\nabla f(\bar{x}) = 0$, la relación

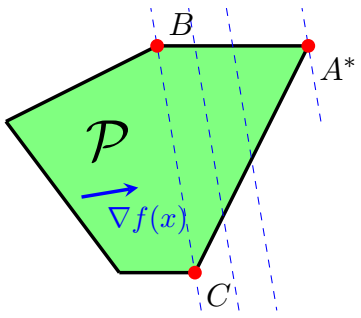
$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

se cumple.

Luego, este punto cumple Karush-Kuhn-Tucker.

(ii) **(2 puntos)** Programación lineal: Si en un poliedro hay dos soluciones que tienen el mismo valor objetivo, entonces ambas son soluciones óptimas del problema y la combinación lineal convexa entre ellas también.

Solución: Falso. En el poliedro podrían haber dos soluciones que valgan lo mismo (estén en la misma curva de nivel), y no ser óptimas. En el gráfico, B y C están en la misma curva de nivel, pero no son óptimas.



(iii) **(2 puntos)** Flujo en redes: El problema de flujo máximo es un caso particular del problema de flujo a costo mínimo.

Solución: Verdadero. Basta con reformular el problema de flujo máximo como uno de recirculación (sin flujos exógenos, y entonces, oferta y demanda 0 en todos los nodos), agregando un arco desde el destino al origen, con capacidad mínima 0 y máxima igual a la suma de las capacidades de los arcos originales, con costo -1, y con el costo de todos los arcos originales igual a 0.

(iv) **(2 puntos)** Simplex: Sea I_R el conjunto de índices de variables no básicas en una iteración. La única forma en que, en una iteración de Simplex, ocurra que $\bar{c}_j = 0$ para algún $j \in I_R$, es en la iteración de la base óptima.

Solución: Falso. Puede ocurrir también para una primera iteración en que la restricción coincide con las curvas de niveles, o también en iteraciones intermedias (en que un borde completo coincide con una curva de nivel).

(v) **(2 puntos)** Programación entera: Considere el contexto de resolver un problema (P) utilizando Branch & Bound. El algoritmo cada vez debe ramificar un problema en dos sub-problemas nuevos, generando dos cortes válidos para (P): uno para cada uno de los sub-problemas generados.

Solución: Falso. Branch & Bound agrega restricciones que podría cortar perfectamente soluciones enteras. Por lo mismo, esas restricciones no son planos cortantes válidos.

(vi) **(2 puntos)** Dualidad: Pedir que se cumpla

$$\min_x \{a^T x : Dx \leq e\} \geq b$$

es equivalente a pedir que se cumpla

$$\exists y \leq 0 : e^T y \geq b \ \wedge \ D^T y = a$$

Solución: Verdadero. Por dualidad fuerte, se tiene que

$$\min_x \{a^T x : Dx \leq e\} = \max_y \{e^T y : D^T y = a \ \wedge \ y \leq 0\}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\min_x \{a^T x : Dx \leq e\} = \underbrace{\max_y \{e^T y : \overbrace{D^T y = a \ \wedge \ y \leq 0}^{(\bullet)}\} \geq b}_{(*)}$$

Ahora, para que se cumpla (*), basta con que exista algún y del sistema (•) tal que haya que $e^T y \geq b$. Así, se llega a lo pedido.

(b) **(3 puntos)** Sea un grafo $G(N, A)$. El algoritmo de Dijkstra con un origen $s \in N$ y un destino $t \in N$ (conocido como Dijkstra uno-a-uno) es fácilmente modificable para que el algoritmo determine, a partir de un origen s, la ruta más corta hacia todos los nodos $i \in N \backslash \{s\}$ (conocido como Dijkstra uno-a-todos). Usted sabe, también, que el problema de la ruta más corta uno-a-uno es posible resolverlo usando Simplex especializado en redes. ¿Cómo puede modificar el grafo $G(N, A)$ de modo que, usando Simplex especializado en redes, pueda determinar la ruta más corta uno-a-todos?

Solución: Basta con que el nodo s tenga una oferta de $|N| - 1$ y que todos los nodos restantes tengan demanda de 1. Así, al resolver con Simplex especializado en redes, cada unidad encontrará su ruta más corta a cada nodo demandante. El resto del grafo (con arcos sin cotas) se mantiene tal cual.

(c) **(3 puntos)** Suponga que se ha resuelto un problema de programación lineal, siendo su solución óptima única. Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

Solución: Para esto, supongamos que x_j es una variable no básica en la solución óptima. Se sabe que si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor que le entrega el criterio de salida:

$$\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i^*}{\bar{a}_{ij}^*} : \bar{a}_{ij}^* > 0\right\}_{i\in\text{Var.Básicas}} = \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pj}^*}$$

luego, si x_j entra sale x_p (la variable que minimiza la expresión anterior de entre las variables básicas). Este cambio, hace que la función objetivo empeore –en este caso aumente su valor– en:

$$\bar{c}_j^* \cdot \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pj}^*}$$

Ahora, se tiene replicar este procedimiento para toda variable no básica, y la que tenga un menor resultado en el aumento del valor de la función objetivo, obteniendo entonces la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(10 puntos)** En el Metro de Santiago, las Líneas 1, 2 y 5 están interconectadas a través de Vías de Enlace por la Estación Los Héroes. Cada una de estas líneas cuenta con Cocheras (donde se estacionan los trenes que no se ocupan) y Taller de Mantenimiento de trenes (donde se revisan/reparan los trenes) en las estaciones: Neptuno (para la Línea 1), Lo Ovalle (para la Línea 2) y San Eugenio (para la Línea 5). Al final de cada hora punta los trenes que ya no son requeridos son enviados a las Cocheras y otros trenes son enviados al Taller para sus mantenimientos planificados.

Según el plan de mantenimiento, se deben enviar:

- ◇ 15 trenes al taller de Neptuno, demorándose 10 minutos en llegar un tren desde L1
- ◇ 6 trenes al taller de Lo Ovalle, demorándose 25 minutos en llegar un tren desde L2
- ◇ 8 trenes al taller de San Eugenio, demorándose 20 minutos en llegar un tren desde L5

Del mismo modo, al terminar la hora punta, se debe enviar:

- ◇ 20 trenes a las Cocheras de Neptuno, demorándose 5 minutos en llegar un tren desde L1
- ◇ 10 trenes a las Cocheras de Lo Ovalle, demorándose 20 minutos en llegar un tren desde L2
- ◇ 20 trenes a las Cocheras de San Eugenio, demorándose 30 minutos en llegar un tren desde L5

Se sabe que usar una Vía de Enlace para cambiar un tren de Línea toma un tiempo de desplazamiento que corresponde a:

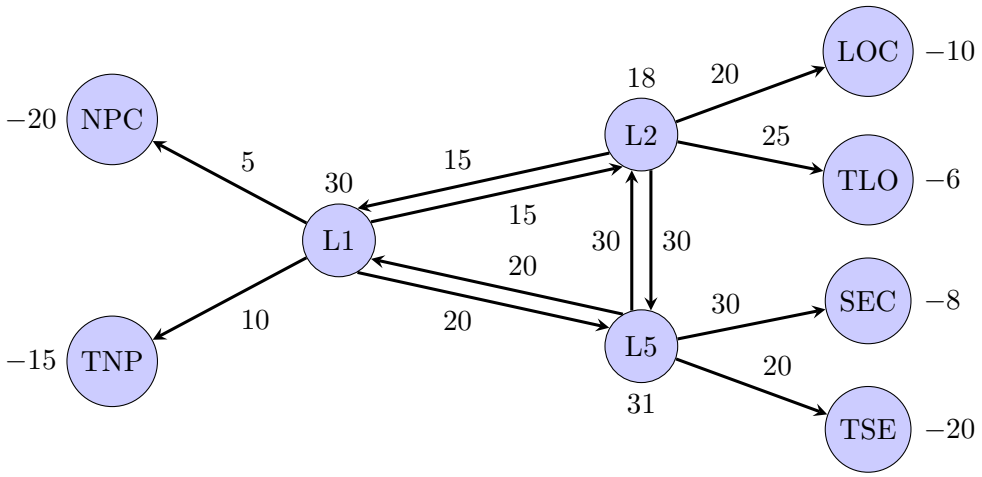
- ◇ 15 minutos desde L1 a L2 (y viceversa)
- ◇ 20 minutos desde L1 a L5 (y viceversa)
- ◇ 30 minutos desde L5 a L2 (y viceversa)

Finalmente, la cantidad de trenes que deben ser enviados a Cocheras o al Taller en cada línea es:

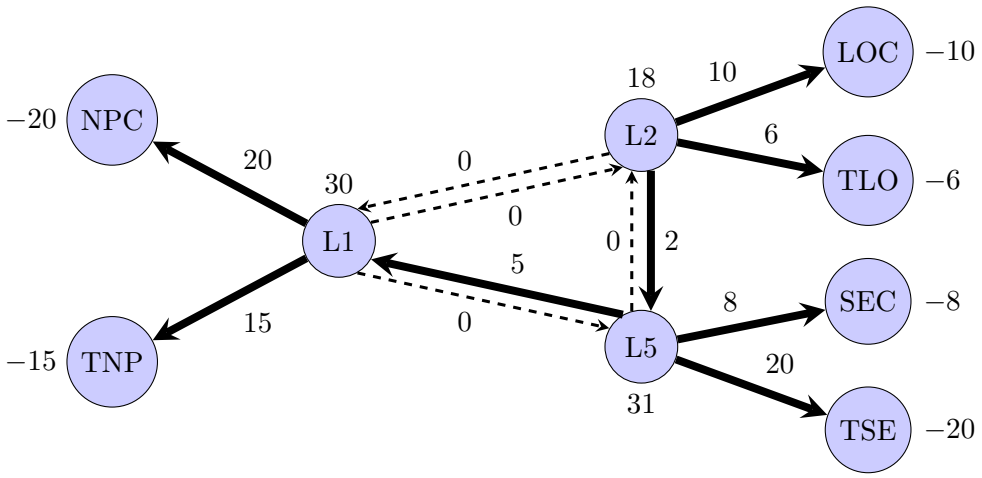
- ◇ 30 trenes para la L1
- ◇ 18 trenes para la L2
- ◇ 31 trenes para la L5

Con la información anterior:

(i) **(3 puntos)** Genere el Grafo Dirigido que representa el problema planteado como un problema de flujo a costo mínimo (tenga en cuenta que lo que se desea es minimizar el tiempo total utilizado en enviar trenes a Cocheras y Talleres).
Solución: El Grafo Dirigido queda de la siguiente forma:



(ii) **(7 puntos)** Considere que una solución factible inicial es que el faltante de Taller y/o Cocheras para la estación de Neptuno provenga de la L5 (5 trenes), que el faltante de Taller y/o Cocheras para la estación de San Eugenio provenga de la línea L2 (2 trenes) y que el Taller y las Cocheras de la estación Lo Ovalle solo reciban trenes de la línea L2. A partir de esta solución, resuelva el problema planteado mediante el Algoritmo de Simplex en Redes. Muestre claramente cuál es la solución al problema y el valor de la función objetivo en el óptimo.
Solución: Mediante el algoritmo Simplex especializado en Redes, utilizamos la solución básica factible inicial dada y comenzamos a evaluar los costos reducidos para obtener los valores de las variables duales.
Por lo que, la SBF inicial es (indicada con los arcos en negrita):



◇ Primera iteración:

Empezamos con los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$$
\begin{aligned}
c_{L1,NPC} &= \pi_{L1} - \pi_{NPC} = 5 \\
c_{L1,TNP} &= \pi_{L1} - \pi_{TNP} = 10 \\
c_{L5,L1} &= \pi_{L5} - \pi_{L1} = 20 \\
c_{L2,L5} &= \pi_{L2} - \pi_{L5} = 30 \\
c_{L2,LOC} &= \pi_{L2} - \pi_{LOC} = 20 \\
c_{L2,TLO} &= \pi_{L2} - \pi_{TLO} = 25 \\
c_{L5,SEC} &= \pi_{L5} - \pi_{SEC} = 30 \\
c_{L5,TSE} &= \pi_{L5} - \pi_{TSE} = 20
\end{aligned}
$$

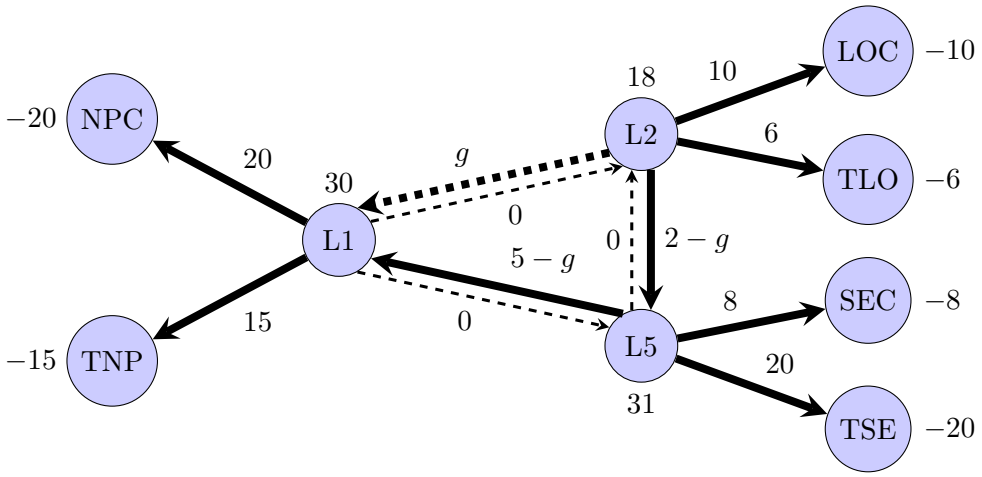
Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_{L5} = 0$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\pi_{L1} = -20,\ \pi_{L2} = 30,\ \pi_{SEC} = -30,\ \pi_{TSE} = -20, \\
&\pi_{NPC} = -25,\ \pi_{TNP} = -30,\ \pi_{LOC} = 10,\ \pi_{TLO} = 5
\end{aligned}
$$

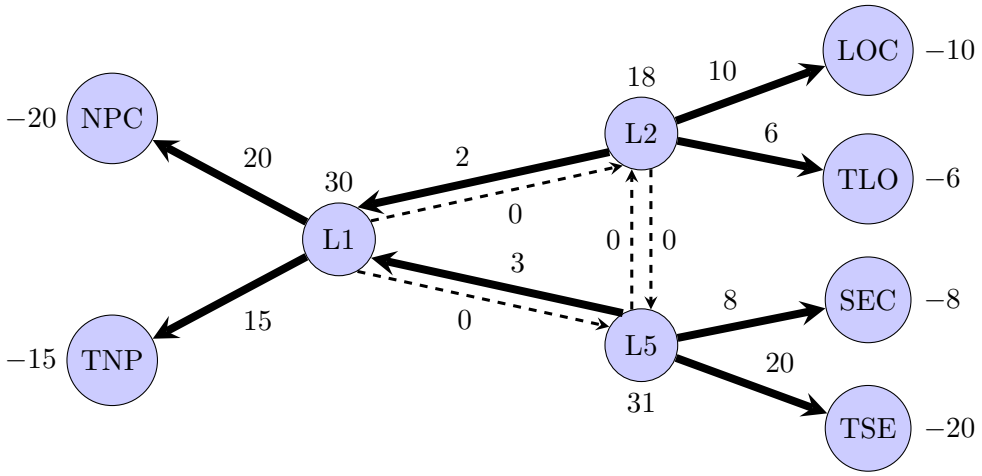
Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{L1,L2} &= c_{L1,L2} - \pi_{L1} + \pi_{L2} = 20 + 15 + 30 = 65 \\
\bar{c}_{L2,L1} &= c_{L2,L1} - \pi_{L2} + \pi_{L1} = 15 - 30 - 20 = -35 \\
\bar{c}_{L1,L5} &= c_{L1,L5} - \pi_{L1} + \pi_{L5} = 20 + 20 + 0 = 40 \\
\bar{c}_{L5,L2} &= c_{L5,L2} - \pi_{L5} + \pi_{L2} = 30 - 0 + 30 = 60
\end{aligned}
$$

Luego, uno de los costos reducidos es < 0, por lo que no estamos en el óptimo. Por lo que el arco $(L2, L1)$ debe entrar a la base y este forma un circuito por el que se debe enviar flujo hasta que uno de los arcos se haga nulo:



Por lo que si se mandan 2 unidades de flujo, el arco $(L2, L5)$ alcanza el valor cero; por lo que este arco sale de la base, quedando:



◇ Segunda iteración:

Empezamos con los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$$
\begin{aligned}
c_{L1,NPC} &= \pi_{L1} - \pi_{NPC} = 5 \\
c_{L1,TNP} &= \pi_{L1} - \pi_{TNP} = 10 \\
c_{L5,L1} &= \pi_{L5} - \pi_{L1} = 20 \\
c_{L2,L1} &= \pi_{L2} - \pi_{L1} = 15 \\
c_{L2,LOC} &= \pi_{L2} - \pi_{LOC} = 20 \\
c_{L2,TLO} &= \pi_{L2} - \pi_{TLO} = 25 \\
c_{L5,SEC} &= \pi_{L5} - \pi_{SEC} = 30 \\
c_{L5,TSE} &= \pi_{L5} - \pi_{TSE} = 20
\end{aligned}
$$

Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_{L1} = 0$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\pi_{L5} = 20,\ \pi_{L2} = 15,\ \pi_{SEC} = -10,\ \pi_{TSE} = 0, \\
&\pi_{NPC} = -5,\ \pi_{TNP} = -10,\ \pi_{LOC} = -5,\ \pi_{TLO} = -10
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:

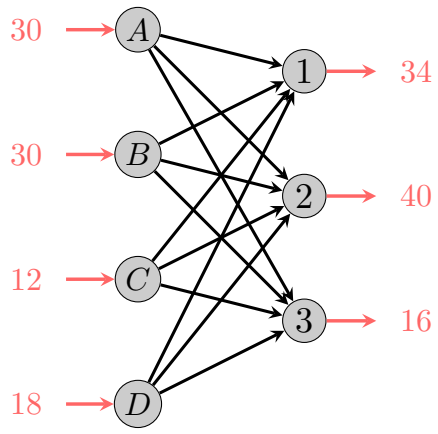
$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{L1,L2} &= c_{L1,L2} - \pi_{L1} + \pi_{L2} = 15 - 0 + 15 = 30 \\
\bar{c}_{L2,L5} &= c_{L2,L5} - \pi_{L2} + \pi_{L1} = 30 - 15 + 20 = 35 \\
\bar{c}_{L1,L5} &= c_{L1,L5} - \pi_{L1} + \pi_{L5} = 20 - 0 + 20 = 40 \\
\bar{c}_{L5,L2} &= c_{L5,L2} - \pi_{L5} + \pi_{L2} = 30 - 20 + 15 = 25
\end{aligned}
$$

Ahora todos los costos reducidos son ≥ 0, por lo que estamos en el óptimo y hemos encontrado el flujo a costo mínimo de la red propuesta.

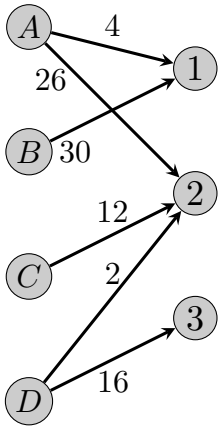
Adicionalmente, verifiquemos cuanto es este costo mínimo:

$z = c_{L1,NPC} \times f_{L1,NPC} + c_{L1,TNP} \times f_{L1,TNP} + c_{L2,L1} \times f_{L2,L1} + c_{L5,L1} \times f_{L5,L1} + c_{L1,L2} \times f_{L1,L2} + c_{L1,L5} \times f_{L1,L5} + c_{L2,L5} \times f_{L2,L5} + c_{L5,L2} \times f_{L5,L2} + c_{L2,LOC} \times f_{L2,LOC} + c_{L2,TLO} \times f_{L2,TLO} + c_{L5,TSE} \times f_{L5,TSE} + c_{L5,SEC} \times f_{L5,SEC} = 5 \times 20 + 10 \times 15 + 15 \times 2 + 20 \times 3 + 15 \times 0 + 20 \times 0 + 30 \times 0 + 30 \times 0 + 20 \times 10 + 25 \times 6 + 20 \times 8 + 30 \times 20 = 1.450$ minutos.

(b) **(3 puntos)** Considere el siguiente grafo, en que la solución básica viene dada por las variables $x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B3}, x_{C2}$ y x_{D2}. Tras estudiar el criterio de optimalidad, resulta que el arco $(D, 3)$ debe entrar a la base. ¿Cuál es la nueva distribución de flujos en la red según Simplex especializado en redes?



Solución: Haciendo la reasignación de flujo correspondiente, la nueva solución queda



Pregunta 3 (15 puntos)

(a) **(10 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \max \quad x_1 & & \\
\text{s.a.} & & \\
x_2 - (1-x_1)^3 & \leq 0 & (1) \\
x_1, x_2 & \geq 0 & (2)
\end{array}
$$

(i) **(2 puntos)** Argumente, utilizando alguno de los teoremas vistos en el curso, la existencia de solución óptima para (P).

Solución: Se observa que f es lineal (polinomio), luego continua sobre el Dominio. Además, el Dominio es no vacío (el punto (0,0) pertenece al Dominio). El Dominio es cerrado, ya que las restricciones son de desigualdad irrestricta (ya que incluyen su frontera), y es acotado pues se tiene que $x_1 \leq 1$ (dado que $x_1, x_2 \geq 0$). Por lo tanto, el teorema de existencia de soluciones de Bolzano-Weierstrass garantiza que el problema (P) admite solución óptima.

(ii) **(2 puntos)** Escriba el Lagrangeano del problema (P).

Solución: El Lagrangeano del problema es (considera que el problema se transformó a un problema de minimización):

- ◇ Opción 1: $\mathcal{L}(x_1, x_2, u_1) = -x_1 + \mu_1(x_2 - (1-x_1)^3)$

◇ Opción 2: $\mathcal{L}(x_1, x_2, u_1) = -x_1 + \mu_1(x_2 - (1-x_1)^3) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)$

(iii) **(2 puntos)** Formule las condiciones de KKT e identifique todos los puntos que las satisfagan.

Solución: Opción 1: las condiciones son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -1 + \mu_1 \left(3\left(1-x_1\right)^2\right) \geq 0$$

$$x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_1 \left(-1 + \mu_1 \left(3\left(1-x_1\right)^2\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \mu_1 \geq 0$$

$$x_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_2 \mu_1 \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$$

$$u_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = \mu_1 \left(x_2 - (1-x_1)^3\right) = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mu_1 \geq 0$$

Opción 2: las condiciones son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -1 + \mu_1 \left(3\left(1-x_1\right)^2\right) - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \mu_1 - \mu_3 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} = -x_1 \leq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3} = -x_2 \leq 0$$

$$\mu_1 \left(x_2 - (1-x_1)^3\right) = 0$$

$$\mu_2 \left(-x_1\right) = 0$$

$$\mu_3 \left(-x_2\right) = 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$

Para cualquiera de las dos opciones de sistema KKT, no existen ningún punto que permita resolver el problema.

(iv) **(2 puntos)** Encuentre la solución óptima del problema de manera gráfica.
Solución: La solución óptima del problema está en el punto (1,0).

(v) **(2 puntos)** Justifique si la solución que obtuvo en (iv) cumple con las condiciones de KKT.
Solución: El punto (1,0) no es regular, por lo tanto no se le pueden aplicar las condiciones de KKT.

(b) **(5 puntos)** Considere un problema de optimización –(P)– definido en las variables x_1 y x_2, con una función objetivo de maximización, y que define el siguiente espacio de restricciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Usted conoce dos de las soluciones factibles para este espacio de soluciones: el punto $(x_1 = 7/3, x_2 = 4/3)$ y el punto $(x_1 = 4, x_2 = 3)$. Se sabe que uno de estos puntos alcanza el valor $25/3$ en la función objetivo, y que en ese punto la variable dual asociada a la primera restricción primal vale $4/3$.

Basándose en la información anterior, determine el valor de las variables duales en el óptimo del problema (P).

Solución: Dado que $y_1 = 4/3$ se sabe (por holguras complementarias) que la primera restricción es activa. Entonces $2x_1 + x_2 = 6$. Así, se puede verificar que de los dos puntos entregados, el punto que satisface esta ecuación es $(x_1 = 7/3, x_2 = 4/3)$ (ya que el otro punto da como valor 11). Al evaluar este punto en las siguientes dos ecuaciones entregadas, se tiene que la segunda es inactiva ($5 < 10$) y la tercera es activa (1=1). Así, se sabe que la variable dual asociada a la segunda restricción $y_2 = 0$ (nuevamente por holguras complementarias).

Construyendo las ecuaciones del dual se tiene:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 &\geq a \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &\geq b \end{aligned}$$

Pero tenemos el punto $(x_1 = 7/3, x_2 = 4/3)$, y se sabe que x_1 es la variable primal asociada a la primera restricción dual y x_2 es la variable primal asociada a la segunda restricción dual, con lo que ambas restricciones deben ser activas (por holgura complementaria). Así, se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 7a/3 + 4b/3 &= 25/3 \qquad \text{(la función objetivo del primal evaluada en } (x_1 = 7/3, x_2 = 4/3)) \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &= a \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &= b \end{aligned}$$

y como se tiene que $y_1 = 4/3$ e $y_2 = 0$ para este punto $(x_1 = 7/3, x_2 = 4/3)$, se resuelve el sistema de ecuaciones que entrega que $a = 3$ y $b = 1$. Con lo que la función objetivo del problema primal es $3x_1 + x_2$.

Teniendo la función objetivo, es fácil de ver (con un gráfico por ejemplo), que el punto óptimo del problema es $(x_1 = 4, x_2 = 3)$ con la segunda y tercera restricciones activas (y entonces $y_1 = 0$), con lo que el sistema de ecuaciones del teorema de holguras complementarias queda, en este caso:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &= 1 \end{aligned}$$

y dado que $y_1 = 0$, se tiene que $y_2 = 4/3$ e $y_3 = 5/3$, valor de las variables duales en el óptimo.

Pregunta 4 (15 puntos)

El gran piloto Roderick lo ha contratado como asesor en la planificación de la carrera de las 500 millas de Indianapolis con el fin de obtener el mejor resultado posible en la carrera, o sea completar el total de vueltas en el menor tiempo posible. Para ello, Roderick le solicita que le indique cuál debiese ser su velocidad promedio en cada una de las 500 vueltas del circuito, considerando el consumo de combustible y desgaste de los neumáticos. Los especialistas le han informado que utilizando una velocidad promedio de i km/hr en una vuelta al circuito, el consumo de combustible del automóvil sería de GB_i litros, generando un desgaste en los neumáticos de DN_i milímetros en cada uno y demorando un total de T_i segundos en completar la vuelta. Considere que existe un conjunto de $I = 0, 1, 2, \ldots, V$ velocidades alcanzables (todas enteras no negativas consecutivas).

Adicionalmente, le informan que la aceleración necesaria del motor para aumentar en 1 km/hr la velocidad promedio del automóvil en una vuelta es de GA litros de combustible. Por otro lado, usted conoce que el desgaste de cada uno de los 4 neumáticos corresponde a DN_i milímetros por vuelta en caso de que el automóvil se encuentre con una velocidad promedio de i kms/hora. Además, los especialistas le han indicado que la fricción generada en los neumáticos para reducir la velocidad promedio del automóvil en 1 km/hr en una vuelta equivale a un desgaste de GR milímetros en cada uno de los 4 neumáticos del automóvil.

Debido a lo extenso de la competencia, usted también debe planificar los momentos en los que se realizará el ingreso a pits, sector donde podrá reabastecerse de combustible y realizar cambios de neumáticos por unos nuevos. Sin embargo, debido a exigencias de seguridad impuestas por la competición, se le indica que la velocidad promedio del automóvil en la última vuelta, previo al ingreso a pits, debe ser a lo más de α km/hr.

Sus mecánicos le han informado que sin importar el trabajo a realizar en pits, existe un tiempo mínimo de detención de TP segundos. Por otro lado le informan que por cada litro de bencina a rellenar en el automóvil se requiere de TB segundos, y por cada rueda a cambiar se requiere de CR segundos. Como información adicional se le informa que la capacidad máxima en litros del estanque del automóvil es de $B_{[}max]$, y el grosor de cada neumático nuevo es de $R_{[}max]$. Afortunadamente, la destreza de sus mecánicos garantiza que se puede trabajar en el cambio de neumáticos y llenado de combustible simultáneamente, por lo que el tiempo total de detención en pits corresponderá al mayor tiempo utilizado entre el llenado de combustible, cambio de ruedas o tiempo fijo de detención (note entonces que se puede ingresar a pits solo a cambiar neumáticos, solo a llenar combustible o a ambas cosas).

Utilizando toda la información anteriormente entregada, genere un modelo de programación lineal que le permita generar una estrategia para finalizar el circuito en el menor tiempo posible, asegurándose de no quedar sin combustible ni pinchar un neumático producto del desgaste total de algún neumático (lo que sucedería si el grosor del neumático fuera menor a un grosor β). A modo de simplicidad del modelo, asuma que la velocidad es medida en unidades enteras, todos los neumáticos se encuentran con su grosor máximo al inicio de la carrera, la salida de pits se realizará a exactamente la misma velocidad promedio con la que realizó el ingreso a éstos, y que el sector de pits se encuentra justo al inicio de cada vuelta.

Solución:

Índices:

- i: unidades de velocidad
- t: vueltas
- j: ruedas

Parámetros:

V_i: Velocidad i

T_i: Tiempo utilizado en dar una vuelta con velocidad promedio i

TM: Tiempo mínimo de permanencia en pits.

TR: Tiempo necesario para cambiar 1 rueda del automóvil.

TB: Tiempo necesario para rellenar 1 litro de combustible al automóvil.

R_{max}: Grosor de ruedas nuevas.

B_{max}: Capacidad máxima del estanque de combustible.

GA: Consumo adicional de combustible por aumentar 1 km/hr la velocidad promedio del automóvil.

GR: Desgaste adicional del grosor de las ruedas por disminuir 1 km/hra la velocidad promedio del automóvil.

GB_i: Consumo de bencina al utilizar una velocidad promedio del automóvil de i km/hr.

DN_i: Desgaste de neumáticos al utilizar una velocidad promedio del automóvil de i km/hr.

M_1: Valor auxiliar grande (velocidad máxima automóvil).

Variables:

X_{ti}: Variable binaria con valor 1 si el automóvil utiliza velocidad promedio i durante la vuelta t, 0 en otro caso.

B_t: Cantidad de bencina al término de la vuelta t del circuito.

R_{tj}: Grosor de la rueda j al término de la vuelta t del circuito.

P_t: Variable binaria con valor 1 si se decide ingresar a pits al comienzo de la vuelta t 0 en otro caso.

TP_t: Tiempo total en pits durante la vuelta t.

G_t: Cantidad de bencina rellenada en pits durante la vuelta t.

CR_{tj}: Variable binaria con valor 1 si la rueda j es cambiada en pits durante la vuelta t, 0 en otro caso.

S_{tj}: Variable auxiliar para la recuperación de grosor de neumáticos.

W_t: Aumento de la velocidad promedio del automóvil durante la vuelta t.

Y_t: Disminución de la velocidad promedio del automóvil durante la vuelta t.

Función objetivo:

$$\min \sum_{t,i} T_i X_{ti} + \sum_t TP_t$$

Restricciones:

R1) Inventario de velocidad promedio del automóvil

$$\sum_i V_i X_i = \sum_i V_i X_{t-1,i} + W_t - Y_t \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Escoger solo 1 velocidad promedio por vuelta y velocidad inicial

$$\sum_i X_{ti} = 1 \quad \forall t$$

$$X_{00} = 1$$

R3) Inventario de combustible y valores máximos

$$B_t = B_{t-1} + G_t - GA \cdot W_t - \sum_i GB_i X_{ti} \qquad \forall t$$

$$B_t \leq B_{max} \qquad \forall t$$

R3) Inventario de grosor de neumáticos y valores máximos

$$R_{tj} = R_{t-1,j} + S_{tj} - GR \cdot Y_t - \sum_i DN_i X_{ti} \qquad \forall t$$

$$R_{tj} \leq R_{max} \qquad \forall t, j$$

R5) Garantizar que no pinchará neumáticos.

$$R_{tj} \leq \beta \qquad \forall t, j$$

R5) Velocidad máxima ingreso a pits.

$$\sum_i V_i X_{ti} \leq \alpha + M(1 - P_t) \quad \forall t$$

R6) No cambiar ruedas a menos de estar en pits y medición de aumento de grosor de neumáticos

$$CR_{tj} \leq P_t \quad \forall t, j$$

$$S_{tj} \leq R_{max} \cdot CR_{tj} \quad \forall t, j$$

R7) No rellenar bencina a menos de estar en pits

$$G_t \leq B_{max} \cdot P_t \quad \forall t, j$$

R8) Tiempo de estadía en pits, menor entre los 3 valores

$$TM \cdot P_t \leq TP_t \quad \forall t$$

$$\sum_j TR \cdot CR_{tj} \leq TP_t \quad \forall t$$

$$TB \cdot B_t \leq TP_t \quad \forall t$$

R9) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} X_{ti} &\in \{0,1\} && \forall t, i \\ CR_{ti} &\in \{0,1\} && \forall t, i \\ P_t &\in \{0,1\} && \forall t \\ G_t &\geq 0 && \forall t \\ S_{ti} &\geq 0 && \forall t, i \\ B_t &\geq 0 && \forall t \\ W_t &\geq 0 && \forall t \\ Y_t &\geq 0 && \forall t \end{aligned}$$