PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado
F. Palomino - A. Cataldo - J. Vera

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 15 de junio.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 15 de Junio a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (3 puntos) Consideremos la función cuadrática:

$$f(x) = x^T Ax$$

con A matriz de $n \times n$ simétrica definida positiva.

i) (2 puntos) Calcule el gradiente de f y deduzca que 0 es el único punto crítico.

ii) (1 punto) ¿Este punto crítico es mínimo global? Justifique su respuesta.

b) (3 puntos) Considere un juego en el que en cada jugada se pueden obtener 0, 2 o 3 puntos. Suponga que un jugador ha completado 11 puntos, queremos saber cuál es la mínima cantidad de jugadas en la que el jugador podría haber obtenido su puntaje.

Modele el problema como un problema de camino más corto. Para ello, diseñe la red sobre la cual podría ejecutar un algoritmo de camino más corto para resolver el problema, justificando cada decisión tomada al modelar. No es necesario que resuelva el problema, pero sí que justifique por qué esa red cumple lo buscado.

c) (2 puntos) Indique una ventaja y una desventaja del método de Newton sobre el método del gradiente.

d) (4 puntos) Sea $G(N, A)$ un grafo dirigido, en que los costos de los arcos satisfacen $c_{ij} \geq 0, \ \forall (i,j) \in A$.

Como sabemos, sobre él se puede resolver el problema de rutas mínimas ejecutando el algoritmo de Dijkstra. Este, dependiendo de nuestro objetivo, podría terminar en dos ocaciones:

- ◇ Uno a todos: Cuando, a partir de un nodo, nos interesa el árbol de rutas óptimas, o la ruta más corta para llegar a todos los nodos, que el algoritmo termina cuando todos los nodos se etiquetan como visitados.
- ◇ Uno a uno: Cuando, a partir de un nodo, nos interesa sólo la ruta óptima a otro nodo, que el algoritmo termina cuando el nodo de interés es etiquetado como visitado.

Considere el problema de rutas mínimas uno a todos resuelto con el algoritmo de Dijkstra, pero en el que sólo se está interesado en conocer la ruta más corta del nodo 1 a un subconjunto T de nodos. Sea:

$$\bar{c} = \min\{c_{it} : (i,t) \in A, t \in T\}$$

Si $\bar{c} > 0$, demuestre que se puede detener el método cuando uno de los nodos k de mínima etiqueta en la lista de nodos no revisados tiene una etiqueta d_k que cumple:

$$d_k + \bar{c} > \max\{d_t : t \in T\}$$

e) (3 puntos) Sea c un punto en $\mathbb{R}^n$. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, donde A es matriz de $m \times n$, con $m \leq n$. Escriba el problema que encuentra el punto en S que se encuentra a menor distancia euclideana del punto c, y determine explícitamente la solución.

Solución Problema 1.

a) i) Notamos que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Luego,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i$$

Por consiguiente,

$$\nabla f(x) = Ax + A^T x = (A + A^T)x = 2Ax$$

Es claro que 0 es punto crítico. Veamos que es el único. Sea x^* un punto crítico cualquiera. Luego

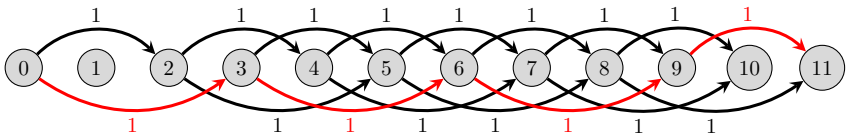
$$2Ax^* = 0$$

Sin embargo, A es definida positiva, luego A es invertible y, así, $x^* = 0$.

ii) El punto crítico 0 es un mínimo global, ya que A es definida positiva, es decir

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \qquad x^T Ax > 0 = f(0)$$

b) Considere una red con nodos que van del 0 al 11, que corresponden a los puntajes obtenidos por el jugador. Los arcos de la red tienen costo igual a 1, y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i (excepto 1), salen dos arcos: uno que avanza dos nodos (2 puntos) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone a continuación (esta omite las jugadas de cero puntos, pero también deberían haber arcos que salgan y entren al mismo nodo con costo 1):



En particular, se observa que la solución de la ruta más corta corresponde precisamente a las 4 jugadas que son el mínimo necesario para alcanzar los 11 puntos. Esta se destaca en rojo y, cabe destacar, no es única.

c) Una ventaja de Newton sobre frente al gradiente es su mejor convergencia.

Una desventaja más importante del método de Newton es que, dependiendo del punto de partida y la función a optimizar, este procedimiento puede alejarse del óptimo y no encontrarlo. Esto nunca ocurre con el método del gradiente.

d) Se puede ver que $\forall t \in T$:

$$d_t \leq \max\{d_s : s \in T\} < d_k + \bar{c} < \infty$$

entonces todos los elementos de T han sido etiquetados (porque tienen etiquetas finitas). Ahora supongamos que se puede encontrar un mejor camino llegando a t que el actual, es decir:

$$\exists i \neq t, d_i + c_{it} < d_t$$

Ahora reconocemos dos casos:

1) Si i está en el conjunto de nodos no revisados, por definición de k se tiene que $d_i \geq d_k$. Además, se tiene que $c_{it} \geq \bar{c}$. Entonces se tiene que:

$$d_k + \bar{c} \leq d_i + c_{it} < d_t$$

lo que contradice que $d_k + \bar{c} > d_t, \forall t \in T$.

2) Si i es el nodo que acaba de salir del conjunto de nodos revisados se debería tener que $d_t \leq d_i + c_{it}$, lo que es una contradicción.

Así, no se puede encontrar un mejor camino llegando a t del actual, por lo que el algoritmo puede detenerse cuando lo propuesto ocurre.

e) El problema queda reducido a resolver (el $\frac{1}{2}$ no es necesario, pero sí ahorra molestias en el cálculo):

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \frac{1}{2}(x-c)^T(x-c) \\ \text{s.a.} & Ax = b \end{array}$$

Para resolverlo, armamos el lagrangeano,

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = (x-c)^T(x-c) + \lambda^T(Ax-b)$$

Derivando, las condiciones de optimalidad de Lagrange quedan:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) &= x - c + A^T\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) &= Ax = b \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema:

$$\begin{aligned} x + A^T\lambda &= c && /A\cdot \\ Ax + AA^T\lambda &= Ac && \text{considerando que } Ax = b \\ AA^T\lambda &= Ac - b \\ \lambda &= (AA^T)^{-1}(Ac-b) \end{aligned}$$

Reemplazando en el primer gradiente,

$$\begin{aligned} x &= c - A^T\lambda \\ x &= c - A^T\left(AA^T\right)^{-1}(Ac-b) \end{aligned}$$

Se puede ir más allá, para obtener una matriz de proyección:

$$x = \left(I - A^T(AA^T)^{-1}A\right)c + A^T(AA^T)^{-1}b$$

Problema 2. (20 puntos)

a) (6 puntos) Se tiene el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & z = -(x_1-1)^2 + x_2 & \\ \text{s.a.} & (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 & \leq 4 \\ & (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 & \leq 4 \end{array}$$

i) (1 punto) Grafique el problema y encuentre el óptimo gráficamente.

ii) (2 puntos) Verifique las condiciones de KKT para el punto encontrado en (i).

iii) (1 punto) ¿Puede aseverar que el punto encontrado en (i) es óptimo global del problema? Justifique.

Suponga que tiene el mismo espacio de soluciones factibles, pero la función objetivo ahora es

$$\text{máx} \quad w = (x_1-1)^2 + x_2$$

iv) (1,5 puntos) ¿El punto encontrado en (i) satisface las condiciones de KKT?

v) (0,5 puntos) ¿Qué se puede concluir entonces del punto encontrado en la parte (i)?

b) (8 puntos) Nuestro amigo Yiyo desea apostar un monto x_0 en una carrera de n caballos, a pesar de que su Tía Marta está muy en contra de todo tipo de apuestas. La probabilidad que gane el i-ésimo caballo es $p_i > 0$ y el monto apostado por los demás jugadores es $s_i > 0$. El premio P a repartir es una fracción $\alpha \in (0,1)$ del total de apuestas, es decir, $P = \alpha(x_0 + S)$ con $S = \sum_{i=1}^n s_i$. Si apostamos $x_i \geq 0$ al i-ésimo caballo y éste gana, obtenemos un premio $Px_i/(s_i + x_i)$ proporcional a nuestra apuesta.

i) (2 puntos) Formule un problema para determinar cómo repartir las apuestas de Yiyo x_i entre los distintos caballos de forma de maximizar el valor esperado del premio.

ii) (2 puntos) Analice la existencia de soluciones y pruebe que ella es única.

iii) (2 puntos) Escriba las condiciones de KKT e indique cómo encontraría la solución óptima.

iv) (2 puntos) Resuelva explícitamente para el caso en que las apuestas s_i son proporcionales a p_i, vale decir $s_i = Sp_i$. ¿Apostará Yiyo en este caso, asumiendo una decisión de conveniencia?

c) (6 puntos) Considere la *función de Rosenbrock*, también conocida como *función banana*:

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 10(y - x^2)^2 :$$

Esta función posee un óptimo en el punto $(x, y) = (1, 1)$.

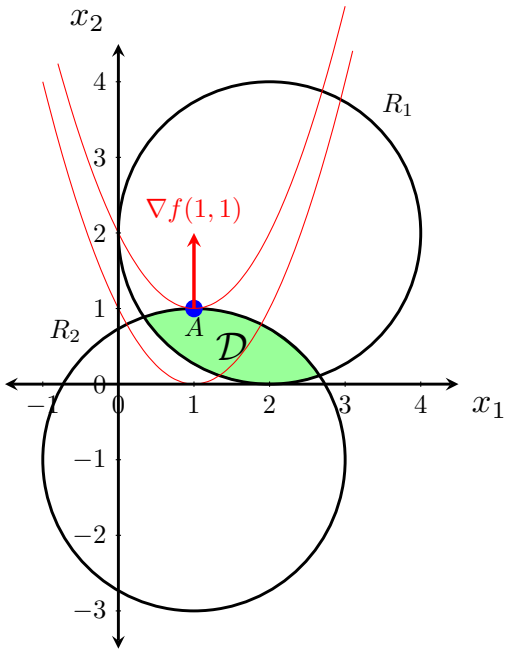
i) (2,5 puntos) Utilice el método del gradiente a paso optimal (o Método de Cauchy) a partir del punto $(3/2, 1/2)$. Haga dos iteraciones. ¿Alcanzó el óptimo?

ii) (2,5 puntos) Utilice el método del Newton a paso fijo a partir del punto $(3/2, 1/2)$. Haga dos iteraciones. ¿Alcanzó el óptimo?

iii) (1 punto) Compare los resultados obtenidos por ambos métodos.

Solución Problema 2.

a) i) El gráfico del problema se presenta a continuación. Dado que al aumentar las curvas de nivel, la parábola se desplaza hacia arriba, el punto óptimo es $A = (1, 1)$:



ii) Del grafo, podemos notar que el punto (1,1) es regular, dado que el gradiente de las restricciones activas en ese punto no son l.d. (porque, después de todo, es una sola). Para utilizar las condiciones estándar, podemos pasar el poblema a la forma estándar para KKT (aunque no es necesario):

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & z = (x_1 - 1)^2 - x_2 & \\ \text{s.a.} & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 & \leq 0 \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 & \leq 0 \end{array}$$

Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2 + \mu_1\big((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4\big) + \mu_2\big((x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4\big)$$

Dado que no hay naturaleza variable, las condiciones de KKT asociadas a él son las que siguen:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{i)} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} & = & 2(x_1-1)+2\mu_1(x_1-2)+2\mu_2(x_1-1) \quad = \quad 0 \\
\text{ii)} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} & = & -1+2\mu_1(x_2-2)+2\mu_2(x_2+1) \quad = \quad 0 \\
\text{iii)} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & (x_1-2)^2+(x_2-2)^2-4 \quad \leq \quad 0 \\
\text{iv)} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & (x_1-1)^2+(x_2+1)^2-4 \quad \leq \quad 0 \\
\text{v)} & \mu_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & \mu_1\big((x_1-2)^2+(x_2-2)^2-4\big) \quad = \quad 0 \\
\text{vi)} & \mu_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & \mu_2\big((x_1-1)^2+(x_2+1)^2-4\big) \quad = \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{vii)} & \mu_1 \geq 0 \\
\text{viii)} & \mu_2 \geq 0
\end{array}
$$

Con (i) y (ii), queda un sistema de 2x2 que podemos resolver considerando que el óptimo es $(x, y) = (1, 1)$.

$$
\begin{array}{llcl}
(a) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} & = & -2\mu_1 \quad = \quad 0 \\
(b) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} & = & -1-2\mu_1+4\mu_2 \quad = \quad 0
\end{array}
$$

De (a) sale que $\mu_1 = 0$ (restricción 1 inactiva, ecuación (v)). Luego, $\mu_2 = \frac{1}{4}$.

Luego, es posible verificar que el punto óptimo $\vec{x^*} = (x_1, x_1, \mu_1, \mu_2) = (1, 1, 0, \frac{1}{4}) \geq \vec{0}$ efectivamente cumple con todas las condiciones KKT. Sabemos, entonces, que (1,1) es un mínimo local.

iii) Dado que el espacio asociado a una circunferencia es convexo, y la intersección de dos espacios es convexa, podemos asegurar que el espacio de soluciones factibles esta es convexa.
Ahora, analicemos el Hessiano de la función para ver si es convexo.

$$
H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Dado que la matriz Hessiana es semi-definida positiva, la función objetivo es convexa (aunque no estricta). Así, como el espacio de soluciones factibles es convexo, y la función objetivo es convexa, el problema es convexo (condición suficiente de KKT). Así, podemos aseverar que sí existe un óptimo global.

iv) Escribimos el nuevo problema como problema estándar

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & z = -(x_1-1)^2 - x_2 \\
\text{s.a.} & (x_1-2)^2+(x_2-2)^2-4 \leq 0 \\
& (x_1-1)^2+(x_2+1)^2-4 \leq 0
\end{array}
$$

Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el nuevo Lagrangeano:

$$
\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -(x_1-1)^2 - x_2 + \mu_1\big((x_1-2)^2+(x_2-2)^2-4\big) + \mu_2\big((x_1-1)^2+(x_2+1)^2-4\big)
$$

Y las condiciones de KKT son las mismas que antes, excepto:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{i)} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} & = & -2(x_1-1)+2\mu_1(x_1-2)+2\mu_2(x_1-1) \quad = \quad 0 \\
\text{v)} & x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} & = & x_1\big(-2(x_1-1)+2\mu_1(x_1-2)+2\mu_2(x_1-1)\big) \quad = \quad 0
\end{array}
$$

Podemos hacer el mismo análisis que llevan al uso de las ecuaciones (i) y (ii).

$$
\begin{array}{llcl}
(a) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} & = & -2(x_1-1)+2\mu_1(x_1-2)+2\mu_2(x_1-1) \quad = \quad 0 \\
(b) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} & = & -1+2\mu_1(x_2-2)+2\mu_2(x_2+1) \quad = \quad 0
\end{array}
$$

Al evaluar estas ecuaciones en el óptimo es $(x, y) = (1, 1)$, el desarrollo se vuelve similar al del ejercicio ii, llegando al mismo valor de los μ_1 y μ_2. De esta manera, verificamos que las condiciones de KKT se cumplen. Así, sabemos que el (1,1) sigue siendo mínimo local.

v) Ya sabemos, de (iii) que el espacio de soluciones factibles es convexo. Sin embargo, evaluando el Hessiano de f en (1,1)

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

notamos que esta matriz es semi-definida negativa, lo que hace que la función objetivo sea cóncava. Así, el problema no es convexo y esto no cumple la condición de suficiencia de KKT. Por lo tanto, no podemos asegurar globalidad del óptimo (1,1).

b) i) El problema que debe resolver Yiyo para determinar cómo repartir las apuestas es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i P \tfrac{x_i}{s_i+x_i} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i P \tfrac{x_i}{s_i+x_i} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq x_0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq x_0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \end{aligned}$$

La restricción se puede escribir, de forma equivalente, como se muestra a la derecha para facilitar el análisis de las condiciones de KKT; o bien puede dejarse así para realizar un análisis con Lagrange. La pauta procederá con el problema equivalente de la derecha.

ii) Dado que la función objetivo es continua en el dominio, y este es un conjunto cerrado, acotado ($0 \leq x_i \leq x_0, \forall i = 1,\dots,n$) y no vacío ($x_i = {}^{x_0}/_n, \forall i = 1,\dots,n$ es factible), entonces existe solución óptima (por Teorema de B-W).

Para la unicidad, podemos demostrar que la función objetivo es estrictamente cóncava. Así, basta que consideremos que hay dos máximos globales en el dominio, el cual llamaremos Ω, x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) tales que $f(x_1) = f(x_2) = \text{máx}_{x\in\Omega}\{f(x)\}$, y algún punto entremedio, digamos $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$. Entonces, por la estricta concavidad de f, se tiene que

$$f(\bar{x}) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$$

lo cual es una contradicción. Luego, hay un único máximo.

iii) Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el Lagrangeano (estándar):

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \mu_1, \mu_2) = -\sum_{i=1}^{n} p_i P \frac{x_i}{s_i + x_i} + \mu_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 \right) + \mu_2 \left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 \right)$$

Y las condiciones de KKT asociadas a él son:

$$\begin{array}{lllll} 1_i) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = & -\frac{P p_i s_i}{(s_i+x_i)^2} + \mu_1 - \mu_2 & \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ 2_1) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 & \leq 0 \\ 2_2) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & -\sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 & \leq 0 \\ 3_i) & x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = & x_i\left(-\frac{P p_i s_i}{(s_i+x_i)^2} + \mu_1 - \mu_2\right) & = 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ 4_1) & \mu_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & \mu_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0\right) & = 0 \\ 4_2) & \mu_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & \mu_2\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + x_0\right) & = 0 \\ 5_i) & & & x_i & \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ 6_1) & & & \mu_1 & \geq 0 \\ 6_2) & & & \mu_2 & \geq 0 \end{array}$$

Para encontrar el óptimo, una opción sería mediante las condiciones de KKT, probando las diferentes combinaciones entre los multiplicadores y variables cuando son impuestas a valor cero.

Esto genera 2^n combinaciones posibles. Luego, de todas aquellas que dan soluciones factibles, sacar aquella que entregue el máximo valor para la función objetivo.

Otra alternativa es, dado que el dominio es un poliedro lineal, se podría hacer una búsqueda exhaustiva sobre él.

iv) Planteamos las condiciones de KKT anteriores, considerando que $s_i = Sp_i$ y que las ecuaciones $2_1, 2_2, 4_1$ y 4_2 se cumplen (dado la equivalencia hecha para generar las restricciones asociadas).

$$\begin{array}{lrcl}
1_i) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = & -\frac{Pp_i^2 S}{(p_i S + x_i)^2} + \mu_1 - \mu_2 \quad \geq \quad 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
3_i) & x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = & x_i\left(-\frac{Pp_i^2 S}{(p_i S + x_i)^2} + \mu_1 - \mu_2\right) \quad = \quad 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
5_i) & & & x_i \quad \geq \quad 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
6_1) & & & \mu_1 \quad \geq \quad 0 \\
6_2) & & & \mu_2 \quad \geq \quad 0
\end{array}$$

Consideremos el subconjunto de índices de caballos tales que no se decide apostar (donde imponemos $x_i = 0$), que llamaremos

$$I_0 \subset I = \{1, \ldots, n\}$$

. Sea I_0^c el complemento, es decir, los caballos por los que sí se apostará ($x_i > 0$).

Luego, por un lado se tiene $x_i = 0$ para todo $i \in I_0$. Por otro lado, las condiciones 3_i expuestas nos dicen que:

$$x_i > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Pp_i^2 S}{(p_i S + x_i)^2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Esto hace cumplir las ecuaciones 1_i. Luego, se tiene que

$$\begin{array}{rcll}
\frac{Pp_i^2 S}{(p_i S + x_i)^2} = \frac{Pp_j^2 S}{(p_j S + x_j)^2} \quad \forall i, j \in I_0^c & \Leftrightarrow & \frac{p_i}{p_i S + x_i} = \frac{p_j}{p_j S + x_j} & \forall i, j \in I_0^c \\
& \Leftrightarrow & \frac{x_i}{p_i} = \frac{x_j}{p_j} & \forall i, j \in I_0^c \\
& \Leftrightarrow & x_i = p_i \frac{x_j}{p_j} & \forall i, j \in I_0^c
\end{array}$$

Dado que $\sum_{i=1}^n x_i = x_0$, y tomando un $j \in I_0^c$ cualquiera, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^n x_i = x_0 & \Leftrightarrow & \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_0^c} x_i = x_0 \\
& \Leftrightarrow & 0 + \sum_{i \in I_0^c} p_i \frac{x_j}{p_j} = x_0 \\
& \Leftrightarrow & \frac{x_j}{p_j} \sum_{i \in I_0^c} p_i = x_0 \\
& \Rightarrow & x_j = \frac{x_0 p_j}{\bar{p}}
\end{array}$$

, donde $\bar{p} = \sum_{i \in I_0^c} p_i$. Evidentemente $\bar{p} \in [0, 1]$. Luego, las utilidades serán de:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n Pp_i \frac{x_i}{s_i + x_i} &= \sum_{i \in I_0^c} Pp_i \frac{x_i}{s_i + x_i} \\
&= \sum_{i \in I_0^c} \alpha(x_0 + S) p_i \frac{p_i {}^{x_0}/_{\bar{p}}}{S p_i + p_i {}^{x_0}/_{\bar{p}}} \\
&= \frac{\alpha(x_0 + S) x_0}{(S + {}^{x_0}/_{\bar{p}})\bar{p}} \sum_{i \in I_0^c} p_i \\
&= \alpha x_0 \frac{x_0 + S}{{}^{x_0}/_{\bar{p}} + S}
\end{aligned}$$

Notemos que la expresión anterior crece si $\bar{p}$ crece, es decir, crece si I_0^c tiene más índices. Luego, claramente le conviene apostar a todos los caballos. Así, $I_0 = \emptyset$. De esta forma, se obtiene $\bar{p} = 1$ y la utilidad esperada de αx_0. Claramente, en valor esperado no le conviene apostar, pues $\alpha \in (0, 1)$.

c) Primero, calculemos el gradiente y el Hessiano de la función

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(20x^3 - 20xy + x - 1) \\ 20(y - x^2) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 120x^2 - 40y + 2 & -40x \\ -40x & 20 \end{bmatrix}$$

i) Aplicamos el método del Gradiente:

◇ Iteración 1:

- Inicialización: $x_0 = (3/2, 1/2)^T \ \rightarrow \ \nabla f(x_0) = (106, -35)^T \neq \vec{0}$.
- Dirección de decrecimiento: $d_0 = (-106, 35)^T =\neq \vec{0}$, no estamos en el óptimo. Seguimos iterando.
- Determinar el tamaño del paso:

  Se debe resolver

  $$\min_{h>0} f(x_0 + h_0 d_0) = \min_{h>0} ((3/2 - 106h) - 1)^2 + 10((1/2 + 35h) - (3/2 - 106h)^2)^2$$

  Como es un problema de una variable, derivamos e igualamos a cero: $h \approx 0{,}006134$
- Calculamos el siguiente punto:

  $$x_1 = x_0 + h_0 d_0 = (3/2, 1/2)^T + 0{,}006134(-106, 35)^T = (0{,}849796, 0{,}71469)^T$$

◇ Verificamos que $\nabla f(x_1) \neq 0$. Luego, comenzamos una nueva iteración (2).

- $x_1 = (0{,}849796, 0{,}71469)^T \ \rightarrow \ \nabla f(x_1) = (-0{,}046718, -0{,}14926)^T$.
- Dirección de decrecimiento: $d_0 = (0{,}046718, 0{,}14926)^T = \vec{0}$, no estamos en el óptimo. Seguimos iterando.
- Determinar el tamaño del paso:

  Se debe resolver

  $$\min_{h>0} f(x_1 + h_1 d_1) = \min_{h>0} ((0{,}8498 + 0{,}0467h) - 1)^2 + 10((0{,}7147 + 0{,}1493h) - (0{,}8498 + 0{,}0467h)^2)^2$$

  Como es un problema de una variable, derivamos e igualamos a cero: $h \approx 0{,}243164$
- Calculamos el siguiente punto:

  $$x_2 = x_1 + h_1 d_1 = (0{,}849796, 0{,}71469)^T + 0{,}243164(0{,}046718, 0{,}14926)^T = (0{,}861156, 0{,}750985)^T$$

Verificamos que $\nabla f(x_2) \neq 0$. Luego, tras dos iteraciones no hemos llegado al óptimo.

ii) Aplicamos el método del Newton:

◇ Iteración 1:

- Inicialización: $x_0 = (3/2, 1/2)^T \ \rightarrow \ \nabla f(x_0) = (106, -35)^T \neq \vec{0}$

  $$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} 252 & -60 \\ -60 & 20 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad H_f^{-1}(x_0) = \begin{bmatrix} 1/72 & 1/24 \\ 1/24 & 7/40 \end{bmatrix}$$

- Dado que $\nabla f(x_0) \neq \vec{0}$, nos movemos a un siguiente punto:

  $$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - H_f^{-1}(x_0) \cdot \nabla f(x_0) \\ &= (3/2, 1/2)^T - \begin{bmatrix} 1/72 & 1/24 \\ 1/24 & 7/40 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 106 \\ -35 \end{pmatrix} \\ &= (107/72, 159/72)^T = (1{,}48611, 2{,}208333)^T \end{aligned}$$

◇ Verificamos que $\nabla f(x_1) \neq 0$. Luego, comenzamos una nueva iteración (2).

- Inicialización: $x_1 = ({}^{107}/_{72}, {}^{159}/_{72})^T \;\rightarrow\; \nabla f(x_0) = ({}^{45895}/_{46656}, {}^{-5}/_{1296})^T \neq \vec{0}$

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} {}^{38597}/_{216} & {}^{-535}/_{9} \\ {}^{-535}/_{9} & 20 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad H_f^{-1}(x_0) = \begin{bmatrix} {}^{648}/_{1301} & {}^{1926}/_{1301} \\ {}^{1926}/_{1301} & {}^{115791}/_{26020} \end{bmatrix}$$

- Dado que $\nabla f(x_1) \neq \vec{0}$, nos movemos a un siguiente punto:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - H_f^{-1}(x_1) \cdot \nabla f(x_1) \\ &= ({}^{107}/_{72}, {}^{159}/_{72})^T - \begin{bmatrix} {}^{648}/_{1301} & {}^{1926}/_{1301} \\ {}^{1926}/_{1301} & {}^{115791}/_{26020} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^{45895}/_{46656} \\ {}^{-5}/_{1296} \end{pmatrix} \\ &= ({}^{6756984}/_{6744384}, {}^{5188109}/_{6744384})^T = (1{,}0019, 0{,}76925)^T \end{aligned}$$

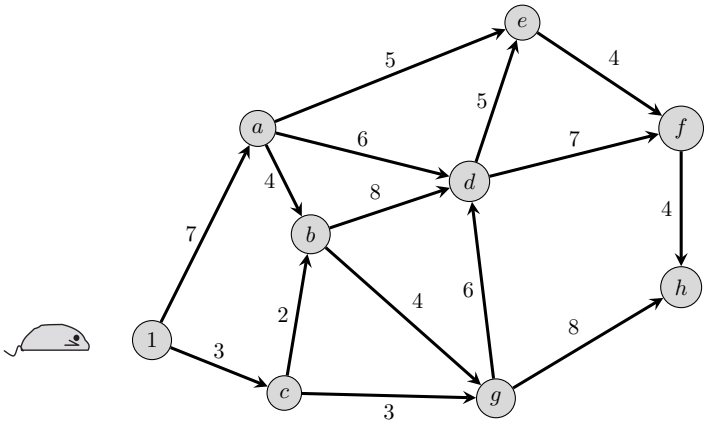
Verificamos que $\nabla f(x_2) \neq 0$. Luego, tras dos iteraciones no hemos llegado al óptimo.

NOTA DE CORRECCIÓN, PREGUNTA 2C: Dada la complejidad en los números, se aceptan cálculos realizados por computador, tanto para la (i) como para la (ii). Sin embargo, debe quedar claro cada paso y desarrollo de ambos métodos.

iii) Podemos validar lo respondido en la 1c. Tras dos iteraciones, Newton llegó más cerca al óptimo que Gradiente. Newton requiere menos cálculos, al no tener que resolver un problema de optimización para encontrar el siguiente punto. Notemos también que Newton, en su primera iteración, se alejó del óptimo para luego acercarse. Gradiente siempre se acercó.

Problema 3. (20 puntos)

a) (5 puntos) El siguiente grafo muestra una red de túneles, y los números que están al lado de los arcos representan las longitudes de esos túneles. Se quiere dejar una porción de queso en algún nodo de esta red de manera que el ratón que se encuentra en el nodo 1 tarde lo máximo posible en encontrarlo, teniendo en cuenta que es un excelente rastreador.

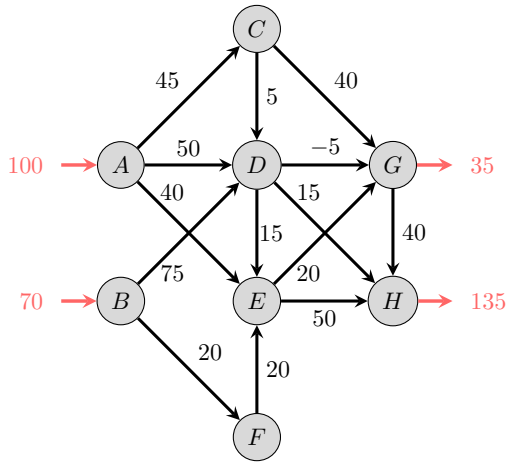


Para ello:

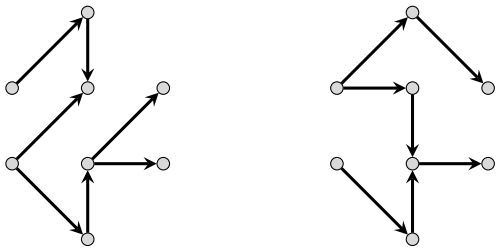
i) (3 puntos) Determine su solución al problema utilizando el algoritmo de Dijkstra. En caso de empate, resuélvalo seleccionando el nodo al que primero le actualizó la información. ¿Por qué este algoritmo le puede ayudar?

ii) (2 puntos) Utilice el algoritmo de Simplex especializado en redes para comprobar que su solución obtenida en (i) es la óptima.

b) (10 puntos) Considere la siguiente red $G(N, A)$. Cada arco (i, j) representado presentas cotas $(l_{ij}, u_{ij}) = (0, \infty)$, e indica el costo unitario c_{ij} de transportar una unidad por dicho arco.



i) (1 punto) Considere los dos árboles a continuación y escoja uno para iterar con Simplex especializado en redes. ¿Por qué escoge ese y no el otro?



ii) (3 puntos) Resuelva el problema utilizando Simplex especializado en redes a partir de la base escogida en (i).

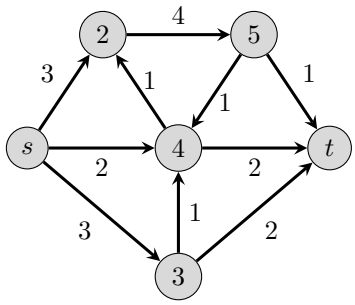
iii) (1 punto) ¿Qué particularidades tiene la solución obtenida en (ii)?

iv) (1 punto) Suponga que la cota inferior del arco (E, H) (l_{EH}) cambia de 0 a 5, que la cota inferior del arco (E, G) (l_{EG}) cambia de 0 a 10, y que la cota superior del arco (A, D) (u_{AD}) cambia de ∞ a 120. ¿Cambia la solución obtenida en (ii)?

v) (2 puntos) ¿Cuánto puede valer el costo del arco (C, G) (c_{CG}) para que convenga enviar flujo a través de él?

vi) (2 puntos) ¿Y cuál es el rango del costo del arco (E, G) (c_{EG}) para que siga conveniendo enviar flujo a través de él?

c) (5 puntos) Considere el siguiente grafo $G(N, A)$, en que cada arco representado indica la cota máxima de flujo que puede pasar por ahí.



i) (1,5 puntos) Determine una cota al flujo máximo que permite llevarse desde el nodo s al nodo t. Justifique su procedimiento en base a teoremas (¿por qué lo que hace permite asegurarle eso?).

ii) (2,5 puntos) Determine el flujo máximo que permite llevarse desde el nodo s al nodo t, utilizando algún algoritmo visto en clases. En su primera iteración, utilice el arco (3,4) como parte de la ruta aumentable. Identifique claramente la red residual para cada iteración.

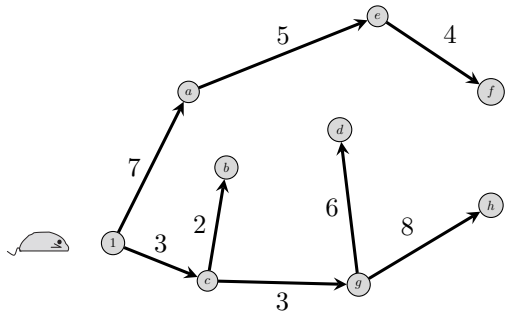
iii) (1 punto) Determine el corte mínimo asociado a la solución óptima de su desarrollo en (ii).

Solución Problema 3.

a) i) El algoritmo de Dijkstra se puede utilizar dado que estamos asumiendo que el ratón es un excelente rastreador. Es decir, el ratón siempre podría encontrar el camino más corto hacia el queso. Dado que nos interesa ponerlo en el nodo que quedaría más lejano al ratón, es necesario resolver Dijkstra uno a todos para determinar cuál es el nodo cuya ruta más corta desde el nodo 1 es la más larga. Su desarrollo es como sigue, en que cada etiqueta muestra (d_i, p_i), cada etiqueta en rojo indica el nodo que está siendo cerrado en esa iteración. En color verde se indican las etiquetas que fueron actualizadas por iteración. El conjunto V indica los nodos que ya están cerrados después de cada iteración, en orden de cierre.

It.	1	a	b	c	d	e	f	g	h	V
0	(0,1)	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	{}
1	(0,1)	(7,1)	$(-,\infty)$	(3,1)	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	{1}
2	–	(7,1)	$(5,c)$	(3,1)	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(6,c)$	$(-,\infty)$	{1,c}
3	–	(7,1)	$(5,c)$	–	$(13,b)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(6,c)$	$(-,\infty)$	$\{1,c,b\}$
4	–	(7,1)	–	–	$(12,g)$	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(6,c)$	$(14,g)$	$\{1,c,b,g\}$
5	–	(7,1)	–	–	$(12,g)$	$(12,a)$	$(-,\infty)$	–	$(14,g)$	$\{1,c,b,g,a\}$
6	–	–	–	–	$(12,g)$	$(12,a)$	$(19,d)$	–	$(14,g)$	$\{1,c,b,g,a,d\}$
7	–	–	–	–	–	$(12,a)$	$(16,e)$	–	$(14,g)$	$\{1,c,b,g,a,d,e\}$
8	–	–	–	–	–	–	$(16,e)$	–	$(14,g)$	$\{1,c,b,g,a,d,e,h\}$
9	–	–	–	–	–	–	$(16,e)$	–	–	$\{1,c,b,g,a,d,e,h,f\}$

Así, el árbol de distancias mínimas queda dado por:



En que se ve que el nodo con la distancia mínima más lejana al ratón es el nodo f, en donde se debe colocar el queso a una distancia de 16.

ii) Se tiene que las variables que aparecen en el árbol anterior son básicas, mientras que las que no son variables no básicas.

Calculemos el valor de las variables duales, para luego calcular los costos reducidos de los arcos no básicos:

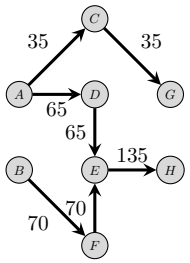
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{1a} &= 7 - \pi_1 + \pi_a = 0 \\
\bar{c}_{1c} &= 3 - \pi_1 + \pi_c = 0 \\
\bar{c}_{ae} &= 5 - \pi_a + \pi_e = 0 \\
\bar{c}_{cb} &= 2 - \pi_c + \pi_b = 0 \\
\bar{c}_{cg} &= 3 - \pi_c + \pi_g = 0 \\
\bar{c}_{ef} &= 4 - \pi_e + \pi_f = 0 \\
\bar{c}_{gd} &= 6 - \pi_g + \pi_d = 0 \\
\bar{c}_{gh} &= 8 - \pi_g + \pi_h = 0
\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_a \\ \pi_b \\ \pi_c \\ \pi_d \\ \pi_e \\ \pi_f \\ \pi_g \\ \pi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ -3 \\ -12 \\ -12 \\ -16 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}
\bar{c}_{ab} &= 4 - (-7) + (-5) = 6 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{ad} &= 6 - (-7) + (-12) = 1 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{bd} &= 8 - (-5) + (-12) = 1 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{bg} &= 4 - (-5) + (-6) = 3 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{de} &= 5 - (-12) + (-12) = 5 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{df} &= 7 - (-12) + (-16) = 3 \geq 0 \quad (l) \\
\bar{c}_{fh} &= 4 - (-16) + (-14) = 6 \geq 0 \quad (l)
\end{aligned}$$

Dado que todos los arcos no básicos cumplen con el criterio de optimalidad de Simplex, se tiene que la solución encontrada en (i) es óptima.

Entonces, el queso debe ser colocado en el nodo f, a una distancia de 16.

b) i) Consideraremos para iniciar el segundo árbol, ya que está asociado a una base factible ($f_{AC} = 35, f_{CG} = 35, f_{AD} = 65, f_{DE} = 65, f_{EH} = 135, f_{BF} = 70, f_{FE} = 70$), el cual se muestra más adelante. El primero no puede escogerse ya que no sería una base factible (a pesar de ser árbol, no es posible encontrar una manera de distribuir el flujo de manera factible tal que se cumplan las demandas).

ii) La base factible, con el flujo que pasa por cada nodo, queda entonces representado por la siguiente figura:



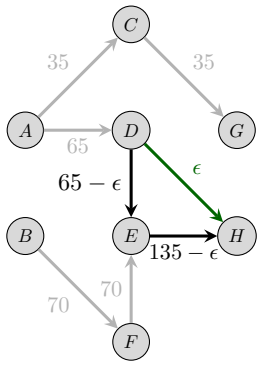
◇ Iteración 1.
La base de la sección (i) es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, para luego usarlos para calcular los costos reducidos de las variables no básicas.

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AC} = 45 - \pi_A + \pi_C = 0 \\ \bar{c}_{AD} = 50 - \pi_A + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{BF} = 20 - \pi_B + \pi_F = 0 \\ \bar{c}_{CG} = 40 - \pi_C + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{DE} = 15 - \pi_D + \pi_E = 0 \\ \bar{c}_{EH} = 50 - \pi_E + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{FE} = 20 - \pi_F + \pi_E = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \pi_A = 65 \\ \pi_B = 40 \\ \pi_C = 20 \\ \pi_D = 15 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_F = 20 \\ \pi_G = -20 \\ \pi_H = -50 \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} \bar{c}_{AE} = 40 - (65) + 0 = -25 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{BD} = 75 - (40) + (15) = 50 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{CD} = 5 - (20) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DG} = -5 - (15) + (-20) = -40 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DH} = 15 - (15) + (-50) = -50 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{EG} = 20 - (0) + (-20) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{GH} = 40 - (-20) + (-50) = 10 \geq 0 \ \ (l) \end{array}$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{DH}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{DH}.

- Salida de la Base.
Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura a continuación a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

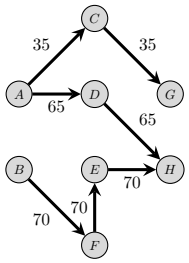


Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{DE} = 65, \epsilon_{DH} = \infty, \epsilon_{EH} = 135\} = \epsilon = 65$$

Luego, saldrá de la base la variable f_{DE}, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 2.
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



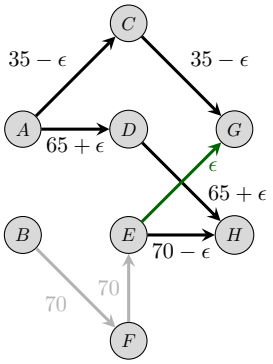
Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, para luego usarlos para calcular los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AC} = 45 - \pi_A + \pi_C = 0 \\ \bar{c}_{AD} = 50 - \pi_A + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{BF} = 20 - \pi_B + \pi_F = 0 \\ \bar{c}_{CG} = 40 - \pi_C + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{DH} = 15 - \pi_D + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{EH} = 50 - \pi_E + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{FE} = 20 - \pi_F + \pi_E = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \pi_A = 65 \\ \pi_B = 90 \\ \pi_C = 20 \\ \pi_D = 15 \\ \pi_E = 50 \\ \pi_F = 70 \\ \pi_G = -20 \\ \pi_H = 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} \bar{c}_{AE} = 40 - (65) + (50) = 25 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{BD} = 75 - (90) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{CD} = 5 - (20) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DE} = 15 - (15) + (50) = 50 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DG} = -5 - (15) + (-20) = -40 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{EG} = 20 - (50) + (-20) = -50 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{GH} = 40 - (-20) + (0) = 60 \geq 0 \ \ (l) \end{array}$$

  Como el costo reducido $\bar{c}_{EG}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{EG}.

- Salida de la Base.
  Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

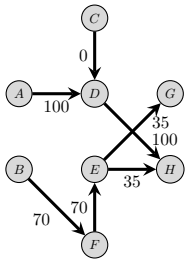


  Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{AC} = 35, \epsilon_{AD} = \infty, \epsilon_{CG} = 35, \epsilon_{DH} = \infty, \epsilon_{EG} = \infty, \epsilon_{EH} = 70\} = \epsilon = 35$$

  Luego, escogemos arbitrariamente f_{AC} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 3
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.

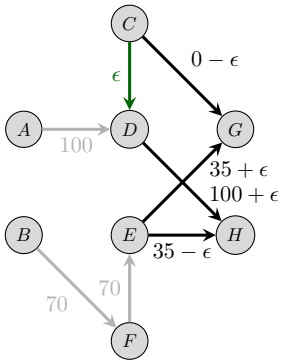


Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, para luego usarlos para calcular el costo reducido de las variables no básicas:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AD} = 50 - \pi_A + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{BF} = 20 - \pi_B + \pi_F = 0 \\ \bar{c}_{CG} = 40 - \pi_C + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{DH} = 15 - \pi_D + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{EG} = 20 - \pi_E + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{EH} = 50 - \pi_E + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{FE} = 20 - \pi_F + \pi_E = 0 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_A = 65 \\ \pi_B = 90 \\ \pi_C = 70 \\ \pi_D = 15 \\ \pi_E = 50 \\ \pi_F = 70 \\ \pi_G = 30 \\ \pi_H = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \bar{c}_{AC} = 45 - (65) + (70) = 50 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{AE} = 40 - (65) + (50) = 25 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{BD} = 75 - (90) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{CD} = 5 - (70) + (15) = -50 \ngeq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DG} = -5 - (15) + (30) = 10 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{EG} = 20 - (50) + (30) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{GH} = 40 - (30) + (0) = 10 \geq 0 \ \ (l) \end{array}$$

  Como el costo reducido $\bar{c}_{CD}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{CD}.
- Salida de la Base.
  Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

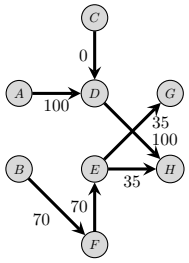


  Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{CD} = \infty, \epsilon_{CG} = 0, \epsilon_{DH} = \infty, \epsilon_{EG} = \infty, \epsilon_{EH} = 35\} = \epsilon = 0$$

  Luego, escogemos arbitrariamente f_{CG} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 3
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, para luego usarlos para calcular los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AD} = 50 - \pi_A + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{BF} = 20 - \pi_B + \pi_F = 0 \\ \bar{c}_{CD} = 5 - \pi_C + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{DH} = 15 - \pi_D + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{EG} = 20 - \pi_E + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{EH} = 50 - \pi_E + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{FE} = 20 - \pi_F + \pi_E = 0 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_A = 65 \\ \pi_B = 90 \\ \pi_C = 20 \\ \pi_D = 15 \\ \pi_E = 50 \\ \pi_F = 70 \\ \pi_G = 30 \\ \pi_H = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \bar{c}_{AC} = 45 - (65) + (20) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{AE} = 40 - (65) + (50) = 25 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{BD} = 75 - (90) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{CG} = 40 - (20) + (15) = 35 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DE} = 15 - (15) + (50) = 50 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DG} = -5 - (15) + (30) = 10 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{GH} = 40 - (30) + (0) = 10 \geq 0 \ \ (l) \end{array}$$

Como todos los costos reducidos de las variables no básicas cumplen con su criterio de optimalidad (costos reducidos no negativos para variables en su cota inferior y no positivos para las variables en su cota superior), la solución es óptima.
Así, lo óptimo es la distribución de flujo representada por la última imagen. Así, el costo óptimo que gastarían entre todos sería de

$$\begin{aligned} z^* &= 50 \cdot 100 + 20 \cdot 70 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 100 + 20 \cdot 35 + 50 \cdot 35 + 20 \cdot 70 \\ &= 11750 \end{aligned}$$

iii) La solución obtenida presenta dos particularidades. Primero, es múltiple, pues hay costos reducidos de variables no básicas que son iguales a cero. Segundo, es degenerada, dado que hay variables básicas que no transportan flujo.

iv) La solución obtenida en (ii) no cambia, dado que $f^*_{EH} > 5, f^*_{EG} > 10, f^*_{AD} < 120$.

v) Dado que es un costo de una variable no básica en el óptimo, basta con utilizar los $\pi' s$ ya calculados para determinar el valor de c_{CG}

$$\bar{c}_{CG} = c_{CG} - (20) + (15) = c_{CG} - 5$$

Así, para que el arco convenga usarlo, es necesario que invalide el costo de optimalidad, es decir

$$c_{CG} - 5 < 0 \ (l) \quad \rightarrow \quad c_{CG} < 5$$

vi) Dado que estamos variando el costo de una variable básica, es necesario calcular nuevamente los valores de los $\pi' s$.
Cálculo de $\pi' s$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{AD} &= 50 - \pi_A + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{BF} &= 20 - \pi_B + \pi_F = 0 \\ \bar{c}_{CD} &= 5 - \pi_C + \pi_D = 0 \\ \bar{c}_{DH} &= 15 - \pi_D + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{EG} &= c_{EG} - \pi_E + \pi_G = 0 \\ \bar{c}_{EH} &= 50 - \pi_E + \pi_H = 0 \\ \bar{c}_{FE} &= 20 - \pi_F + \pi_E = 0 \end{aligned}$$

Considerando, arbitrariamente, $\pi_H = 0$ se tiene que $\pi_A = 65, \pi_B = 90, \pi_C = 20, \pi_D = 15, \pi_E = 50, \pi_F = 70$, y $\pi_G = 50 - c_{EG}$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.
Así, calculamos los costos reducidos de las variables no básicas.

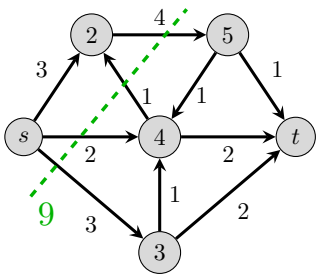
$$\begin{aligned} \bar{c}_{AC} &= 45 - (65) + (20) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{AE} &= 40 - (65) + (50) = 25 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{BD} &= 75 - (90) + (15) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{CG} &= 40 - (20) + (50 - c_{EG}) = 70 - c_{EG} \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DE} &= 15 - (15) + (50) = 0 \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{DG} &= -5 - (15) + (50 - c_{EG}) = 30 - c_{EG} \geq 0 \ \ (l) \\ \bar{c}_{GH} &= 40 - (30) + (0) = 10 \geq 0 \ \ (l) \end{aligned}$$

Así, nos aseguramos que sigamos usando este arco si el criterio de optimalidad no hace cambiar la base. Luego, se debe cumplir que

$$\left.\begin{array}{l} 70 \geq c_{EG} \\ 30 \geq c_{EG} \end{array}\right\} c_{EG} \leq 30$$

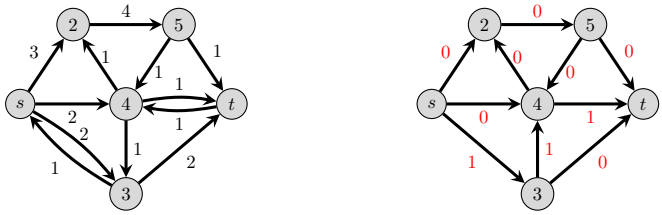
c) i) Dado que el problema de corte mínimo sobre esta misma red es el problema dual del problema de flujo máximo, por Teorema Débil de Dualidad, cualquier solución (cualquier corte) podrá representar una cota al flujo máximo.

Un corte posible podría ser:

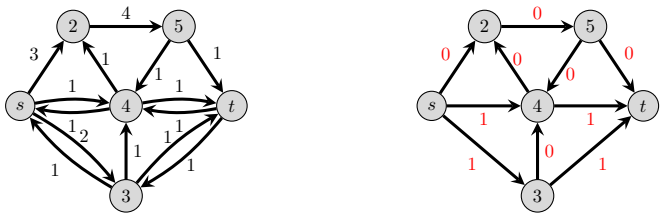


Así, sabemos que en ningún caso podríamos pasar más de 9 unidades de flujo.

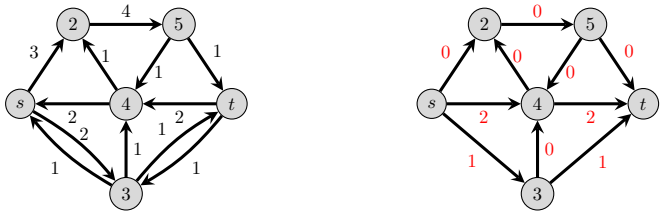
ii) Sobre la red original, encontramos una ruta incremental. Esta ruta, para utilizar el arco $(3, 4)$ en la primera iteración, debe ser $s-3-4-t$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_1 = 1$. La red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.



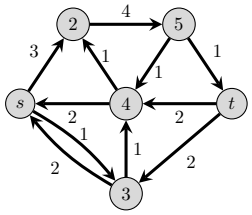
Sobre esta nueva red residual, encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $s-4-3-t$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_2 = 1$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.

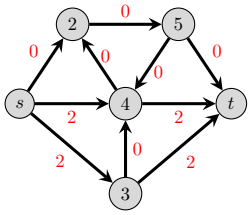


Sobre esta nueva red residual, encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $s-4-t$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_3 = 1$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.

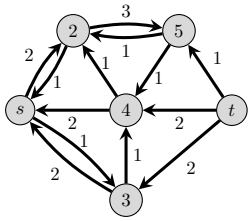


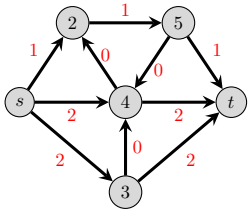
Sobre esta nueva red residual, encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $s-3-t$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_4 = 1$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.





Sobre esta nueva red residual, encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $s-2-5-t$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_5 = 1$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.

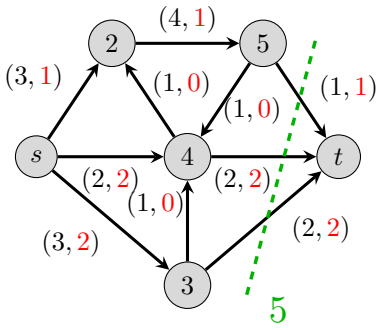




Ya no existen rutas incrementales sobre la nueva red residual. Por lo tanto, el algoritmo de Ford & Fulkerson termina de iterar. La cantidad de flujo que puede enviarse como máximo de s a t, F^* será de

$$F^* = \sum_i \Delta f_i = 1+1+1+1+1 = 5$$

iii) Como se mostró en la parte (ii), el flujo máximo que permite transportar la red es de 5 unidades. Así, se puede observar que el corte asociado a este flujo es tal que $S = \{s, 2, 3, 4, 5\}$ y $\bar{S} = \{t\}$, con la capacidad de 5. Los arcos representan (u_{ij}, f^*_{ij})



Problema 4. (25 puntos)

a) (10 puntos) Usted es el gerente de bodega de la prestigiosa compañía Bilever y se le ha encomendado realizar la planificación para los próximos T periodos de tiempo. Considere que existe un conjunto I de productos que se pueden llevar a la bodega, los cuales son almacenados en pallets (contenedores de madera) de distintos tamaños dependiendo del producto. Llamaremos v_i al tamaño del pallet del producto i y I_i^0 al inventario inicial (al final del periodo $t = 0$).

La compañía tiene varios proveedores que suministran los productos a diferentes precios, considere que el precio de compra de un pallet del producto i al proveedor j es de CP_{ij} unidades monetarias [u.m.]. En cada periodo de tiempo se le asigna un presupuesto de $PPTO_t$ [u.m.] destinado a la compra de productos.

La bodega tiene una capacidad de K unidades de volumen, pero existe la posibilidad de expandirla en cualquier periodo t dentro del horizonte de planificación a un altísimo costo fijo de CF_t [u.m.] y un costo por unidad de volumen expandida de CV_t [u.m.], ambos dependientes del periodo en el que se realice la expansión.

Dentro del conjunto de productos existen algunos pares no compatibles entre si, que no deben almacenarse en la bodega al mismo tiempo por motivos de seguridad. Llamaremos NC al conjunto de pares i, k que son no compatibles.

Es de suma importancia satisfacer la demanda de cada producto en todo periodo de tiempo, la cual estará determinada por el precio p_{it} [u.m.] del producto i en el período t. La demanda d_{it} del producto i en el período t, entonces, viene a estar dada por $d_{it} = \alpha_i + \beta_i p_{it}$, con α_i, β_i parámetros conocidos y con $\beta_i < 0$. Sin embargo, por tiempos de entrega, esta demanda sólo puede satisfacerse con productos almacenados en la bodega y no con los que se compran en el mismo período.

La bodega obtiene una utilidad de U_{it} [u.m.] por cada pallet del producto i almacenado entre los períodos t y $t + 1$. La empresa desea maximizar las utilidades totales del horizonte de planificación (no se consideran la compra de productos), considerando las eventuales expansiones de la bodega y la demanda variable.

Formule un modelo de programación mixto que permita tomar las decisiones óptimas para lograr el objetivo propuesto a mayor beneficio.

b) (6 puntos) Definamos un par de conceptos de lógica:

- ◇ Una variable booleana es un literal que puede ser verdadero o falso por sí solo.
- ◇ Una fórmula booleana es un conjunto de literales relacionados entre sí con conectivos lógicos.
- ◇ Una cláusula es una expresión formada por una colección finita de literales (variables o sus negaciones($\neg$)) que es verdadera cuando es verdadero al menos una de los literales que la forman. Es decir, una cláusula es una disyunción ($\vee$) de literales.
- ◇ En este ejercicio, utilizaremos tres conectivos lógicos, que se comportan como muestra la siguiente tabla de verdad:

Var	Var	Negación	Conjunción	Disyunción
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Considere una serie de n variables booleanas $p_i, i = 1, \ldots, n$, y una fórmula booleana S tal que

$$S := \bigwedge_{j=1}^{m} S_j$$

donde $S_j = (q_{1j} \vee q_{2j} \vee q_{3j})$, y donde q_{kj} es algún p_i o $\neg p_i$, $i = 1, \ldots, n$ (note que esa asignación no es variable).

i) (5 puntos) Formule el modelo de programación lineal entero que permite minimizar el número total de cláusulas $(S_j, j = 1, \ldots, m)$ falsas en S. Para ello, defina todos los conjuntos y parámetros que utilizará, además de las variables, restricciones y función objetivo.

ii) (1 punto) ¿Cómo cambia su modelo si buscamos maximizar el número de variables booleanas verdaderas, sujeto a que a lo más u cláusulas son falsas?

c) (4 puntos) Una empresa posee un conjunto F de fábricas de instaladas en China para producir celulares durante T años. Cada fábrica $f \in F$ es capaz de generar hasta a_{ft} celulares en el año t y además posee una bodega para poder almacenar celulares para años posteriores. El costo de almacenar un celular en la bodega de la fábrica f durante el año t está dado por $C^{(1)}_{ft}$. Suponga que al inicio del primer periodo no hay celulares en todas las bodegas y al final del periodo T las bodegas quedan vacías.

Suponga que la empresa posee una flota de barcos (cuyo conjunto lo denotaremos B) destinados exclusivamente al transporte de celulares. Cada barco $b \in B$ posee una capacidad máxima de celulares de k_b, y el costo de llevar un celular de la fábrica f al barco b es $C^{(2)}_{fb}$. Ningún celular se queda en el barco una vez terminado el viaje a la empresa.

La empresa tiene un conjunto de tiendas Q que poseen una demanda de celulares conocida igual a D_{qt} para la tienda $q \in Q$ en el año T. El traslado de un celular desde el barco $b \in B$ hasta la tienda $q \in Q$ es $C^{(3)}_{bq}$

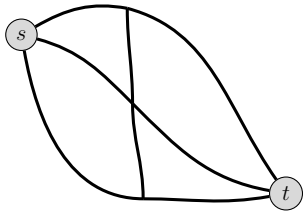
Plantee un modelo de optimización lineal entero que resuelva el problema de distribución de celulares de manera que satisfaga la demanda de las tiendas y que minimice el costo total de traslado.

d) (5 puntos) Una concesionaria pretende reevaluar el sistema de peajes entre Santiago y Viña del Mar. Estas dos ciudades se encuentran conectadas por una red de carreteras que puede ser representada como un grafo $G(N, A)$.

Dado que todo quien desee viajar de una ciudad a la otra debe pagar peaje, la concesionaria desea ubicar casetas de manera tal que todo quien realice el viaje debe pasar por al menos una plaza de peajes. Los costos de construir una plaza de peajes entre los nodos i y j se han estimado como c_{ij}.

i) (2 puntos) La concesionaria desea determinar la forma más conveniente de ubicar las plazas cumpliendo la restricción indicada. ¿A qué tipo de problema corresponde eso? Indique por qué este tipo de problema resolvería la situación. ¿Cómo cambia el problema si en lugar de costos, el objetivo es instalar la menor cantidad posible de plazas de peajes (todavía cumpliendo la restricción)? ¿Influye en el problema si los arcos son bidireccionales o no?

ii) (3 puntos) Ahora se está considerando la posibilidad de instalar plazas de peajes en las intersecciones en lugar de colocarlas entre nodos, considerando que cada construcción en una intersección i tiene un costo c_i. Suponiendo que la red es la que se entrega a continuación y que los arcos son bidireccionales, ¿cómo plantearía el problema como uno de flujo máximo/corte mínimo?



Solución Problema 4.

a) El modelo lineal del problema es el que se presenta a continuación.

Variables

$$\gamma_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si se almacena el producto } i \text{ entre } t \text{ y } t+1. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\theta_t = \begin{cases} 1 & \text{si se expande la bodega en el período } t. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

x_{ijt} = cantidad de producto i comprada al proveedor j en el período t.

y_{it} = cantidad de producto i almacenada entre t y $t+1$.

w_t = capacidad expandida de la bodega en periodo t.

z_t = capacidad efectiva al final del período t.

d_{it} = demanda por el ítem i en el período t.

p_{it} = precio del ítem i en el período t.

Función objetivo : Se desea maximizar el beneficio.

$$\text{máx} \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} y_{it} U_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} (\alpha_i + \beta_i p_{it}) p_{it} - \sum_{t=1}^{T} (\theta_t CF_t + w_t CV_t)$$

NOTA DE CORRECCIÓN: Se cambió el enunciado que indicaba no considerar las ganancias por compra y venta, para indicar que no se consideren solamente las compras de producto. Si en la función objetivo no incluyen el factor no lineal, está bien de todas maneras.

Restricciones

R1) Conservación de flujo.

$$y_{i(t+1)} = y_{it} + \sum_{j \in J} x_{ijt} - d_{it} \qquad \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Satisfacer la demanda.

$$y_{i(t-1)} \geq d_{it} \qquad \forall i \in I \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R3) Respetar la capacidad.

$$\sum_{i \in I} v_i y_{it} \leq z_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R4) Definir la capacidad efectiva.

$$z_t = K + \sum_{s=0}^{t} w_s \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R5) Relación entre las variables w y θ.

$$w_t \leq M\theta_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T \quad M \gg 0$$

R6) Relación entre las variables y y γ.

$$y_{it} \leq N\gamma it \qquad \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T \quad N \gg 0$$

R7) Productos no compatibles.

$$\gamma_{it} + \gamma_{kt} \leq 1 \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad (i, k) \in NC$$

R8) Respetar el presupuesto de compra.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt} CP_{ij} \leq PPTO_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R9) Definición de la demanda.

$$d_{it} = \alpha_i + \beta_i p_{it} \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad i \in I$$

R10) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned}
\gamma_{it} &\in \{0, 1\} && \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T \\
\theta_t &\in \{0, 1\} && \forall t = 1, \ldots, T \\
x_{ijt} &\geq 0 && \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad \forall t = 1, \ldots, T \\
y_{it} &\geq 0 && \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T \\
w_t &\geq 0 && \forall t = 1, \ldots, T \\
z_t &\geq 0 && \forall t = 1, \ldots, T \\
d_{it} &\geq 0 && \forall i \in T \quad \forall t = 1, \ldots, T \\
p_{it} &\geq 0 && \forall i \in T \quad \forall t = 1, \ldots, T
\end{aligned}$$

b) Este problema es conocido como el Problema de Satisfacción Booleana, primer problema identificado como perteneciente a la clase de complejidad NP-Completo. Interesa saber si una expresión booleana tiene asociada una asignación de valores para sus variables.

Dado que la asignación de cada q_{kj} a un p_i o $\neg p_i$ es parámetro, lo que se busca es determinar valores de verdad para cada variable booleana con el objetivo propuesto:

NOTA DE CORRECCIÓN: Se cambió la tabla de verdad en el sentido de los títulos o nombres de los signos. De todas maneras, las fórmulas de S_j están bien escritas.

i) El modelo lineal del problema es el que se presenta a continuación.

Índices

$i =$ que permitirá enumerar las variables booleanas.

$j =$ que permitirá enumerar las cláusulas.

$k =$ permitirá considerar las tres variables booleanas dentro de las cláusulas, $k = 1, 2, 3$.

Variables

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \text{ es verdadera.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } S_j \text{ es verdadera.} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Parámetros Es posible definir los siguientes parámetros, aunque no es necesario (podrían incluirlo como condición en la repetición de las restricciones).

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_{kj} \text{ es igual a } p_i. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$b_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_{kj} \text{ es igual a no } p_i. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Función objetivo : Se debe minimizar el número total de cláusulas S_j falsas en S.

$$\text{máx} \sum_{j=1}^{m} y_j$$

Restricciones

R1) Relacionar los S_j falsos con el valor de las variables y.

$$y_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij1}x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij1}(1-x_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij2}x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij2}(1-x_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij3}x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij3}(1-x_i)\right) \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

R2) Naturaleza de las variables

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

ii) Las restricciones y variables anteriores se mantienen.

Restricciones adicionales

R3) Habrán a lo más u cláusulas falsas.

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \geq m - u$$

o bien

$$\sum_{j=1}^{m} (1 - y_j) \leq u$$

R4) Relacionar los S_j verdaderos con el valor de las variables y.

$$y_j \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij1} x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij1} (1 - x_i) \right) \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

$$y_j \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij2} x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij2} (1 - x_i) \right) \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

$$y_j \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij3} x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij3} (1 - x_i) \right) \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

Función objetivo nueva : Se desea maximizar el número de variables booleanas verdaderas.

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

c) El modelo de la fábrica se presenta a continuación:

Variables

x_{ft} = cantidad de celulares producidos por la fábrica f en el año t.
I_{ft} = cantidad de celulares guardados en la bodega de la fábrica f al final del año t.
e_{fbt} = cantidad de celulares enviados por la fábrica f al barco b en el año t.
d_{bqt} = cantidad de celulares enviados del barco b a la tienda q en el año t.

Función objetivo : Se debe minimizar el costo total de traslado.

$$\text{máx} \sum_{f \in F} \sum_{t=1}^{T} C_{ft}^{(1)} I_{ft} + \sum_{f \in F} \sum_{b \in B} \sum_{t=1}^{T} C_{fb}^{(2)} e_{fbt} + \sum_{b \in B} \sum_{q \in Q} \sum_{t=1}^{T} C_{bq}^{(3)} d_{bqt}$$

Nota de corrección: El enunciado, en estricto rigor, busca minimizar los costos de traslados, por lo que si sólo se consideran $C_{fb}^{(2)}$ y $C_{bq}^{(3)}$, también se considera correcto.

Restricciones

R1) Cada fábrica $f \in F$ es capaz de generar hasta a_{ft} celulares en el año t.

$$p_{ft} \leq a_{ft} \qquad \forall f \in F \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Conservación de flujo a la salida de las fábricas

$$p_{ft} + I_{f(t-1)} = \sum_{b \in B} + I_{ft} \qquad \forall f \in F \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R3) Conservación de flujo a la salida de los barcos

$$\sum_{f \in F} e_{fbt} = \sum_{q \in Q} d_{bqt} \qquad \forall b \in B \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R4) Primer período y fin del período con bodegas vacías.

$$I_{f0} = 0 \qquad \forall f \in F \qquad\qquad I_{fT} = 0 \qquad \forall f \in F$$

R5) Cada barco posee una capacidad máxima de celulares a cargar.

$$\sum_{f \in F} e_{fbt} \leq k_b \qquad \forall b \in B \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

R6) La demanda se debe satisfacer en las tiendas.

$$\sum_{b \in B} d_{bqt} \geq D_{qt} \qquad \forall q \in Q \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

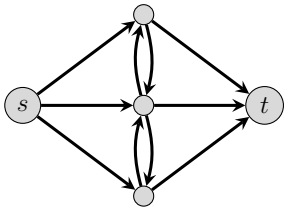
R7) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned}
p_{ft} &\in \mathbb{N}_0 \qquad \forall f \in F \qquad \forall t = 1, \ldots, T \\
I_{ft} &\in \mathbb{N}_0 \qquad \forall f \in F \qquad \forall t = 1, \ldots, T \\
e_{fbt} &\in \mathbb{N}_0 \qquad \forall f \in F \qquad \forall b \in B \qquad \forall t = 1, \ldots, T \\
d_{bqt} &\in \mathbb{N}_0 \qquad \forall q \in Q \qquad \forall b \in B \qquad \forall t = 1, \ldots, T
\end{aligned}$$

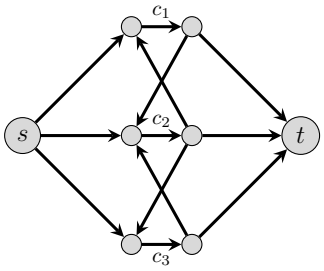
Notemos que el enunciado indica que es un modelo de optimización lineal **entero**.

d) i) Este es un problema de corte mínimo, ya que se desea identificar el corte de la red cuyos arcos poseen el menor costo total sumado. si en lugar de costos tomamos c_{ij} como la capacidad de cada arco, podemos identificar el corte mínimo resolviendo un problema de flujo máximo.
Si se desea minimizar el número de plazas de peaje instaladas, el problema se convierte en uno de conectividad de redes, y se puede resolver como un problema de flujo máximo sobre una red de capacidades unitarias. Para determinar en qué arcos instalar, se debe identificar el corte mínimo a partir de la solución del problema de flujo máximo.
Si los arcos son bidireccionales, la solución puede ser distinta de una instancia con arcos dirigidos, pero la metodología de solución es la misma, separando previamente los arcos bidireccionales en un arco para cada sentido, cada uno con una capacidad máxima del par.

ii) La red vial se puede representar de la siguiente manera. Los arcos que salen o entran de s y t no es necesario considerarlos bidireccionales.



Separando los nodos en dos, y poniendo el costo de instalar una plaza de peaje en cada intersección en el arco que los separa, obtenemos la red que se pide:



En el caso que se desee minimizar el número de plazas de peaje a instalar en nodos bastaría asignar costos unitarios a dichas instalaciones .