PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado - M. Favereau - M. Klapp - E. Salgado

Interrogación 1
Duración: 120 minutos.

Pregunta 1 (18 puntos)

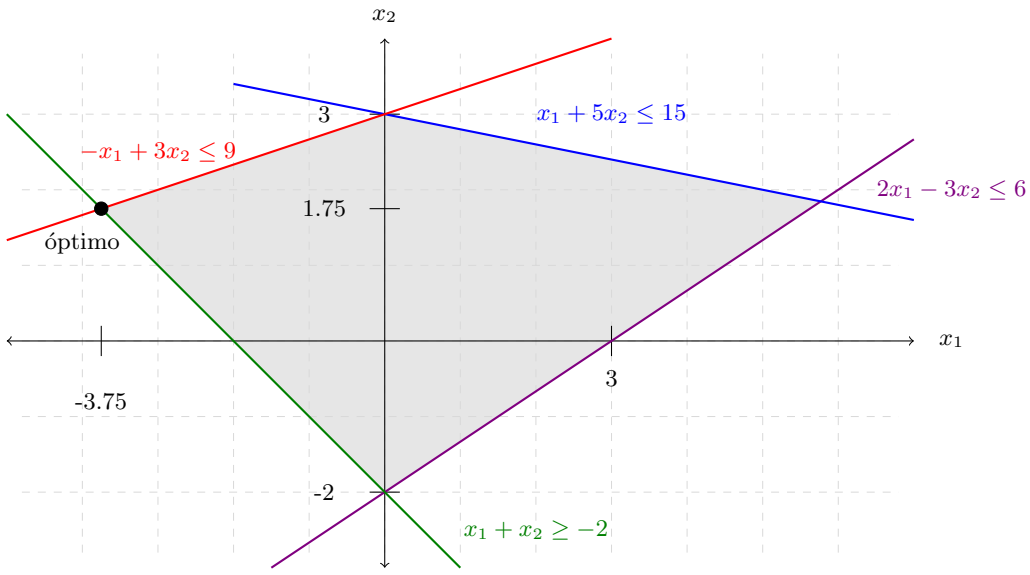
Parte 1 (9 puntos):

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{rrcl} \text{máx} & -2x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 3x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 + x_2 & \geq & -2 \\ & x_1 + 5x_2 & \leq & 15 \\ & -x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

(a) (3 puntos) Grafique el conjunto de soluciones factibles del problema.

Solución:



(b) (3 puntos) Encuentre su valor óptimo y todas sus soluciones óptimas identificando restricciones activas en cada solución.

Solución:

La solución óptima es única $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (-3.75, 1.75)$ y el valor óptimo es $v^* = 11$.

Restricciones activas:	Restricciones inactivas:
$x_1 + x_2 \geq -2$	$x_1 + 5x_2 \leq 15$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$	$2x_1 - 3x_2 \leq 6$

Nota de corrección: Distinguir entre identificar valor óptimo (1p), solución óptima (1p) y restricciones activas (1p).

(c) (3 puntos) ¿Para qué conjunto de valores (c_1, c_2) de coeficientes de la función objetivo (actualmente $(c_1, c_2) = (-2, 2)$) sigue siendo óptimo el conjunto de soluciones encontrado en la pregunta anterior?

Solución:

La solución x^* sigue siendo óptima cuando el vector de costos de la función objetivo es una combinación cónica (comb. no negativa) de gradientes de restricciones:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde $c \in \mathbb{R}^2$ son los posible valores de la función objetivo y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

De las condiciones, esto implica que $c_1 \leq c_2 \leq -3 \cdot c_1$.

Nota de corrección: Alternativamente, se puede dar un argumento gráfico a través de los ángulos de los vectores normales que definen las restricciones activas y llegar a la misma conclusión.

Parte 2 (9 puntos):

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta demostrando la afirmación (verdadera) o dando un contraejemplo (falsa).

(a) (3 puntos) Si un poliedro $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es no acotado, entonces siempre existe una solución $x'(\lambda) = x_0 + \lambda \cdot y_0$ tal que $x'(\lambda) \in \mathbb{X}$ para cualquier valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ y algún valor de $x_0 \in \mathbb{X}$ y $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución: La afirmación es **falsa**.

El poliedro $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ es no acotado y no existe una línea contenida en él.

(b) (3 puntos) Si los conjuntos C_1 y C_2 en $\mathbb{R}^n$ son conos poliedrales, entonces su intersección $C_1 \cap C_2$ es un cono poliedral.

Solución: La afirmación es **verdadera**.

Como C_1 y C_2 son conos poliedrales en $\mathbb{R}^n$, entonces existen matrices A y B tales que

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \leq 0\}$$

Entonces definiendo la matriz $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, se tiene que

$$C_1 \cap C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Dx \leq 0\}$$

por lo que es un cono poliedral.

(c) (3 puntos) El poliedro

$$P = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0 \geq 0; \ x_0 + x_k \leq b_k, \ \forall k \in \{1, ..., n\}\},$$

definido por un parámetro $b \in \mathbb{R}^n$ tiene un único vértice dado por $(0, b_1, ..., b_n)$.

Solución: La afirmación es **verdadera**.

Un vértice de P está definido por $n+1$ restricciones l.i. activas. El poliedro P está definido por, exactamente $n+1$ restricciones por lo que el vértice, si existe, está definido como solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ x_0 + x_n &= b_n \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, el único vértice de P es $(0, b_1, ..., b_n)$.

Pregunta 2 (20 puntos)

Suponga que usted inicia una agencia de bienes raíces que busca maximizar su patrimonio al final de los próximos T meses. La agencia inicialmente no tienen ninguna propiedad y tiene un capital inicial en efectivo de $\$\alpha$ pesos.

El mercado dispone de un conjunto P de propiedades que usted puede adquirir o vender al inicio de cada mes con su dinero. Asume que una propiedad se podría adquirir y vender varias veces durante el horizonte de tiempo, pero solo una vez cada mes. Para ello, usted ha estimado que el valor de compra y venta de la propiedad $p \in P$ al inicio del mes $t \in \{1, ..., T\}$ es de $\$c_{pt}$ pesos. Eso si, debe tener en cuenta que no puede vender una propiedad antes de haber transcurrido d meses completos desde su compra por restricciones gubernamentales. Es decir, si se compra una propiedad el mes t, se puede vender a partir del mes $t + d$.

(a) (15 puntos) Formule un modelo de programación lineal con variables continuas y enteras que ayude a maximizar el patrimonio de la agencia al final del mes T (entendiéndose como patrimonio el efectivo disponible más el valor de las propiedades en posesión en dicho mes). Defina claramente sus variables, función objetivo y restricciones.

Solución: Variables:

- $x^+_{pt} \in \{0, 1\}$: Si se adquiere propiedad $p \in P$ al inicio del mes $t \in \{1, ..., T\}$.
- $x_{pt} \in \{0, 1\}$: Si se posee propiedad $p \in P$ al final del mes $t \in \{1, ..., T\}$.
- $x^-_{pt} \in \{0, 1\}$: Si se vende propiedad $p \in P$ al inicio del mes $t \in \{1, ..., T\}$.
- y_t: Caja disponible al final del mes $t \in \{1, ..., T\}$

La función objetivo consiste en maximizar la cantidad de dinero al final del horizonte de tiempo junto con la valorización de las propiedades que se disponen hasta ese entonces.

$$\text{máx}\, y_T + \sum_{p \in P} c_{p,T} \cdot x_{p,T}$$

Restricciones:

R1) Flujo de dinero $\forall t \in \{2, ..., T\}$:

$$y_t = y_{t-1} + \sum_{p \in p} c_{pt} \cdot (x^-_{pt} - x^+_{pt})$$

Flujo de dinero en $t = 1$

$$y_1 = \alpha - \sum_{p \in P} c_{p1} \cdot x^+_{p1}$$

R2) Solo vender propiedades que dispongo en periodo anterior

$$x^-_{pt} \leq x_{p,t-1} \qquad \forall p \in P, t \in \{2, ..., T\}$$

$$x^-_{p1} = 0 \qquad \forall p \in P$$

R3) Reconocer las propiedades que dispongo

$$x_{pt} = x_{p,t-1} - x^-_{pt} + x^+_{pt} \qquad \forall p \in P, t \in \{2, ..., T\}$$

$$x_{p1} = x^+_{p1} \qquad \forall p \in P$$

R4) No vender una propiedad antes de los d meses (ni inmediatamente)

$$x_{pt}^{+} + \sum_{t'=t}^{t+d-1} x_{pt'}^{-} \leq 1 \qquad \forall p \in P, t \in \{1, ..., T-d+1\}$$

R5) Naturaleza de variables.

$$y_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

$$x_{pt}, x_{pt}^{-}, x_{pt}^{+} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, t \in \{1, ..., T\}$$

Nota de corrección: De los 15 puntos, se dará 6 puntos a la determinación correcta de las variables de decisión del problema. Puede ser igual que la pauta o variables que expresen las mismas decisiones.

Los otros 9 puntos se darán por una modelación correcta del objetivo y de las restricciones del problema. Puede haber varias formas de modelar lo mismo. Si, además de las relaciones solicitadas, se sobrerrestringe el problema o se agregan restricciones adicionales incorrectas, entonces penalizará de acuerdo al criterio del corrector.

No se darán fracciones de puntos.

(b) (5 puntos) Adicionalmente, considere que al inicio del mes t usted puede arrendar toda propiedad $p \in P$ en su posesión por un plazo fijo de 12 meses en los cuales no puede vender la propiedad. La ganancia del arriendo se recibe en 12 cuotas mensuales iguales, tal que si se inicia el arriendo de la propiedad $p \in P$ en el mes $t \in \{1, ..., T\}$, se recibe una cuota de $\$a_{p,t}$ pesos al comienzo de los meses $t, t+1, ..., t+11$. Asuma que una propiedad se puede arrendar el mismo mes que se compra, no puede ser arrendada a más de una persona en un mismo periodo, y el contrato de arriendo puede continuar después del horizonte de tiempo (por ejemplo, se puede iniciar un contrato de arriendo en $t = T-1$).

Realice las modificaciones necesarias a su modelo para considerar la opción de arriendo que usted posee.

Solución: Variables extra:

- $z_{pt} \in \{0, 1\}$: Si se inicia el arriendo de la propiedad p al inicio del mes $t \in \{1, ..., T\}$

Restricciones modificadas o agregadas:

R1) Flujo de dinero $\forall t \in \{2, ..., T\}$:

$$y_t = y_{t-1} + \sum_{p \in p} c_{pt} \cdot (x_{pt}^{-} - x_{pt}^{+}) + \sum_{t'=\text{máx}(t-11,1)}^{t} \sum_{p \in P} a_{p,t'} \cdot z_{pt'}$$

Flujo de dinero en $t = 1$:

$$y_1 = \alpha - \sum_{p \in P} c_{p1} \cdot x_{p1}^{+} + a_{p,1} \cdot z_{p1}$$

R6) Se fuerza a ser dueño de lo que se arrienda

$$z_{p,t} \leq x_{p,t'} \qquad \forall p \in P, t' \in \{t, ..., \text{mín}\{T, t+11\}\}$$

R7) No se puede arrendar más de una vez en un horizonte rodante de un año

$$\sum_{t'=t}^{t+11} z_{pt'} \leq 1, \qquad \forall p \in P, t \in \{1, ..., T\}$$

R8) Naturaleza de variables extra

$$z_{pt} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, t \in \{1, ..., T\}$$

Nota de corrección: De los 5 puntos restantes, dar 2 por definir correctamente las variables de decisión y los otros 3 por las restricciones. No se darán fracciones de puntos.

Pregunta 3 (22 puntos)

Parte 1 (6 puntos)

Considere el siguiente problema P de optimización

$$\min_{x \in \mathbb{X}} f(x),$$

donde $\mathbb{X}$ es un polítopo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Asuma que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente cóncava. Demuestre que toda solución óptima de P es necesariamente un vértice de $\mathbb{X}$.

Solución: Supongamos que la premisa es falsa. Entonces existe una solución óptima x^* con valor óptimo v^* que puede ser escrita como el punto medio de otras dos soluciones $x_1 \in \mathbb{X}$ y $x_2 \in \mathbb{X}$, es decir: $x^* = 0.5x_1 + 0.5x_2$.

Por concavidad estricta de f se cumple que $v^* > 0.5 \cdot f(x_1) + 0.5 \cdot f(x_2) \geq \min(f(x_1), f(x_2))$. En otras palabras, al menos una (x_1 o x_2) posee mejor objetivo que el valor óptimo (contradicción).

Nota de corrección: 3 puntos por un idea que vaya en la dirección correcta y 3 puntos por una demostración correcta. Un argumento gráfico en 2D o 3D no es válido para el caso general y no recibirá más de 2 puntos.

Parte 2 (7 puntos)

Encuentre un modelo lineal equivalente al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max_x \; & e^{-\max_{j\in\{2,\dots,n\}}\{3x_j - x_{j-1}\}} \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{3x_i+4} \\ \text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Solución: Juntando todas las funciones exponenciales en una sola nos queda:

$$\begin{aligned} \max_x \; & e^{\left(\sum_{i=1}^{n}(3x_i+4) - \max_{j\in\{2,\dots,n\}}\{3x_j - x_{j-1}\}\right)} \\ \text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ocupando que la función exponencial es siempre creciente tenemos:

$$\begin{aligned} \max_x \; & \sum_{i=1}^{n} 3x_i + 4n - \max_{j\in\{2,\dots,n\}}\{3x_j - x_{j-1}\} \\ \text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Omitiendo la constante $4n$ y cambiando de máx a mín para el problema general nos queda:

$$\begin{aligned}
\min_{x} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i + \max_{j\in\{2,\dots,n\}} \{3x_j - x_{j-1}\} \\
\text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Linearizamos la función objetivo y el mín de las restricciones:

$$\begin{aligned}
\min_{x,u} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i + u \\
\text{s.t. } & 3x_i + x_{i+2} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& u \geq 3x_i - x_{i-1} && \forall i \in \{2,\dots,n\} \\
& x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Linearizamos los valores absolutos y nos queda:

$$\begin{aligned}
\min_{x,u} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i + u \\
\text{s.t. } & 3x_i + x_{i+2} \geq x_{i+1} - x_{i+2} && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& 3x_i + x_{i+2} \geq -x_{i+1} + x_{i+2} && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq x_{i+1} - x_{i+2} && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq -x_{i+1} + x_{i+2} && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& u \geq 3x_i - x_{i-1} && \forall i \in \{2,\dots,n\} \\
& x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalmente, simplificando y ordenando las variables de las restricciones tenemos:

$$\begin{aligned}
\min_{x,u} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i + u \\
\text{s.t. } & 3x_i - x_{i+1} + 2x_{i+2} \geq 0 && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& 3x_i + x_{i+1} \geq 0 && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& x_{i+2} \geq -4 && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& 2x_{i+1} - x_{i+2} \geq -4 && \forall i \in \{1,\dots,n-2\} \\
& u \geq 3x_i - x_{i-1} && \forall i \in \{2,\dots,n\} \\
& x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Parte 3 (9 puntos)

Considere un vector de costos $c \in \mathbb{R}^{1113}$ y un polítopo no vacío $\mathbb{X} := \{x \in \mathbb{R}^{1113} : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{2022\times 1113}$ y $b \in \mathbb{R}^{2022}$. Además, considere estos dos conjuntos adicionales:

- $\mathbb{X}_1 := \{x \in \mathbb{R}^{1113} : d_1^\top x \leq g_1\}$, donde $d_1 \in \mathbb{R}^{1113}$ y $g_1 \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{X}_2 := \{x \in \mathbb{R}^{1113} : d_2^\top x \geq g_2\}$, donde $d_2 \in \mathbb{R}^{1113}$ y $g_2 \in \mathbb{R}$

Formule un modelo lineal equivalente (posiblemente con variables enteras) para cada uno de los siguientes problemas:

(a) (3 puntos) $\min_{x \in \mathbb{X} \cap (\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2)} c^\top x$,

Solución: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^\top x \text{ s.a. } Ax \leq b, d_1^\top x \leq g_1, d_2^\top x \geq g_2\}$

(b) (3 puntos) $\min_{x \in \mathbb{X} \cap (\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2)} c^\top x$,

Solución: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^\top x \text{ s.a. } Ax \leq b, d_1^\top x \leq g_1 + My, d_2^\top x \geq g_2 - M(1-y), y \in \{0,1\}\}$,

donde $M \geq \max_{x \in \mathbb{X}} d_i^\top x - g_i$ para $i = 1, 2$.

Nota de corrección: La definición de M está para educar, pero no es necesario para obtener máximo puntaje.

(c) (3 puntos) $\min_{x \in \mathbb{X} \cup (\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2)} c^\top x$,

Solución: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^\top x \text{ s.a. } Ax \leq b + M \cdot y \cdot \mathbf{1}^\top, d_1^\top x \leq g_1 + M(1-y), d_2^\top x \geq g_2 - M(1-y), y \in \{0,1\}\}$,

donde $M \geq \max(M, \max ||Ax - b||_\infty \text{ s.a. } d_1^\top x \leq g_1, d_2^\top x \geq g_2)$.

Nota de corrección: La definición de M está para educar, pero no es necesario para obtener máximo puntaje.