PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 1
Profesores: R. Cuadrado - J. González
G. Méndez - S. Vásquez
F. Verástegui

Interrogación 1

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Magdalena posee una granja la cual esta compuesta por $i \in I$ cuadrantes la cual desea rentabilizar para los siguientes $t \in T$ días. Usted sabe que existe un conjunto de $j \in J$ tipos de semillas que puede conseguir en el mercado por un precio de c_j pesos la bolsa de semillas del tipo j. Cada bolsa de semilla alcanza para plantar exactamente un cuadrante de la granja.

Dependiendo del día t en que sea plantada, cada semilla del tipo j demora exactamente $d_{jt} > 0$ días para poder ser cosechada. A su vez, el precio de venta de la cosecha de la semilla j es de v_{jt} si se realiza en el día t. Por otra parte, se sabe que en cada cuadrante solo se puede plantar un tipo de semilla a la vez, en donde una vez cosechado el cuadrante se podrá plantar la siguiente semilla.

(a) **(12 puntos)** Plantee un modelo de programación lineal en variables enteras con el cual pueda maximizar la utilidad de la granja al término del día T. Asuma que al inicio del primer día usted comienza con α pesos, todos los cuadrantes i libres para plantar y sin ningún tipo de semilla en stock.

Solución:

VARIABLES:

x_{ijt}: Variable binaria con valor 1 si se planta semilla en el cuadrante i, del tipo j en el día t.
y_{ijt}: Variable binaria con valor 1 si existe semilla en el cuadrante i, del tipo j en el día t.
z_{jt}: Cantidad de bolsas de semilla j compradas en el día t
I_t: Dinero disponible al término del día t.
S_{jt}: Cantidad de semillas del tipo j al término del día t.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\max I_T$$

R1) Flujo de dinero

$$I_{t-1} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J : t - d_{jt} \geq 2} v_{jt} X_{ijt} - \sum_{j \in J} c_j z_{jt} = I_t \quad \forall t \in T : t \geq 2$$

$$\alpha - \sum_{j \in J} c_j z_{j1} = I_1$$

$$I_t \geq 0 \quad \forall t \in T.$$

R2) Inventario de semillas

$$S_{j,t-1} + z_{jt} - \sum_{i \in I} X_{ijt} = S_{jt} \quad j \in J, t \in T : t \geq 2$$

$$z_{j1} - \sum_{i \in I} X_{ij1} = S_{j1} \quad j \in J$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad j \in J, t \in T$$

R3) Duración de las plantaciones y cosecha

$$d_{jt} X_{ijt} \leq \sum_{\theta=t}^{min\{T, t+d_{jt}\}} Y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T$$

$$X_{ijt} \leq 1 - \frac{\sum_{\theta=t}^{min\{T, t+d_{jt}\}} X_{ijt}}{d_{jt}} \quad i \in I, j \in J, t \in T$$

R4) Naturaleza de variables

$$X_{ijt}, Y_{ijt} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T$$

$$I_t \in Z_0^+ \quad \forall t \in T.$$

$$S_{jt} \in Z_0^+ \quad \forall j \in J, t \in T.$$

(b) **(8 puntos)** La asociación de granjeros busca incentivar la diversificación de las cosechas. Para ello se le indica que existe un bono de β pesos por cada día en los que se coseche al menos δ tipos de cultivos diferentes, independiente de la cantidad de estos. Modifique la modelación anterior de modo de poder contemplar este requisito.

Solución: Se requiere una nueva variable:

VARIABLES:

Q_t: Variable binaria con valor 1 si se obtiene bono por diversificación y 0 e.o.d

W_{jt}: Variable binaria con valor 1 si se cosecha cultivo j en dia t y 0 e.o.c.

PARAMETRO AUXILIAR:

M: Parámetro auxiliar de valor grande.

Se modifican las siguientes restricciones

R1) Flujo de dinero

$$I_{t-1} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J : t - d_{jt} \geq 2} v_{jt} X_{ijt} - \sum_{j \in J} c_j z_{jt} + \beta Q_t = I_t \quad \forall t \in T : t \geq 2$$

$$\alpha - \sum_{j \in J} c_j z_{j1} + \beta Q_1 = I_1$$

R6) Conocer si se generó algún cultivo del tipo j en el día t

$$W_{jt} \leq M \sum_{i} X_{ij,t-d_{jt}} \quad \forall j \in J, t \in T : t - d_{jt} \geq 1$$

$$W_{jt} = 0 \quad \forall j \in J, t \in T : t - d_{jt} \leq 0$$

$$Q_t \leq \frac{\sum_{j \in J} W_{jt}}{\delta} \quad \forall t \in T$$

R7) Naturaleza nuevas variables

$$Q_t \in \{0,1\} \quad \forall t \in T.$$
$$W_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, t \in T.$$

Pregunta 2 (20 puntos)

Suponga que usted necesita realizar la planificación de la elaboración de diferentes productos lácteos, contenidos en el conjunto P. Para ello, cuenta con dos máquinas, una de preparación del producto y la otra de envasado. Sabe que todos los productos deben pasar por ambas máquinas para su elaboración (primero por la de preparación y luego por la de envasado). El tiempo de procesamiento del producto $i \in P$ en la máquina k es t_{ik}.

Una de las dificultades que posee esta planificación es que cada vez que se cambia el producto siendo procesado por una máquina toma un tiempo que depende de los productos. En particular, el parámetro s_{ijk} corresponde al tiempo de setup en la máquina $k \in \{1,2\}$ cuando se pasa de procesar el producto $i \in P$ al producto $j \in P$.

El problema se puede ver reflejado en el siguiente modelo de optimización:

$$\begin{array}{lll}
Min & \alpha & \\
s.a. & \sum_{j \in P: j \neq i} x_{ijk} \leq 1 & \forall i \in P, k \in \{1,2\} \quad (1) \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in P: j \neq i} x_{ijk} = |P| - 1 & \forall k \in \{1,2\} \quad (2) \\
& z_{ik} + s_{ijk} \leq y_{jk} + (1 - x_{ijk}) \cdot M & \forall i \in P, j \in P : j \neq i, k \in \{1,2\} \quad (3) \\
& y_{ik} + t_{ik} = z_{ik} & \forall i \in P, k \in \{1,2\} \quad (4) \\
& z_{i1} \leq y_{i2} & \forall i \in P \quad (5) \\
& z_{i2} \leq \alpha & \forall i \in P \quad (6) \\
& x_{ijk} \in \{0,1\} & \forall i \in P, j \in P, j \neq i, k \in \{1,2\} \quad (7) \\
& y_{ik}, z_{ik} \geq 0 & \forall i \in P, k \in \{1,2\} \quad (8) \\
& \alpha \geq 0 & \quad (9)
\end{array}$$

(a) **(14 puntos)** Explique qué representa cada una de las variables del problema. Además indique qué hace cada una de las restricciones, desde la (1) hasta la (9).

Solución: Las variables son las siguientes:

- x_{ijk}: Variable binaria que toma el valor 1 cuando el producto j se hace exactamente después que el producto i en la máquina k.
- y_{ik}: variable que indica el instante de comienzo de procesamiento del producto i en la máquina k.
- z_{ik}: variable que indica el instante de término de procesamiento del producto i en la máquina k.
- α: variable que indica el instante de término de procesamiento del último producto en la última máquina.

Las restricciones hacen lo siguiente:

(i) Se asegura de que cada trabajo tenga a lo más un sucesor en cada máquina.

(ii) Para cada máquina, existen en total $|P|-1$ sucesores. Esta restricción asegura de que se forme la secuencia de producción en cada máquina.

(iii) Restricción que aplica solo cuando $x_{ijk}=1$. En tal caso, la restricción asegura de que en la máquina k el trabajo j empieza después de que haya terminado el trabajo i y se haya hecho el setup correspondiente.

(iv) Relaciona el tiempo de comienzo y término de procesamiento de un trabajo, dado por su duración (parámetro t_{ik}).

(v) Un trabajo no puede haber empezado su procesamiento en la segunda máquina si es que no ha terminado en la primera.

(vi) Define a la variable α. Se asegura de que sea mayor o igual a todos los intantes de términos de todos los productos. De esta forma, al minimizar esta variable, tomara el valor correspondiente al mayor de todos los z_{i2}.

Las restricciones restantes definen la naturaleza de las variables.

(b) **(6 puntos)** Después de analizar el modelo anterior, se le ha solicitado incorporar en la toma de decisiones la planificación de limpieza y mantención de cada una de las máquinas $k \in \{1,2\}$.

Para esto, usted cuenta con cierta información. Por un lado, se sabe que durante el proceso completo de preparación y envasado, cada máquina debe ser limpiada y mantenida un total de $m_k \in \mathbb{Z}_+$ veces. Adicionalmente, se sabe que realizar la limpieza y mantención de la máquina k entre el proceso del producto $i \in P$ y producto $j \in P$ toma un tiempo igual a f_{ijk}.

Indique qué modificaciones (incorporar, modificar o quitar variables o restricciones) debería usted realizar al modelo anterior para obtener tanto la planificación de elaboración como la planificación de limpieza y mantención.

Solución: Se define una nueva variable:

- θ_{ijk}: Variable binaria que toma el valor 1 cuando se programa una limpieza y mantención para la máquina k entre la producción de el producto j y el producto i.

Se modifica la restricción (3) para incorporar el tiempo de limpieza y mantención de la siguiente manera:

$$z_{ik} + s_{ijk} + \theta_{ijk} f_{ijk} \leq y_{jk} + (1 - x_{ijk}) \cdot M \quad \forall i,j,k \quad (3)$$

Adicionalmente se incorporan las siguientes restricciones:

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in P: j \neq i} \theta_{ijk} \geq m_k \quad \forall k \quad (10)$$

$$\theta_{ijk} \leq x_{ijk} \quad \forall i,j,k \quad (11)$$

$$\theta_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i \quad (12)$$

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(3 puntos)** Sea $b > 0$. Considere el problema

$$(P) \quad \text{máx} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{b + \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\text{s.a} \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Utilizando el concepto de valor óptimo, indique si el problema (P) admite solución óptima o no.

Solución:
Notemos que la mínima cota superior que puede tomar la función objetivo es $v(P) = 1$, el cuál corresponde al valor óptimo. Por otro lado, a medida que $\|x\| \to \infty$, la evaluación de la función objetivo tiende a 1 por la izquierda. Sin embargo, no existe una solución x tal que $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{b+\sum_{i=1}^{n} x_i} = 1$. Por lo tanto, (P) no admite solución óptima.

(b) **(6 puntos)** Considere el problema

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & f(x,y) \\ & \text{s.a.} & (x,y) \in \mathbb{D} \end{array}$$

Para los siguientes casos, indique cuándo hay seguridad de que existe solución óptima mediante el teorema de Bolzano–Weierstrass.

i. **(3 puntos)** $f(x,y) = 4x+5y\,; \quad \mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+5y \leq 20,\ x+3y \geq 3,\ 0 \leq x \leq 10\}$
Solución: $f(x,y)$ es una función continua ya que es lineal. $\mathbb{D}$ es cerrado ya que está representado por restricciones lineales del tipo $\leq$, $\geq$, y las funciones de restricciones son continuas. $\mathbb{D}$ es acotado ya que $0 \leq x \leq 10$, y que $1-\frac{x}{3} \leq y \leq 4-\frac{2x}{5}$, por lo que evaluando $x = 0$ y $x = 10$ se obtiene que $-7/3 \leq y \leq 4$ (una explicación gráfica igual es válida). Luego, $\mathbb{D}$ es compacto. Por último, $\mathbb{D}$ es no vacío, pues $(x,y) = (3,0) \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, el teorema de B–W permite concluir que (P) admite solución óptima.

ii. **(3 puntos)** $f(x,y) = x + 3y\,; \quad \mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : 1 \leq xy \leq 10,\ y \leq 10\}$
Solución: El teorema de B–W no es concluyente, ya que $\mathbb{D}$ es no acotado. Basta tomar un punto $(x,y) = (n, 1/n)$, con $n > 0$, y verificar que $(x,y) \in \mathbb{D}$ cuando $n \to +\infty$.

(c) **(3 puntos)** Considere el problema

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & f(x) \\ & \text{s.a.} & x \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Z}^n. \end{array}$$

¿Por qué basta con corroborar que $\mathbb{D}$ sea no vacío y acotado para garantizar que (P) admite solución óptima?

Solución:

[Disclaimer]: Se requiere, adicionalmente, que f esté bien definida sobre $\mathbb{D}$. Por ende, si se argumenta que la afirmación es incorrecta por este motivo, se considerará correcto.

Todo problema entero con dominio acotado y función objetivo continua sobre $\mathbb{D}$ (bien definida) admite solución óptima, pues el conjunto de soluciones factibles es finito.

(d) **(5 puntos)** Considere un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$, una variable $x \in [\alpha, \beta]^2$, donde $\alpha < \gamma < \beta$, y una variable $y \in \{0,1\}$. La proposición

"Si $x_1 < \gamma$, entonces $x_2 \leq \gamma$",

se puede modelar con las siguientes restricciones lineales:

$$x_1 \geq \gamma - M_1 \cdot y \tag{1a}$$
$$x_2 \leq \gamma + M_2 \cdot (1 - y) \tag{1b}$$
$$x \in [\alpha, \beta]^2 \tag{1c}$$
$$y \in \{0, 1\}, \tag{1d}$$

donde $M_1, M_2 \gg 0$.

i. **(3 puntos)** Explique por qué las restricciones modelan correctamente la proposición.
Solución: Notemos que, para que $x_1 < \gamma$, se necesita que $y = 1$. En dicho caso, tendremos que $x_2 \leq \gamma$.
Por otro lado, si $y = 0$, tendremos que $x_1 \geq \gamma$ y $\alpha \leq x_2 \leq \beta$.
Así, la proyección sobre el espacio x del conjunto de puntos (x, y) que satisfacen el sistema es el conjunto $\{x_1 < \gamma,\ x_2 \leq \gamma\} \cup \{x_1 \geq \gamma\}$, el cual se compone por los puntos x que satisfacen la proposición.

ii. **(2 puntos)** Explicite el menor valor que pueden tomar M_1 y M_2.
Solución: $M_1 = (\gamma - \alpha)$ y $M_2 = (\beta - \gamma)$.

(e) **(3 puntos)** Ahora, se desea modelar la siguiente proposición:

"Si $x_1 \leq \gamma$, entonces $x_2 \leq \gamma$".

Para esto, se considera una variable $y \in \{0, 1\}^2$ y se proponen las siguientes restricciones lineales:

$$x_1 \leq \gamma + M \cdot (1 - y_1) \tag{2a}$$
$$x_2 \leq \gamma + M \cdot (1 - y_2) \tag{2b}$$
$$y_1 \leq y_2 \tag{2c}$$
$$x \in [\alpha, \beta]^2 \tag{2d}$$
$$y \in \{0, 1\}^2. \tag{2e}$$

¿Por qué estas restricciones no modelan correctamente la proposición?

Solución: Es claro que si $y_1 = 1$, fuerzo a que se cumpla la primera restricción, y por lo tanto, también la segunda. Sin embargo, y_1 no es forzada a tomar algún valor en particular. Si $y_1 = 0$, no tengo certeza de que la primera restricción se cumpla o no, y en el caso de que se cumpla, no estaría forzando nada en la segunda restricción.