PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-2
Profesores: M. Klapp, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Tarea 2

Fecha de entrega: Viernes 15 de octubre - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea. Sin embargo, también es posible hacer la tarea individualmente.
- La entrega de la tarea es online en formato PDF a través de un **Google Form** dispuesto en Canvas. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano. Si es a mano, se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable. El formato de entrega del archivo es **nombre_completo_1 - nombre_completo_2.pdf o nombre_completo_1.pdf**, dependiendo de si hiceron la tarea en pareja o solos (Ej: camila_ignacia_toro_uquillas - pedro_pablo_perez_pereira.pdf o camila_ignacia_toro_uquillas.pdf).

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la tarea para incentivar este formato. También, el ayudante podrá descontar **3 décimas sobre la nota final** si la tarea está ilegible o desordenada de acuerdo a su criterio.
- El plazo de entrega es impostergable. Tarea atrasada se considera **tarea NO entregada**.
- La tarea es en pareja. No se recomienda dividir el trabajo en dos, sino que hacer un trabajo completo en conjunto. Pueden discutir los problemas con los profesores y ayudantes del curso, pero al final cada grupo es responsable de sus resultados y conclusiones. Una actitud deshonesta será sancionada de acuerdo a lo estipulado en el programa de este curso.[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, debe ser envíada a través del foro **Tarea 2** publicado en Canvas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se recomienda hacer las preguntas anticipadamente. El **día de la entrega se dejará de responder consultas**.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. Existencia, Equivalencias y Convexidad (20 puntos)

(a) Se tiene el siguiente modelo de optimización, donde α es una constante y las variables son x_1 y x_2.

$$\text{máx } \frac{1997}{e^{10x_1+7x_2}}$$
$$ln(x_1 + x_2 - \alpha + e^4) \geq 4$$
$$\sqrt[3]{\alpha x_2 - 2} \geq 0$$

(I) (3 puntos) Formule un problema de Programación Lineal equivalente. Justifique claramente cada paso.

(II) (6 puntos) ¿Para qué rango de valores de α el problema posee solución óptima? Justifique su respuesta.

(b) b.1) (2 puntos) Demuestre por definición que la función x^2 es convexa.

b.2) Se tiene el siguiente modelo de optimización:

$$\text{mín } x^2 + 16x + y^2 - 18y$$
$$(x-5)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$
$$y \geq 1$$

(I) (2 puntos) Demuestre que el problema es convexo.

(II) (3 puntos) Determine si el problema admite solución óptima.

(c) (4 puntos) Sean $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas con $i = 1, ..., m$. Sean además λ_i con $i = 1, ..., m$ escalares no negativos. Pruebe que:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

es convexa.

Solución Problema 1.

(a) (I) Para la **función objetivo**, notemos que maximizar la función $\frac{1}{x}$ equivale a minimizar el denominador, es decir, a minimizar x. Además, el número 1997 es una constante que multiplica la F.O por lo que al sacarla queda un problema equivalente.

$$\text{máx } \frac{1997}{e^{10x_1+7x_2}} \sim \text{mín } e^{10x_1+7x_2}$$

La función e^x es creciente al igual que x, por lo que ambas tienen el mismo comoportamiento. Esto indica que podemos utilizar la equivalencia relacionada a composición de funciones, de modo que $\text{mín } g(f(x)) \sim \text{mín } f(x)$. Así:

$$\text{máx } \frac{1997}{e^{10x_1+7x_2}} \sim \text{mín } e^{10x_1+7x_2} \sim \text{mín } 10x_1 + 7x_2$$

Para linealizar la **primera restricción** aplicamos:

$$ln(x_1 + x_2 - \alpha + e^4) \geq 4 / \ \ e^x$$
$$e^{ln(x_1+x_2-\alpha+e^4)} \geq e^4$$
$$x_1 + x_2 - \alpha + e^4 \geq e^4$$
$$x_1 + x_2 \geq \alpha$$

Para linealizar la **segunda restricción** elevamos ambos lados a 3:

$$\sqrt[3]{\alpha x_2 - 2} \geq 0$$

$$\alpha x_2 - 2 \geq 0$$

$$\alpha x_2 \geq 2$$

Así el problema lineal equivalente es:

$$\text{mín } 10x_1 + 7x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq \alpha$$

$$\alpha x_2 \geq 2$$

(II) Para determinar los rangos analizaremos el problema equivalente y nos pondremos en casos para los valores de α.

Caso 1: $\alpha = 0$
Al analizar la segunda restricción del problema equivalente, vemos que se genera una inconsistencia:

$$\alpha x_2 \geq 2$$

$$0 \geq 2$$

Por lo que con $\alpha = 0$ el problema es infactible.

Caso 2: $\alpha < 0$
Por la segunda restricción vemos que si $\alpha < 0$ entonces $x_2 < 0$. Tomando eso en cuenta utilizaremos el Teorema de Programación Lineal (TPPL) para ver si el problema admite solución óptima.

- ◇ Problema es lineal, ya que la F.O y restricciones son lineales.
- ◇ El dominio es cerrado (signos de $\geq$).
- ◇ El dominio es no vacío. Por ejemplo, el punto (α - $2/\alpha$,$2/\alpha$) pertenece a este.
- ◇ Falta ver si la F.O está acotada por abajo, dado que es un problema de minimización.

  Si multiplicamos la restricción 1 por 10:

  $$10x_1 + 10x_2 \geq 10\alpha$$

  Como $x_2 < 0$ se cumple que:

  $$10x_1 + 10x_2 \geq 10\alpha$$

  $$10x_1 + 7x_2 + 3x_2 \geq 10\alpha$$

  $$10x_1 + 7x_2 \geq 10x_1 + 7x_2 + 3x_2 \geq 10\alpha$$

  $$10x_1 + 7x_2 \geq 10\alpha$$

  Esto indica que hay una cota inferior para la función objetivo.

Como se cumplen todas las condiciones del teorema, podemos decir que el problema admite solución óptima cuando $\alpha < 0$.

Caso 3: $\alpha > 0$
Por la segunda restricción vemos que si $\alpha > 0$ entonces $x_2 > 0$. Tomando eso en cuenta utilizaremos el Teorema de Programación Lineal (TPPL) para ver si el problema admite solución óptima.

- ◇ Problema es lineal, ya que la F.O y restricciones son lineales.
- ◇ El dominio es cerrado (signos de $\geq$).
- ◇ El dominio es no vacío. Por ejemplo, el punto (α - $2/\alpha$,$2/\alpha$) pertenece a este.

◇ Falta ver si la F.O está acotada por abajo, dado que es un problema de minimización.

Si multiplicamos la restricción 1 por 10:

$$10x_1 + 10x_2 \geq 10\alpha$$

$$10x_1 \geq 10\alpha - 10x_2$$

Si multiplicamos la restricción 2 por 7:

$$7\alpha x_2 \geq 14$$

$$7x_2 \geq \frac{14}{\alpha}$$

Sumando ambas condiciones:

$$10x_1 + 7x_2 \geq 10\alpha - 10x_2 + \frac{14}{\alpha}$$

Se ve que si $x_2 \longrightarrow \infty$ entonces la F.O no tiene cota inferior.

Como no se cumplen todas las condiciones del teorema, no podemos decir con certeza que el problema admite solución óptima cuando $\alpha > 0$.

(b) b.1) Sean x e $y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in (0, 1)$ queremos demostrar que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Como $f(x) = x^2$:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$

$$\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$

$$2\lambda(1-\lambda)xy \leq \lambda x^2 - \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)y^2 - (1-\lambda)^2 y^2$$

$$2\lambda(1-\lambda)xy \leq \lambda x^2[1-\lambda] + (1-\lambda)y^2[1-(1-\lambda)]$$

$$2\lambda(1-\lambda)xy \leq \lambda x^2[1-\lambda] + (1-\lambda)y^2[\lambda]$$

Tomando en cuenta que $\lambda(1-\lambda) > 0$:

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$0 \leq (x-y)^2$$

Esto último es siempre cierto, por lo que queda demostrado que x^2 es una función convexa.

b.2) (I) Notemos que para la función objetivo:

$$x^2 + 16x + y^2 - 18y = x^2 + 16x + 64 + y^2 - 18y + 81 - 145 = (x+8)^2 + (y-9)^2 - 145$$

Esto es una función $g_1(x; y) = x + 8$ y una función $g_2(x; y) = y - 9$ ambas convexas. A cada una se le ha compuesto con la función h(x) = x^2, que también es convexa, por lo que

$h(g_1(x;y)) = (x+8)^2$ es convexo, así como lo es también $h(g_2(x;y)) = (y-9)^2$. Por último, estamos sumando dos funciones convexas y restándole un escalar, lo que resulta convexo.

En el caso de las restricciones, corresponde a una circunferencia de radio 1 centrada en el punto (5,1) la cual está cortada por la recta $y = 1$. El espacio descrito es convexo.

Como la F.O y dominio son convexos, podemos decir que el problema es convexo.

(II) Utilizaremos el teorema de B-W:

- ◇ La F.O es continua, ya que es la suma de funciones continuas.
- ◇ El dominio es cerrado (signos de $\leq, \geq$).
- ◇ El dominio es distinto de vacío, ya que por ejemplo el punto (5,1) pertenece a este.
- ◇ Como el dominio es una circunferencia cortada por una recta, las variables están acotadas, donde $x \in [4,6]$ e $y \in [1,2]$.

Como se cumplen todas las condiciones del teorema de B-W, el problema admite solución óptima.

(c) Sean x e $y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in (0,1)$. De la definición de $h(x)$ se tiene que:

$$h(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y)$$

Como cada f_i es convexa, se tiene:

$$h(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)]$$

$$h(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)] =$$

$$h(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(y)]$$

$$h(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot h(x) + (1-\lambda) \cdot h(y)]$$

Esta es la definición de convexidad, por lo que $h(x)$ es convexa.

Problema 2. Geometría Poliedral (20 puntos)

(a) (3 puntos) Pruebe que para todo vértice de un poliedro P existe un vector de costos c tal que ese vértice es solución óptima única para el problema $\{\text{mín}\, c^T x \text{ s.a. } x \in P\}$

(b) (3 puntos) Demuestre que para un polítopo no vacío existe siempre una solución óptima en un vértice. **HINT:** Recuerda que cualquier x se puede escribir como suma entre la combinación convexa de los vértices más un rayo del cono recesivo.

(c) (5 puntos) En la siguiente lista, indique si el conjunto es poliedral, y de ser así, señale su representación poliedral.

(I) $X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 \leq x_2^2, \quad x_1 \geq 0\right\}$

(II) $X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \text{máx}\left[|x_1 - x_2|,\ |x_1 + x_2|\right] \leq x_1 + x_2\right\}$

(III) $X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \text{mín}\left[2|x_1 - x_2|,\ 2x_1 + 2x_2\right] \leq x_1 + x_2\right\}$

(d) (9 puntos) A continuación, se enumeran varios conjuntos. Complete la siguiente tabla indicando "sí" o "no".

(I) $U = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 - x_3 = 1\right\}$

(II) $V = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 - x_3 = 0\right\}$

(III) $W = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 \neq 0, \quad x_1 + x_3 = 0\right\}$

(IV) $X = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0\right\}$

(V) $Y = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 2\right\}$

(VI) $Z = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq x_3\right\}$

Propiedad	U	V	W	X	Y	Z
Existencia de representación poliedral						
¿Es convexo?						
¿Es un cono poliedral?						

Solución Problema 2.

(a) Sea $I \subseteq \{1, ..., m\}$ el conjunto de restricciones activas en v, es decir, tal que $\alpha_i^T v = b_i \ \ \forall i \in I$ (debe haber al menos m restricciones activas).

Consideremos el valor

$$f(x) = \sum_{i \in I} (b_i - \alpha_i^T x)$$

$$f(x) = \sum_{i \in I} b_i - (\sum_{i \in I} \alpha_i^T) x$$

Sabemos que $f(x) \geq 0 \ \ \forall x : Ax \leq b$. Además, el único punto en el que se da $f(x) = 0$ es en el vértice, es decir, cuando $x = v$.

Esto indica que un vertice es el unico punto que minimiza la suma de holguras de las restricciones activas en ese vertice. Luego, v es el minimizado único de $f(x)$, por lo tanto maximiza $c^T x$ con $c = \sum_{i \in I} \alpha_i$ (suma de las restricciones activas), como hablamos de un problema de minimización $c = -\sum_{i \in I} \alpha_i$.

(b) Supongamos por contradicción que no. Así, sea un x' una solución óptima no vértice. Luego,

$$v^* = c^T x' < c^T v_i \qquad \forall i \in \text{vértices}$$

Luego, es posible escribir x' como combinación lineal convexa de los vértices. Así, $x' = \sum_i \lambda_i v_i$. Así,

$$v^* \quad = \quad c^T x' \quad = \quad c^T \sum_i \lambda_i v_i \quad = \quad \sum_i \lambda_i c^T v_i$$
$$\therefore v^* = \sum_i \lambda_i c^T v_i$$

Luego, esta última igualdad implica que existe un v_i^* tal que: $c^T v_i^* = v^* \qquad \rightarrow\leftarrow$.

(c) (I) Este conjunto no es poliedral. De hecho, el conjunto es $\{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq x_1\} \cup \{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq -x_1\}$ y esta unión es no convexa, ya que por ejemplo, contiene los puntos $(1, -1)$ y el $(1, 1)$, pero no contiene el promedio $(1, 0)$.

(II) Es un conjunto poliedral y su representación es:
$X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \exists u :\ -u \leq x_1 - x_2 \leq u,\ \ -u \leq x_1 + x_2 \leq u,\ \ u \leq x_1 + x_2\right\}$
$X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 :\ x_1 + x_2 \geq |x_1 + x_2|,\ \ x_1 + x_2 \geq x_1 - x_2,\ \ x_1 + x_2 \geq x_2 - x_1\right\}$
$X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_1 \geq 0\right\}$
$X = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\right\}$

(III) Este conjunto no es poliedral. De hecho, $X = \{x :\ 2x_1 + 2x_2 \leq x_1 + x_2\} \cup \{x : 2|x_1 - x_2| \leq x_1 + x_2\} = \{x :\ x_1 + x_2 \leq 0\} \cup \{x_1 - 3x_2 \leq 0,\ \ x_2 - 3x_1 \leq 0\}$ y esta unión es no convexa, ya que por ejemplo, contiene los puntos $(-3, 3)$ y $(3, 1)$ pero no contiene el promedio $(0, 2)$.

(d) La tabla queda de la siguiente forma:

Propiedad	U	V	W	X	Y	Z
Existencia de representación poliedral	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
¿Es convexo?	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
¿Es un cono?	No	No	No	Sí	No	Sí

Problema 3. Simplex (20 puntos)

(a) Se tiene el siguiente modelo de optimización:

$$\text{máx} -x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 \leq 4$$

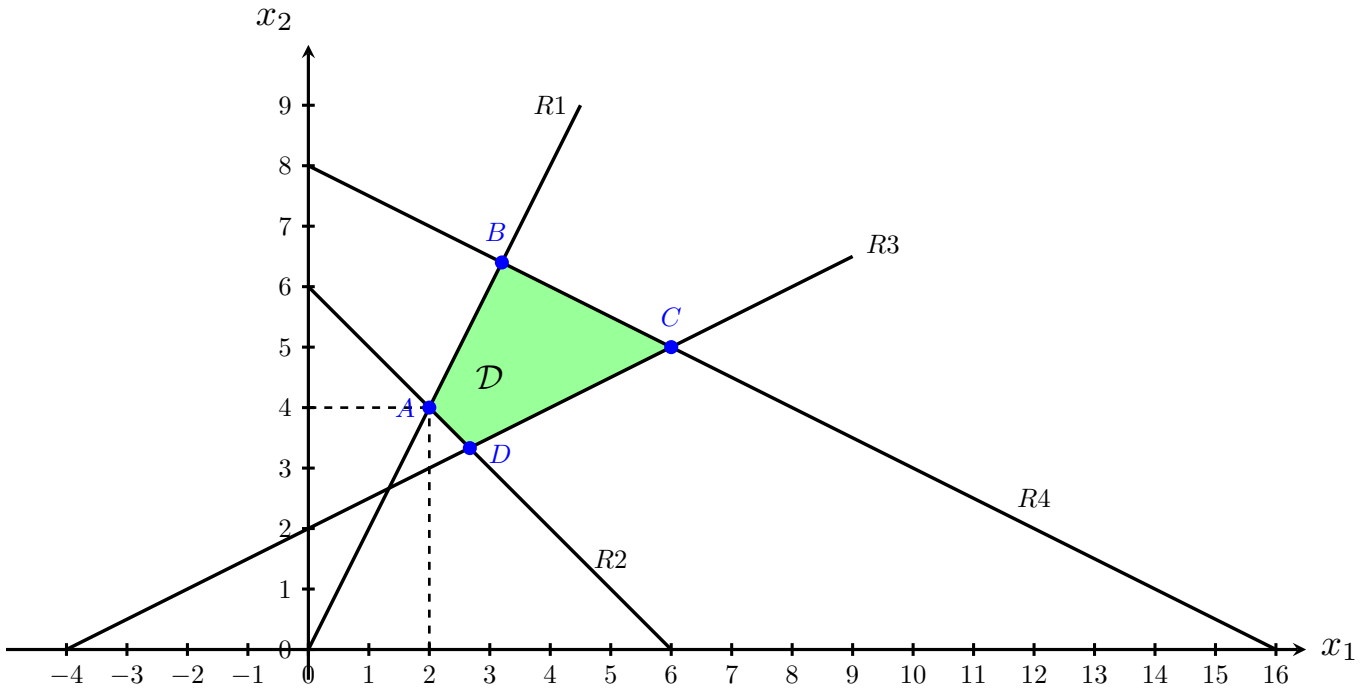
$$x_2 \geq 0$$

(I) (2 puntos) Demuestre que el problema admite solución óptima.

(II) (8 puntos) Ejecute el algoritmo simplex desde el vértice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y resuleva el problema.

(b) Usted acaba de llegar a trabajar a una empresa que fabrica televisores (x_1) y computadores (x_2). Su jefe le comenta que cada televisor se vende a $3M$ (millones) y su costo de fabricación es $2M$. En el caso de los computadores, el precio de venta es $5M$ y el costo $3M$.

Se le solicita maximizar la utilidad y decidir cuántos televisores y computadores producir sujeto a ciertas condiciones que la empresa pide. Sin embargo, el trabajador que estaba antes que usted se llevó casi toda la información que usted necesitaba para saber las restricciones, y lo único que le dejó disponible fue el gráfico que se muestra a continuación, el cual indica en verde la región factible del problema de optimización respectivo (todos los valores del gráfico están en unidades de M).



(I) (2 puntos) Formule matemáticamente un modelo de programación lineal que represente el gráfico mostrado. Defina claramente sus variables de decisión, restricciones y función objetivo.

(II) (2 puntos) Indique el gradiente de la función objetivo y las coordenadas de los vértices A, B, C y D. Con estos datos determine la solución y valor óptimo de manera gráfica.

(III) (4 puntos) Resuelva mediante el algoritmo simplex, ejecutándolo desde el vértice A. Muestre gráficamente como avanza el algoritmo en cada vértice indicando el significado de los costos reducidos.

(IV) (2 puntos)¿Qué pasa si se elimina la restricción 4? Explique en palabras.

Solución Problema 3.

(a) (I) Utilizando el teorema de B-W podemos ver que:

- ◇ La F.O es lineal y por lo tanto continua.
- ◇ El dominio es cerrado (signos de $\geq, \leq, =$).
- ◇ El dominio es distinto de vacío ya que el punto (1,1) pertenece a este.
- ◇ Al analizar las restricciones se ve que las variables x_1 y x_2 se encuentran entre los valores $0 \leq x_i \leq 4 \ \forall i \in \{1, 2\}$ por lo que el dominio es acotado.

Por lo tanto por el teorema de B-W el problema admite solución óptima.

(II) En primer lugar pasamos el problema a su forma estándar. Hay que notar que la variable x_1 no tiene naturaleza de variables, por lo que debemos crear dos variables auxiliares que la representen: $x_1 = \overline{x_1} - \hat{x_1}$

$$\begin{gathered}
\text{mín}\, \overline{x_1} - \hat{x_1} - x_2 \\
\overline{x_1} - \hat{x_1} + x_2 - x_3 = 1 \\
\overline{x_1} - \hat{x_1} - x_2 = 0 \\
\overline{x_1} - \hat{x_1} + x_4 = 4 \\
\overline{x_1}, \hat{x_1}, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{gathered}$$

Nos piden partir en el vértice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En este punto las variables básicas son $(\overline{x_1}, x_2, x_4)$ y las no básicas son $(\hat{x_1}, x_3)$. Teniendo eso claro formamos las matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \ R = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \ B^{-1}R = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \ B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos el criterio de optimalidad para saber si estamos parados en el óptimo. Para eso calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Como hay un costo negativo, no estamos en el óptimo y la variable que entra a la base es x_3. Ahora determinamos la variable que sale de la base mediante el criterio de salida:

$$\min_{u>0} \frac{\overline{b}}{u} = \{\frac{1/2}{-1/2}, \frac{1/2}{-1/2}, \frac{7/2}{1/2}\}$$

Como solo podemos tomar en cuenta las opciones donde $u > 0$, la variable que sale de la base es x_4.

Ahora las variables básicas son $(\overline{x_1}, x_2, x_3)$ y las no básicas son $(\hat{x_1}, x_4)$. Teniendo eso claro formamos las matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \ R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ B^{-1}R = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos el criterio de optimalidad para saber si estamos parados en el óptimo. Para eso calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como todos los costos reducidos con mayores o iguales a 0 estamos en el óptimo.

(b) (I) El modelo que describe el gráfico es:

$$\text{máx}\, x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde las variables son la cantidad de televisores (x_1) y la cantidad de computadores (x_2) y la F.O corresponde a maximizar la utilidad.

(II) El gradiente de la F.O es (1,2) y las coordenadas de los vértices son:

- ◇ A : (2 ; 4)
- ◇ B : (3.2 ; 6.4)
- ◇ C : (6 ; 5)
- ◇ D : (2.67 ; 3.33)

La solución óptima corresponde a la recta que une el vértice B y C y su valor óptimo es 16 M.

(III) En primer lugar pasamos el problema a su forma estándar.

$$\text{mín}\, -x_1 - 2x_2$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_4 = 6$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_5 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_6 = 16$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Nos piden partir en el vértice A (2,4). En este punto las variables básicas son (x_1, x_2, x_5, x_6) y las no básicas son (x_3, x_4). Teniendo eso claro formamos las matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ 1 & -1 \\ -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos el criterio de optimalidad para saber si estamos parados en el óptimo. Para eso calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

Como hay un costo negativo, no estamos en el óptimo y la variable que entra a la base es x_4. Ahora determinamos la variable que sale de la base mediante el criterio de salida:

$$\min_{u>0} \frac{\overline{b}}{u} = \{\frac{2}{-1/3}, \frac{4}{-2/3}, \frac{1}{-1}, \frac{6}{5/3}\}$$

Como solo podemos tomar en cuenta las opciones donde $u > 0$, la variable que sale de la base es x_6.

Ahora las variables básicas son (x_1, x_2, x_5, x_4) y las no básicas son (x_3, x_6). Teniendo eso claro formamos las matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ -1/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ -4/5 & 0 & -1 & 3/5 \\ 1/5 & -1 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \\ 4/5 & 3/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 16/5 \\ 32/5 \\ 28/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos el criterio de optimalidad para saber si estamos parados en el óptimo. Para eso calculamos los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\overline{c_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como todos los costos reducidos con mayores o iguales a 0 estamos en el óptimo.

Se debe mostrar cómo avanza el algoritmo en el gráfico, indicando los costos reducidos. Los costos reducidos indican en cuánto mejora la F.O si agregamos una unidad de la variable en cuestión.

(iv) Al eliminar la R4 el problema se vuelve no acotado, ya que el gradiente va en la dirección de no acotamiento.