PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 9 de octubre

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día martes 9 de octubre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (13 puntos)

a) (6 puntos) Encuentre los puntos extremos de los siguientes poliedros:

i) (2 punto) $X = Conv\left((0,0),(1,1),(1,0),(\frac{4}{5},\frac{1}{2}),(\frac{1}{5},\frac{1}{2})\right)$

donde $Conv(v1,...,vn)$, es la envoltura convexa o conjunto de todas las combinaciones convexas posibles de los vértices $v_1,\ldots,v_n$.

ii) (2 puntos) $X = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \sum_{j=1}^n x_j \leq \frac{3}{2}\}$

iii) (2 puntos) $X = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 \leq x, \sum_{i=1}^n x_i = 1, \sum_{i=1}^n a_i x_i = 1\}$, con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$

b) (4 puntos) Indique todos los puntos extremos y el cono recesivo de los siguientes poliedros, especificando explícitamente en qué plano o recta se encontrará el cono ($x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, etc.) :

i) (2 puntos) $X = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$

ii) (2 puntos) $X = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2, x_3 \geq 0\}$

c) (3 puntos) Sea P un poliedro, con $x_1,\ldots,x_n \in P$. Demuestre

$$\bar{x} \in P \iff 0 \in P$$

con $\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i = \bar{x}$, $\forall \vec{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) : \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$, $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$

Solución Problema 1.

a) *i*) Puntos extremos $= \{(0,0),(1,0),(\frac{1}{5},\frac{1}{2}),(1,1)\}$. Es fácil ver en un gráfico.

ii) Un punto extremo debe tener al menos n restricciones activas. Entonces, los puntos extremos son:

- $x_1 = \cdots = x_n = 0$
- Los n vectores canónicos: $e_1,\ldots,e_n$.
- $2n$ combinaciones (si $n \geq 2$): $e_i + \frac{1}{2}e_j, \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} : j \neq i$

iii) Un punto extremo debe tener al menos n restricciones linealmente independientes activas, es decir, deben haber a lo más dos variables distintas de cero y al menos una. Si $a_1 > 1$, o, si $a_n < 1$ el problema es infactible, por lo tanto, se puede asumir que $a_1 \leq 1 \leq a_n$. Sean i,j índices tal que $x_i, x_j > 0$, y por lo tanto, $x_l = 0, \forall l \in \{1,\ldots,n\} : l \neq i,j$. Entonces, $x_i + x_j = 1, x_i a_i + x_j a_j = 1$, sólo es posible si $a_i \leq 1 \leq a_j$. Con lo que los puntos extremos serían:

$$x_i = \frac{a_j - 1}{a_j - a_i}, x_j = \frac{1 - a_i}{a_j - a_i}, x_l = 0, \forall i \in \{1,\ldots,n\} : a_i \leq 1, \forall j \in \{1,\ldots,n\} : a_j \geq 1$$

Otra posibilidad es tener un índice, p, tal que $x_p > 0$ y $x_l = 0, \forall l \in \{1,\ldots,n\} : l \neq p$. Para esto, es necesario que $x_p = 1, x_p a_p = 1 \iff a_p = 1$. Entonces si existe p tal que $a_p = 1$, existe un punto extremo $x = e_p$.

b) *i*) El poliedro no tiene puntos extremos porque x_3 no está acotado en nunguna dirección. Una forma gráfica de ver el poliedro es un triángulo en el plano xy trasladado infinitamente en el eje x_3. El cono recesivo es: $Cono(X) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 0\}$. Por lo tanto, el cono será el eje x_3.

ii) Los puntos extremos son: $\{(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0)\}$. El cono recesivo es: $Cono(X) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 0\} = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 = x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$. Por lo tanto, el cono se encuentra en el eje x_3 positivo.

c) Sea $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ y $\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\alpha}$. Entonces, como P es un poliedro, y el vector $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i x_i = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \alpha\frac{1}{\alpha}$ es combinación convexa de $x_1,\ldots,x_n \in P$, $\hat{x} \in P$. Luego, $\bar{x} = 0(1-\alpha) + \alpha\hat{x}$ es combinación convexa del origen y $\hat{x}$. Entonces, si:

$$\bar{x} \in P, \forall \alpha \in [0,1] \rightarrow \bar{x} = (1-\alpha)0 + \alpha\hat{x} = 0 \in P, \text{con } \alpha = 0$$

Por otro lado, si:

$$0 \in P \rightarrow 0(1-\alpha) + \alpha\hat{x} = \bar{x} \in P$$

La última impilcancia se da por la convexidad de P y porque $\hat{x} \in P$. Finalmente, se demuestra lo pedido.

Problema 2. (13 puntos)

a) (6 puntos) Determine si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas:

i) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización: $P = \{\text{máx} \sum_{i=1}^{n} x_i : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in \{0, \ldots, n\}\}$. Suponga que está ejecutando el algoritmo Simplex sobre la reformulación estándar de P, y que en una iteración intermedia el valor de la función objetivo obtenido hasta el momento es v_1. Bajo estas condiciones, se puede garazntizar que en la próxima iteración no es posible obtener un valor de la función objetivo v_2, tal que $v_2 \geq v_1 + 2$.

ii) (2 puntos) Sea P un problema de optimización en forma estándar, pero con función objetivo de maximización. Suponga que está ejecutando el algoritmo Simplex sobre P, y que en una iteración intermedia el costo reducido de la variable x_i es $\bar{c}_i$. Si $\bar{c}_i > 0$, significa que, en términos de la función objetivo, es conveniente ingresar x_i a la base en la próxima iteración del algoritmo.

iii) (2 puntos) Si aplicando el "test de la razón mínima" (criterio de salida) en el algoritmo Simplex hay un empate entre dos variables, significa que el próximo vértice que se visite será degenerado y que el algoritmo entrará en ciclaje.

b) (7 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & -3x_1 + x_2 \\ s.a. & & \\ & -x_1 + 3x_2 \geq -15 & \\ & x_2 \geq 5 & \\ & -2x_1 + x_2 \leq -5 & \\ & x_1 - x_2 \geq -10 & \end{array}$$

i) (2 puntos) Grafique el problema e identifique la región factible. Encuentre gráficamente la solución óptima al problema P) e indique qué restricciones son activas (en el punto óptimo).

Encuentre la solución óptima al problema mediante el uso del gráfico que ha dibujado. ¿Qué restricciones están activas en este punto?

ii) (1 punto) Determine el rango de valores que pueden tomar los coeficientes de x_1 y x_2 de la función objetivo (cada uno de forma independiente) manteniendo la solución óptima obtenida en *i*).

iii) (2 puntos) Represente el dominio de P como la descomposición de un cono y un polítopo, es decir, que cualquier punto perteneciente a P pueda ser escrito como la suma de un vector perteneciente al cono y un vector perteneciente al polítopo.

iv) (2 puntos) Suponga que se agrega una nueva variable, x_3, al problema. Sea $(2, -1, 1, -1)$ el vector de x_3 que se agrega a la matriz de restricciones y 3 el coeficiente de x_3 en la función objetivo. Reescriba P) en su forma estándar agregando la nueva variable x_3 y determine si cambia o no la configuración de base óptima encontrada en *i*).

Solución Problema 2.

a) *i*) Esta afirmación es verdadera. En el caso de que v_1 o $v_1 + 1$ sea el óptimo, la demostración es trivial. Entonces, se debe demostrar para el caso de que el óptimo de P sea mayor a $v_1 + 1$. En primer lugar, es necesario notar que los vértices de P son todas las combinaciones de vectores en R^n de 0's y 1's. Entonces, si en una iteración intermedia ingresará a la base una nueva variable, esta necesariamente debe ser una variable original, ya que en caso contrario la F.O no aumentaría.

Luego, esta variable original que era no básica entra a la base con valor 1 (para que la restricción esté activa) y el valor de la F.O. aumentará en 1. Por lo tanto, si el valor de la F.O. en la iteración intermedia era v_1, en la próxima iteración el valor de la F.O. podrá ser como máximo $v_1 + 1$ y se demuestra lo pedido. Esta demostración se sigue del hecho que el algoritmo Simplex sólo se mueve entre vértices adyacentes.

ii) Esta afirmación es falsa porque pueden haber casos de degenerancia. Basta tomar como contraejemplo el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \text{máx} & x_1 \\
s.a. & & \\
& x_1 + x_2 + h_1 = 1 & \\
& x_1 + h_2 = 1 & \\
& x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Si se encuentra en la base $\{x_1, h_1\}$, el costo reducido de la variable h_2 será $\bar{c_{h2}} = 1$, sin embargo, al ingresar esta variable a la base, el valor de la F.O. no cambiará porque el algoritmo seguirá en el mismo vértice (degenerancia).

iii) Esta afirmación es falsa. Si bien, un empate en el "test de la razón mínima implica" degenerancia en el próximo vértice, no necesariamente el algoritmo entrará en ciclaje. Se puede considerar el siguiente contraejemplo:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \text{máx} & x_2 - x_1 \\
s.a. & & \\
& x_1 + x_2 + h_1 = 1 & \\
& x_2 + x_1 - h_2 = 0 & \\
& x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Suponga que el algoritmo inicia en la base $\{x_1, h_2\}$. En la próxima iteración, los costos reducidos serán $\bar{c_{x_2}} = 2, \bar{c_{h_1}} = 1$. Arbitrariamente se selecciona la variable h_1 para ingresar a la base, con lo que hay un empate en el "test de la razón mínima" para salir de la base entre la variable x_1 y h_2 (ambas razones con valor 1), lo que signfica que el nuevo vértice es degenerado (escogiendo arbitrariamente h_2 para salir de la base). Luego, en la próxima iteración los costos reducidos serán: $\bar{c_{x_2}} = 1, \bar{c_{h_2}} = 0$, por lo que ingresará x_2 a la base y no se entrará en ciclaje.

b) *i*) El gráfico de P) es el siguiente:

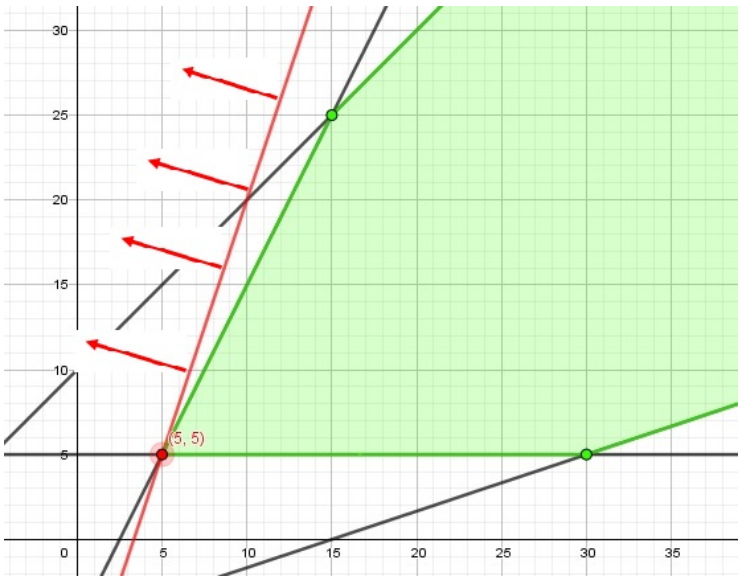


Figura 1: Dominio P)

La región verde corresponde al dominio de P), los puntos verdes corresponden a los vértices del dominio, el vértice rojo corresponde a la solución óptima y la recta roja es la curva de nivel de la función objetivo. La solución óptima se encuentra en la intersección de las restricciones 2 y 3, que es el punto $(5, 5)$.

ii) Para que la solución óptima se mantenga, se deben cumplir las siguientes desigualdades:

- ◇ Coeficiente de x_1 (c_1): $-\frac{c_1}{1} \geq 2 \longrightarrow c_1 \leq -2$
- ◇ Coeficiente de x_2 (c_2): $-\frac{-3}{c_2} \geq 2 \longrightarrow \frac{3}{2} \geq c_2$

iii) Una posible descomposición es la siguiente:

- ◇ Politopo: $Po = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} : -2x_1 + x_2 \leq 5, x_2 \geq 5, 4x_1 + 3x_2 \leq 135\}$
- ◇ Cono: $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} : -x_1 + 3x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \geq 0\}$

En este caso, el polítopo encontrado es la envoltura convexa de los vértices de P y el cono es el conjunto de los rayos de escape.

iv) La reformulación de P) en su forma estándar es:

$$
\begin{array}{lll}
P') & \text{mín} & 3(x_1^+ - x_3^-) - (x_2^+ - x_2^-) - 3(x_3^+ - x_3^-) \\
s.a. & & \\
& -(x_1^+ - x_1^-) + 3(x_2^+ - x_2^-) + 2(x_3^+ - x_3^-) - h_1 = -15 \\
& x_2 + -x_2^- - (x_3^+ - x_3^-) - h_2 = 5 \\
& -2(x_1^+ - x_1^-) + x_2^+ - x_2^- + (x_3^+ - x_3^-) + h_3 = -5 \\
& (x_1^+ - x_1^-) - (x_2^+ - x_2^-) - (x_3^+ - x_3^-) - h_4 = -10 \\
& x, h \geq 0
\end{array}
$$

En términos de las nuevas variables, la solución óptima encontrada en i) es: $(x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-, h_1, h_2, h_3, h_4) = (5, 0, 5, 0, 0, 0, 20, 0, 0, 10)$. Los costos reducidos de las variables x_3 son:

$$c_{x_3^+}^- = 3 - (3, -1, 0, 0)^T(2, -1, 1, -1) = -4$$
$$c_{x_3^-}^- = -3 - (3, -1, 0, 0)^T(-2, 1, -1, 1) = 4$$

Entonces, como $c_{x_3^+}^- < 0$, es conveniente ingresar x_3 positivo a la base, por lo que la configuración de base óptima encontrada en i) necesariamente cambiará.

Problema 3. (18 puntos)

a) (14 puntos) Considere el problema P) definido como:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \text{máx} & x_1 + 3x_2 \\
s.a. & & \\
& -x_1 - 2x_2 \leq -4 \\
& -2x_1 - x_2 \geq -8 \\
& -3x_1 + x_2 \leq -2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

i) (3 puntos) Reformule P en su forma estándar. Utilizando el algoritmo Simplex Fase I, encuentre una solución básica factible para P.

ii) (3 puntos) Resuelva P con el método Simplex Fase II, utilizando como base inicial factible la encontrada en i). Indique una solución y valor óptimo.

iii) (2 puntos) Explique que ocurriría con la solución obtenida en *iii*) si el signo de la restricción 1 cambia de $\leq$ a $\geq$. En caso que la solución óptima cambie, no es necesario volver a resolver el problema, sino sólo describir "como cambia" (aumenta/disminuye el valor óptimo, cambia la configuración básica, etc.)

iv) (2 puntos) Suponga que se elimina la restricción 2 del problema P. ¿Cuántas variables básicas habrá en cada vértice?. Resuelva el nuevo problema con el método Simplex Fase II, utilizando como vértice inicial $(x_1 = 4, x_2 = 0)$. ¿Tiene solución óptima el nuevo problema? En caso de tenerla, indique claramente una solución óptima y su valor óptimo. Si en alguna iteración no se encuentra el óptimo y existe un empate en los costos reducidos, elija para ingresar a la base la variable de menor índice.

v) (2 puntos) Sea $c = (c_1, c_2)$ el vector de costos de la función objetivo del problema P original, actualmente $c = (1, 3)$. Determine los rangos de valores en los que deben estar estos coeficientes para que la configuración de base óptima encontrada en *ii*) no cambie. Haga el análisis con cada coeficiente por separado.

vi) (2 puntos) Determine el rango de valores en el que debe encontrarse el lado derecho de cada restricción del problema P) original, de tal forma que se mantenga la solución óptima encontrada en *ii*)

b) (4 puntos) Resuelva el problema P usando *Python - Gurobi* y compruebe que la solución encontrada en *a.ii*) era correcta. No se pedirá ningún archivo digital, pero sí se tiene que entregar el código escrito y un pantallazo con un resumen de los resultados.

Solución Problema 3.

a) *i*) La forma estándar de P) corresponde a:

$$
\begin{array}{lll}
P') & \text{mín} & -x_1 - 3x_2 \\
s.a. & & \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 & = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 & = 8 \\
& 3x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
& x & \geq 0
\end{array}
$$

El problema a resolver con Fase I será:

$$
\begin{array}{lll}
PFI) & \text{mín} & y_1 + y_2 \\
s.a. & & \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 & = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 & = 8 \\
& 3x_1 - x_2 - x_5 + y_2 & = 2 \\
& x, y & \geq 0
\end{array}
$$

Iteración 1:

$$x_B = (y_1, x_4, y_2), x_R = (x_1, x_2, x_3, x_5)$$

$$B_I^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_I^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_I^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}_I^1 = \vec{0} - (4, 1, -1, -1) = (-4, -1, 1, 1)$$

Los costos reducidos de x_1 y x_2 son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Se elegirá x_1. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable y_2.

Iteración 2:

$$x_B = (y_1, x_4, x_1), x_R = (y_2, x_2, x_3, x_5)$$

$$B_I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad R_I^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_I^2 = 1/3 \begin{bmatrix} -1 & 7 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = 1/3 \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}_I^2 = (1,0,0,0) - (-1/3, 7/3, -1, 1/3) = (4/3, -7/3, 1, -1/3)$$

Los costos reducidos de x_2 y x_5 son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Se elegirá x_2. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable y_1.

Iteración 3:

$$x_B = (x_2, x_4, x_1), x_R = (y_2, y_1, x_3, x_5)$$

$$B_I^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad R_I^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_I^3 = 1/7 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = 1/7 \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}_I^3 = (1,1,0,0) - (0,0,0,0) = (1,1,0,0)$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo tanto, se está en el óptimo del Problema de Fase I. Luego, una solución básica factible para P') estrá dada por x_2, x_4 y x_1 como variables básicas

ii) Se comienza con la solución básica factible encontrada en *i*):

Iteración 1:

$$x_B = (x_2, x_4, x_1), x_R = (x_3, x_5)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^1 = 1/7 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = 1/7 \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}^1 = (0,0) - (10/7, -1/7) = (-10/7, 1/7)$$

El costo reducido de x_3 es negativo, por lo que debe entrar a la base. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable x_4.

Iteración 2:

$$x_B = (x_2, x_3, x_1), x_R = (x_4, x_5)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R^2} = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R^2} = (0,0) - (-2,-1) = (2,1)$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo tanto, se está en el óptimo de P'). El valor óptimo de la F.O. de P) es $z^* = 14$ con $x^* = (x_1, x_2) = (2, 4)$

iii) Cuando se invierte el signo de la restricción 1, cambia el espacio factible del problema P), dejando fuera de este a la solución óptima del problema original. De esta forma, cambiará la solución óptima desde $x^* = (2,4), z^* = 14$ a $x' = (8/7, 10/7), z' = 38/7$. Como P) es un problema de maximización, cuando se cambia el signo de la primera restricción, empeora el valor de la función objetivo. Además, en el vértice óptimo de P) la base está compuesta por las variables x_1, x_2 y x_3. En el nuevo óptimo, la base estará compuesta por las variables x_1, x_2 y x_4, cambiando la configuración básica.

iv) Si se elimina la restricción 2 de P) se obtiene el problema:

$$\begin{array}{lll} P'') & \text{máx} & x_1 + 3x_2 \\ s.a. & & \\ & -x_1 + -2x_2 & \leq \quad -4 \\ & -3x_1 + x_2 & \leq \quad -2 \\ & x_1, x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

En forma estándar:

$$\begin{array}{lll} & \text{mín} & -x_1 - 3x_2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & = \quad 4 \\ & 3x_1 - x_2 - x_5 & = \quad 2 \\ & x & \geq \quad 0 \end{array}$$

El número de variables básicas es igual al número de restricciones que tiene el problema, por lo que como ahora hay solo 2 restricciones, habrán 2 variables básicas en cada vértice. Se comienza del punto $(4, 0)$ para encontrar la solución óptima de P''):

Iteración 1:

$$x_B = (x_1, x_5), x_R = (x_2, x_3)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R^1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R^1} = (-3,0) - (-2,1) = (-1,-1)$$

Los costos reducidos de x_2 y x_3 son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Se elegirá x_2 debido a que tiene un menor índice. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable x_5.

Iteración 2:

$$x_B = (x_1, x_2), x_R = (x_5, x_3)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R^2} = 1/7 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = 1/7 \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R^2} = (0,0) - (-1/7, 10/7) = (1/7, -10/7)$$

El costo reducido de x_3 es negativo, por lo que debe entrar a la base. Según el criterio del mínimo cuociente ninguna variable puede salir de la base, dado que ambos cuocientes son negativos. De esta forma, se determina que $P'')$ es no acotado y no tiene solución óptima

v) Se supondrá que δ es la variación de cada coeficiente de $P)$ en la forma estándar.

- ◇ Variable x_1: Esta es una variable básica en la solución, por lo que obviamente el valor de la función objetivo cambiará, pero la solución no cambiará mientras δ cumpla $\bar{c}_R \geq \delta\eta_3$ siendo η_3 la tercera fila de $B^{-1}R = \bar{R}$ y B la base óptima de $P)$. Finalmente, para que la base no cambie se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{c} 2 \geq \delta/5 \\ 1 \geq -\delta/5 \end{array}\right\} \longrightarrow -5 \leq \delta \leq 10$$

Considerando que los costos en el problema estándar fueron multiplicados por -1, entonces el coeficiente original de x_1 puede variar entre -10 y 5 unidades.

- ◇ Variable x_2: Esta es una variable básica en la solución, por lo que obviamente el valor de la función objetivo cambiará, pero la solución no cambiará mientras δ cumpla $\bar{c}_R \geq \delta\eta_1$ siendo η_1 la primera fila de $B^{-1}R = \bar{R}$ y B la base óptima de $P)$. Finalmente, para que la base no cambie se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{c} 2 \geq 3\delta/5 \\ 1 \geq 2\delta/5 \end{array}\right\} \longrightarrow \delta \leq \frac{5}{2}$$

Considerando que los costos en el problema estándar fueron multiplicados por -1, entonces el coeficiente original de x_2 no puede disminuir en más de 2.5 unidades.

vi) Para hacer un análisis de sensibilidad en el lado derecho, es necesario calcular la base de la solución y su inversa:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & -2/5 \\ -1 & 7/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

δ será el cambio que puede aumentar el lado derecho de cada restricción sin que cambie la base.

- ◇ Restricción (1):

$$-\delta + 6 \geq 0\} \longrightarrow \delta \leq 6$$

- ◇ Restricción (2):

$$\left.\begin{array}{c} 20 + 3\delta \geq 0 \\ 30 + 7\delta \geq 0 \\ 10 + 2\delta \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \delta \geq \frac{-30}{7}$$

- ◇ Restricción (3):

$$\left.\begin{array}{c} 20 - 2\delta \geq 0 \\ 30 - 3\delta \geq 0 \\ 10 + \delta \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow -10 \leq \delta \leq 10$$

b) Un posible código en *Python - Gurobi* es:

```python
from gurobipy import *

m = Model("Ejercicio_3b")

x1 = m.addVar(lb= 0,name = 'x1', vtype = GRB.CONTINUOUS)

x2 = m.addVar(lb= 0,name = 'x2',vtype = GRB.CONTINUOUS)

m.setObjective(x1 + 3*x2, GRB.MAXIMIZE)

m.addConstr(-x1-2*x2 <= -4)
m.addConstr(-2*x1-x2 >= -8)
m.addConstr(-3*x1+x2 <= -2)

m.optimize()

sol = {v.varName: v.x for v in m.getVars()}

print('La solucion optima es: {}'.format(sol))
print('El valor optimo de la F.O. es: {}'.format(m.objVal))
```

Figura 2: Código 3.b)

Y las la impresión de las soluciones es:

```
Optimize a model with 3 rows, 2 columns and 6 nonzeros
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 3e+00]
  Objective range  [1e+00, 3e+00]
  Bounds range     [0e+00, 0e+00]
  RHS range        [2e+00, 8e+00]
Presolve removed 3 rows and 2 columns
Presolve time: 0.00s
Presolve: All rows and columns removed
Iteration    Objective       Primal Inf.    Dual Inf.      Time
       0    1.4000000e+01   0.000000e+00   0.000000e+00      0s

Solved in 0 iterations and 0.00 seconds
Optimal objective  1.400000000e+01

La solucion optima es: {'x2': 4.0, 'x1': 2.0}
El valor optimo de la F.O. es: 14.0
```

Figura 3: Resultado 3.b)

Problema 4. (16 puntos)

a) (10 puntos) El restaurante *El Sabrosón* necesita ayuda para optimizar cuándo y cómo preparar cada plato que van ordenando los clientes durante el transcurso del día. Para esto, el chef del restaurante, *Faryd*, optó por dividir el día en T períodos de igual duración y de esta forma facilitar la planificación de la cocina. El menú completo del restaurante consiste en un conjunto de P platos y Faryd debe escoger cuáles serán los $N(N < |P|)$ platos que serán ofrecidos en el restaurante durante el día. Cada plato $p \in P$ requiere un proceso de preparación de varias etapas, por ejemplo, una pizza requiere preparar la masa, agregar ingredientes, ponerla en el horno, etc. Es así, como los siguientes parámetros indican la preparación que requiere el plato:

$$\beta_p^e = \begin{cases} 1 & \text{Si el plato } p \text{ requiere ser procesado por la etapa } e. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_p^{lr} = \begin{cases} 1 & \text{si la etapa } l \text{ debe hacerse inmediatamente antes de la etapa } r \text{ en la preparación del plato} \\ & p \in P, \text{ con } l, r \in E \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma_p^e = \begin{cases} 1 & \text{Si la última etapa del plato } p \text{ es } e. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

donde E es el conjunto de todas las etapas que se realizan en la cocina del restaurante. Suponga que cada etapa de la cocina demora exactamente un período en realizarse, que las etapas de la preparación de un plato no necesariamente deben hacerse en períodos consecutivos y que la cantidad de platos que pueden prepararse en paralelo en la etapa e es limitada, siendo C_e la capacidad de cada etapa $e \in E$ en un mismo período.

Por otro lado, se conoce la cantidad de platos del tipo p que los clientes ordenan en el período t se representan como Q_p^t. Las órdenes de aquellos platos que sí estén disponibles en el día deben ser necesariamente atendidas, mientras que el resto de las órdenes no se consideran.

Formule un problema de optimización lineal que maximize las ganancias de *El Sabrosón*, sabiendo que el ingreso por cada plato p es de μ_p y que el costo por cada período que un plato sobrepase de los 4 períodos desde que se ordenó es de η.

b) Para responder las siguientes preguntas, debe leer el paper "Conference scheduling - A personalized approach" subido en la página del curso [3]: (2 puntos c/u)

i) Explique claramente por qué el CSP–n es difícil de resolver computacionalmente.

ii) Explique en qué etapa, para qué y cómo se aplica el enfoque de programación dinámica exacta en el paper.

iii) Explique por qué se establece que la heurística tiene un "costo computacional" eficiente. Cómo prueban/justifican esto lo autores.

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

x_{pt}^{eu} = Cantidad de platos p ordenados en el período t que pasan por la etapa e en el período u.

y_{pt}^{u} = Cantidad de platos tipo p que se ordenaron en el período t y están listos en el período u.

$$z_p = \begin{cases} 1 & \text{Si el plato } p \text{ estará disponible durante el día.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{p \in P} \mu_p z_p \sum_{t=1}^{T} Q_p^t + \eta \sum_{p \in P} \sum_{t=1}^{T-5} \sum_{u=t+5}^{T} y_{pt}^u$$

[3] Vangerven, B., Ficker, A. M., Goossens, D. R., Passchyn, W., Spieksma, F. C., Woeginger, G. J. (2018). Conference scheduling - A personalized approach. Omega, 81, 38-47

s.a.

(1) Se deben ofrecer N tipos de platos en el día:

$$\sum_{p \in P} z_p = N$$

(2) Cada plato ordenado y disponible debe ser preparado:

$$\sum_{u=t}^{T} y_{pt}^{u} = Q_p^t z_p \qquad \forall p \in P, \forall t = 1, \ldots, T$$

$$\sum_{u=t}^{T} x_{pt}^{ue} = Q_p^t z_p \beta_p^e \qquad \forall p \in P, \forall e \in E$$

(3) Debe respetarse la sucesión de etapas de un plato:

$$\sum_{v=t}^{u-1} x_{pt}^{lv} \geq \alpha_p^{lr} x_{pt}^{ru} \qquad \forall t = 1, \ldots, T-1, \forall u = 2, \ldots, T : t < u, \forall p \in P, \forall l, r \in E : l \neq r$$

$$\sum_{v=u+1}^{T} x_{pt}^{lv} \geq \alpha_p^{lr} x_{pt}^{lu} \qquad \forall t = 1, \ldots, T-1, \forall u = 2, \ldots, T-1 : t < u, \forall p \in P, \forall l, r \in E : l \neq r$$

(4) Un plato está listo cuando se procesa su última etapa:

$$x_{pt}^{ue} \geq y_{pt}^{u} \gamma_p^e \qquad \forall t, u = 1, \ldots, T : t \leq u, \forall p \in P, \forall e \in E$$

(5) Debe respetarse la capacidad de cada etapa:

$$\sum_{p \in P} \sum_{t=1}^{u} x_{pt}^{eu} \leq C_e \qquad \forall u = 1, \ldots, T, \forall p \in P, \forall e \in E$$

(6) Naturaleza de las variables:

$$x_{pt}^{eu} \in \mathbf{Z}_{\mathbf{0}}^{+} \qquad \forall p \in P, \forall t, u = 1, \ldots, T : t \leq u, \forall e \in E$$

$$y_{pt}^{u} \in \mathbf{Z}_{\mathbf{0}}^{+} \qquad \forall p \in P, \forall t, u = 1, \ldots, T : t \leq u$$

$$z_p \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P$$

b)