PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - P. Carrillo - J.T. Marquinez
G. Angulo

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 7 de septiembre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 7 de septiembre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (7 puntos) Como es visto en el curso, existen distintos tipos de modelos en los que se enmarcan una gran cantidad de problemas de optimización. Algunos de estos son el problema del vendedor viajero, el problema de la mochila, el problema de planificación de proyectos, el de secuencialidad de máquinas, entre otros. Sin embargo, estas "categorías" de problemas son sólo la introducción para una gran cantidad de tipos de problemas bastante más complejos que se están tratando en el día a día en el mundo de la investigación de operaciones.

En esta pregunta, se le pide investigar sobre un par de ellos, y describir de manera muy breve (no más de 10 lineas) en qué consisten. Estos serán:

i) (1 puntos) **Describa** brevemente con sus palabras, en qué consiste uno de los problemas vistos en clases, e **indique** cuál es su principal característica.
Por ejemplo: El problema de la mochila es un problema clásico de la optimización, que consiste en determinar qué elementos incluir en una mochila con capacidad limitada de pesos o volumen, para maximizar las utilidades. Al generalizarlo, el modelo matemático es:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{j=1}^{n} u_i x_i \\ &s.a. \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ &\qquad x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,n. \end{aligned}$$

Donde u_i es el beneficio de llevar el item i, w_i es el peso del item i, W es la capacidad máxima y x_i es la variable de decisión de llevar el objeto i. La característica principal de esto es, además del problema que maximiza utilidades, su restricción de capacidad.

ii) (2 puntos) **Describa** brevemente el *Capacitated Vehicle Routing Problem*, y dé un ejemplo del día a día que trate con este problema.

iii) (2 puntos) **Describa** brevemente el Minimum Knapsack Problem, y dé un ejemplo del día a día que trate con este problema.

iv) (2 puntos) **Describa** brevemente el Shortest Path Problem, y dé un ejemplo del día a día que trate con este problema.
Observación: No es necesario colocar explícitamente la formulación.

b) (8 puntos) Imagine que está en su casa pensando que le encantaría atrapar al 9tail que aparece cerca en Gokémon PO. De pronto, aparece un radar gokémon salvaje en tu navegador del notebook. Entonces te das cuenta que puedes obtener la dirección en coordenadas (x_i, y_i) para el gokémon $i \in I$ (siendo I el conjunto de todos los gokemones que te aparecen en un radio razonable). Además, puedes obtener el tiempo t_i en donde desaparecerá y sabes el beneficio b_i que te otorgará el atraparlo.

Al recordar tu clase de física general, fuiste capaz de calcular el tiempo que te demorará ir de un gokémon a otro con la función $d(v_i, v_j)$ entre los gokemones i y j (donde $v_i = (x_i, y_i)$ es el vector de posición del gokémon). Asuma que el tiempo es un parámetro y que es tan bueno atrapando gokemones, que una vez que llega, el gokémon se rinde y entra inmediatamente a su gokebola. Desarrolle un **modelo lineal mixto** para modelar el problema de maximizar su beneficio, eligiendo el orden y qué gokemones atrapará.

HINT:

* Se le aconseja indexar en el orden de atrapado y no en el tiempo de atrapado (el tiempo es continuo).
* Puede generar parámetros auxiliares que le ayuden a modelar mejor el problema.

Solución Problema 1.

a) *i*) El vendedor viajero es un problema clásico en investigación de operaciones, que consiste en decidir el orden en el que un vendedor viaja por n ciudades sin repetirlas y demorándose lo menos posible

(sea tiempo o distancia). El modelo matemático que generaliza este problema es:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} + \sum_{(j,k)\in E} x_{jk} = 2 \quad \forall j \in V \\
& \sum_{(i,j)\in E: i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V : 2 \leq |S| \leq n-1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

Su principal característica es que genera un tour que pasa por todos los puntos sin repetir ninguno.

ii) El *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) consiste en generar rutas con camiones con capacidad C constante, para satisfacer la demanda de clientes, minimizando costo. Existe costo por usar un camión y costos relacionados con la distancia y el tiempo de viaje de cada camión.

Un ejemplo es lo que tiene que resolver cualquier empresa que distribuya productos con camiones, por ejemplo Coca Cola, que tiene camiones con capacidad. Ojo que este problema sería una simplificación de la realidad.

iii) El problema de la mochila de minimización o de cubrimiento, es cuando queremos cubrir el tamaño de la mochila (por arriba, es decir, pasarnos) mientras minimizamos el costo. Es mas intuitivo verlo como una demanda, en donde tenemos muchas formas de cubrir parte de la demanda con costo c_i y queremos cubrirla toda al menor precio posible. Un ejemplo es una empresa eléctrica, con horizonte de un día, como el problema 2b) que es una generalización de este problema.

iv) En la teoría de grafos, el problema del camino más corto es el problema que consiste en encontrar un camino entre dos vértices (o nodos) de tal manera que la suma de los pesos de las aristas que lo constituyen es mínima. Un ejemplo de esto es encontrar el camino más rápido para ir de una ciudad a otra en un mapa o en el día a día, uno quiere llegar lo más rápido de algún lugar a otro (ir al cine por ejemplo).

b) Variables:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si el gokemon i es el k-esimo en ser atrapado} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos definir $n := |I|$ como la cantidad de gokemones, agregando el 0 para el punto de partida que se explicará más abajo. Definimos el conjunto $K := \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de orden en el cual puedo atrapar los gokemones. Modelaremos en primera instancia de manera natural el problema.

Función Objetivo

$$\text{máx} \sum_{k\in J} \sum_{i\in I} b_i z_{ik} \tag{1}$$

Restricciones:

I) Atrapamos a lo más un gokemon en cada posición k.

$$\sum_{i\in I} z_{ik} \leq 1 \quad \forall k \in J \tag{2}$$

II) Atrapar cada gokemon a lo más una vez.

$$\sum_{k\in J} z_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in I \tag{3}$$

III) Si en la k-ésima posición atrapé un gokemon, entonces atrape gokemones antes.

$$\sum_{j\in I} z_{jl} \geq \sum_{i\in I} z_{ik} \quad \forall k \in J, \forall l < k \tag{4}$$

IV) Si decido atrapar un gokemon, alcanzo a llegar antes que desaparezca.

$$\underbrace{\sum_{i\in I} z_{ik}}_{(\star)} \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j_1\in I}\sum_{j_2\in I} z_{j_1 l} z_{j_2 l+1} d(v_{j_1}, v_{j_2})\right]}_{(\star\star)} \leq \sum_{i\in I} z_{ik} t_i \quad \forall k \in J \tag{5}$$

V) Definir bien el donde parto.

$$z_{0,0} = 1 \tag{6}$$

Esto es asumiendo que $z_{0,0}$ es donde parto, que es el punto $(0,0)$ y que me da beneficio 0 y que las distancias del origen a los gokemones tambien son calculadas por d. La parte $(\star)$ es necesaria para que cuando se llegue a una posición k donde no hay mas gokemones para atrapar (se indexó hasta n) entonces no genere problemas la desigualdad. Por otro lado, la parte $(\star\star)$ suma todos los tiempos de los gokemones que atrapé hasta llegar al gokemon k-ésimo y ve si es que aun está el gokemon en el lugar (lado derecho).

El problema es que esta restricción no es lineal, pero la buena noticia es que es linealizable.

Trabajemoslas por partes:

($\star$) Para sacar esta multiplicación de binaria, basta con que no exista ese problema de que se acaben los gokemones en algún momento. Para eso podemos generar gokemones auxiliares que den beneficio 0 y que tengan tiempo de desaparición "infinito" (lo que se modela con un tiempo t_m suficientemente grande). Si generamos n de estos gokemones y los colocamos todos en cualquier lugar, por ejemplo en la coordenada $(0,0)$. Podemos ver que como su beneficio es 0, el modelo siempre preferirá atrapar a gokemones con beneficio (los que realmente están en el mapa) y solo optará por estos que no generan beneficio cuando se me acaben los reales (sea por tiempo o porque los atrapé todos). Por lo que podemos sacar la parte $(\star)$ y la restricción funciona sin el problema cuando no me quedan gokemones por atrapar en la posición k, ya que siempre "existiran´´ para efectos del modelo.

($\star\star$) En esta parte, basta ver que la multiplicación de binarias $z_1 z_2$ es otra binaria z que cumple con lo siguiente:

- Si $z_1 = z_2 = 1$, entonces $z = 1$.
- Si $z_1 = 0$ ó $z_2 = 0$ y la otra vale 1 , entonces $z = 0$.
- Si $z_1 = z_2 = 0$, entonces $z = 0$.

Con estas propiedades, podemos modelar z con las siguientes ecuaciones.

$$z \leq z_1$$
$$z \leq z_2$$
$$z_1 + z_2 \geq z + 1$$

Al hacer estos cambios, el problema nos queda lineal.

d) Para que el problema mín$\{e^{\alpha||x||} : x \in \mathbb{R}^n\}$ tenga solución necesitamos que $\alpha \in [0, \infty)$.

Primero, podemos ver que si $\alpha = 0$, entonces el mínimo es 1.

Segundo, si $\alpha > 0$ tenemos que la función objetivo es $f(x) = e^{\alpha||x||}$. Luego, podemos ver que si $||x||$ tiende a ∞ la función se va a infinito y si $||x||$ tiende a $\infty-$, la función también se va a infinito. Además, sabemos que la función $g(y) = e^{\alpha y}$ es creciente en $y \in [0, \infty)$. Este mismo comportamiento se mantiene con la función f, ya que la norma toma valores entre $[0, \infty)$, por lo que como g se minimiza en 0, tenemos que f también se minimiza en el $0 de \mathbb{R}^n$, que es el único punto en donde se hace 0 la norma.

Tercero, cuando $\alpha < 0$ tenemos que la función objetivo es $f(x) = e^{-\beta||x||}$ con $\beta > 0$ que es igual entonces que $f(x) = \frac{1}{e^{\beta||x||}}$. Sabemos que mientras más grande es la parte de abajo de la función, mas se acerca ésta a 0, pero no existe un numero real (respecto a la norma) que maximice la parte de abajo, por lo que no existe ningún valor real que minimice la función, y por lo tanto, no existe un vector tal que su norma minimice la función.

Problema 2. (15 puntos)

a) (6 puntos) Modele los siguientes problemas de optimización como un modelo lineal entero mixto.

i) (3 puntos)

$$\begin{aligned} \text{mín} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i z_j \\ s.a. \;\; & 0 \le y_i \le w_i \;\; \forall i = 1,..,m \\ & z_j \in \{0,1\} \;\; \forall j = 1,..,n, \end{aligned}$$

donde a_{ij}, w_i son parámetros.

ii) (3 puntos)

$$\begin{aligned} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \\ s.a. \;\; & 0 \le x \le u, \end{aligned}$$

donde cada $f_j : [0,u] \to \mathbb{R}$ es una función lineal afín por pedazos y continua dada por:

$$f_j(y) = \Big\{ a_i^j y + b_i^j, \;\; \text{si } y \in [p_{i-1}^j, p_i^j] \;\; i = 1,..,m$$

con $0 = p_0^j < p_1^j < .. < p_m^j = u$ para cada $j = 1,..,n$.

b) (9 puntos) La empresa Santilectra es una distribuidora de electricidad que esta por ser lanzada y necesitan elegir a qué empresas generadoras les comprarán electricidad. Para esto, la empresa hizo un estudio que le entrego el perfil de demanda d_t, que es la demanda de electricidad para cada hora del día.

Existen m empresas que generan electricidad y cada una vende una cantidad p_i desde la hora s_i hasta la t_i a un valor c_i. Además, existen convenios entre las empresas que generan electricidad y que tienen al mismo dueño, lo que se ve reflejado en que cada empresa del conjunto R solo admite que les compren electricidad si a su vez se le compra a otra(s) empresa(s) que esta dado por R_i con $i \in R$. Por ejemplo, la empresa $i \in R$ solo admite que le compren electricidad, si también se le compra a todas la(s) empresa(s) del grupo R_i (sus empresas hermanas). Por otro lado, el gobierno encontró que la generación de electricidad se estaba volviendo cada vez más en un monopolio, por lo que le prohíbe a Santilectra que le compre más de k (cantidad de electricidad) al conjunto de empresas M.

i) (4 puntos) Se le pide como consultor de Santilectra que modele el problema para así ayudar a tomar una decisión. Utilice un **modelo lineal mixto**.

ii) (3 puntos) Al gerente se le ocurrió que si se negocia y a cada empresa generadora se le exige una estructura de precios lineal, podría llegar a una mejor negociación y todos ganan. Esta estructura de precios se refleja en un precio fijo b_i por dar acceso a comprarle una cantidad mínima de electricidad m_i (iniciar relaciones comerciales) y un valor v_i por comprarle más electricidad de manera lineal, es decir, Santilectra maneja por cada cliente una función

$$f_i(x) = \begin{cases} b_i, & \text{si } x \le m_i \\ v_i(x - m_i), & \text{si } x > m_i \end{cases}$$

El gerente le pide que **modele este problema** y que le **comente** en qué partes se diferencia esto con el modelo anterior.

iii) (2 puntos) Este problema es una generalización de un problema de la pregunta 1*a*), **diga cuál es** y **argumente** su respuesta.

Solución Problema 2.

a) *i)* Usamos variables auxiliares x_{ij} para modelar el producto $y_i z_j$. Por lo tanto, necesitamos que se cumpla $x_{ij} = 0$ si $z_j = 0$ y $x_{ij} = y_i$ si $z_j = 1$. El modelo nos queda

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \\
s.a.\ \ & 0 \le x_{ij} \le w_i z_j && \forall i = 1,..,n \ \ \forall j = 1,..,m \\
& x_{ij} \le y_i && \forall i = 1,..,n \ \ \forall j = 1,..,m \\
& x_{ij} \ge y_i - w_i(1 - z_j) && \forall i = 1,..,n \ \ \forall j = 1,..,m \\
& 0 \le y_i \le w_i && \forall i = 1,..,m \\
& z_j \in \{0,1\} && \forall j = 1,..,n,
\end{aligned}$$

ii) Por un lado tenemos que tener una variable que para cada j me diga en que trozo i cae x, ya que en principio, cada f_j puede tener una separación del intervalo $[0, u]$ distinto. Por otro lado, tenemos que tener una variable que modele el valor de $f_j(x)$.
Variables:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si para la función } j,\ x\text{está en } [p_{i-1}^j, p_i] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$z_j = \text{toma el valor de } f_j(x).$$

Con estas variables, el modelo queda

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \sum_{j=1}^{n} z_j \\
s.a. \qquad & \sum y_{ij} = 1, && \forall j = 1,..,n \\
& p_{i-1}^j - u(1 - y_{ij}) \le x \le p_i^j + u(1 - y_{ij}) && \forall j = 1,..,n \ \ \forall\ i = 1,..,m \\
& a_i x + b_i^j - M(1 - y_{ij}) \le z_i \le a_i x + b_i^j + M(1 - y_{ij}) && \forall j = 1,..,n \ \ \forall\ i = 1,..,m \\
& 0 \le x \le u \\
& y_{ij} \in \{0,1\} && \forall j = 1,..,n \ \ \forall i = 1,..,m,
\end{aligned}$$

con M suficientemente grande.

b) *i)* Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si contrato al distribuidor i} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El modelo entonces queda como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\
s.a. \quad & \sum_{i:s_i \le t \le t_i} x_i p_i \ge d_t && \forall t = 1,..,24 \\
& x_i |R_i| \le \sum_{i \in R_i} x_i && \forall i \in R \\
& \sum_{i \in M} x_i p_i (t_i - s_i) \le k \\
& x_i \in \{0,1\} && \forall i = 1,..,m
\end{aligned}$$

ii) Variables de decisión:

$$y_i = \text{cantidad a comprar de energía al distribuidor i.}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{, si abro relaciones comerciales con el distribuidor i} \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} y_i - m_i & \text{, si } y_i > m_i \\ 0 & \text{, si } y_i \leq m_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i x_i + v_i z_i & \\
s.a. \quad & \sum_{i:s_i \leq t < t_i} y_i \geq d_t & \forall t = 0, .., 23 \\
& k_{max} x_i \geq y_i & \forall i \in 1, .., m \\
& z_i \geq y_i - m_i & \forall i \in 1, .., m \\
& x_i |R_i| \leq \sum_{i \in R_i} x_i & \forall i \in R \\
& \sum_{i \in M} y_i (t_i - s_i) \leq k & \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i = 1, .., m \\
& y_i \in \{0, 1\} & \forall i = 1, .., m \\
& z_i \geq 0 & \forall i \in 1, .., m
\end{aligned}$$

con k_{max} un numero suficientemente grande, en particular con $k_{max} = \text{máx}_t\{d_t\}$ basta.
El modelo cambia en que ahora hay dos partes importantes en la función objetivo, la de costo fijo y la de variable y que es necesario generar variables auxiliares para poder mantener el modelo lineal.
OBS: Este problema se puede modelar de otras maneras, y siempre que sea coherente, estará bien.

iii) Es una generalización del problema de minimización de la mochila (pregunta 1)*a*)*iii*)). Esto es fácil de ver, ya que si t fuese 1 entonces tenemos solo restricciones del problema normal de knapsack, pero en este caso cubrimos la capacidad y minimizamos costo.

Problema 3. (15 puntos)

a) (8 puntos) Sea $\varepsilon \in [0, \infty)$ dado, considerando el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \varepsilon^2 + x(x - 2\varepsilon) + y(y - 2) + 1 \\
s.a. \quad & 6x + 3y \leq 18 \\
& \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 \leq \frac{7}{2} \\
& 5x \leq 16 \\
& 7y - 6x \geq -8 \\
& x \geq 0, y \geq 0,
\end{aligned}$$

responda las siguientes preguntas:

i) (2 punto) Demuestre la existencia del óptimo.

ii) (2 punto) Represente gráficamente el conjunto factible.

iii) (2 punto) Para $\varepsilon = 1$ grafique las curvas de nivel y encuentre una caracterización del óptimo. Justifique gráficamente su respuesta.

iv) (2 punto) Entregue una forma explícita del conjunto solución $S(\varepsilon)$ en función de $\varepsilon \in [0, \infty)$.

b) (3 puntos) Consideremos un problema de optimización P) dado por:

$$\begin{aligned} &\text{mín } ax + by \\ s.a. \quad &x - 8y \leq 0 \\ &2x - y \geq 0 \\ &x + 5y \geq 10 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Qué relación o relaciones entre a y b se deben cumplir para que el problema P) ...

i) (1 punto) tenga infinitas soluciones.

ii) (1 punto) sea infactible.

iii) (1 punto) tenga solución única.

Observación: Puede que haya más de una combinación de a y b cumplan lo pedido en *i*), *ii*) o *iii*). Se les pide que las encuentren todas.

c) (3 puntos) Considere el problema de optimización P) dado por mín$\{f(x) : x \in D\}$. Para entender mejor el Teorema de Bolzano-Weiertrass sobre P), se le pide encontrar un ejemplo en donde el problema P) no tiene solución cuando:

i) (1 puntos) f no es continua y D es compacto.

ii) (1 puntos) f es continua y D es cerrado pero no acotado.

iii) (1 puntos) f es continua y D es acotado pero no cerrado.

d) (1 punto)Determine una condición sobre α para que el problema mín$\{e^{\alpha||x||} : x \in \mathbb{R}^n\}$ tenga solución. Justifique.

Solución Problema 3.

a) *i*) Por la primera restricción podemos ver que $0 \leq x \leq 3$ y que $0 \leq y \leq 6$. Por lo tanto el conjunto de soluciones factible es acotado. Como las restricciones son todas $\leq$ o $\geq$, el conjunto es cerrado, por lo tanto es compacto. Además, la función objetivo puede ser reescrita como $f(x, y) = (x-\varepsilon)^2+(y-1)^2$, por lo que la función objetivo es continua (paraboloide en $\mathbb{R}^3$). Viendo que el conjunto factible es no vacío, ya que el punto $(0, 0)$ es factible, por BW se puede deducir que existe al menos una solución óptima al problema.

ii) Al graficar las funciones, nos queda el conjunto que se ve en la figura 1.

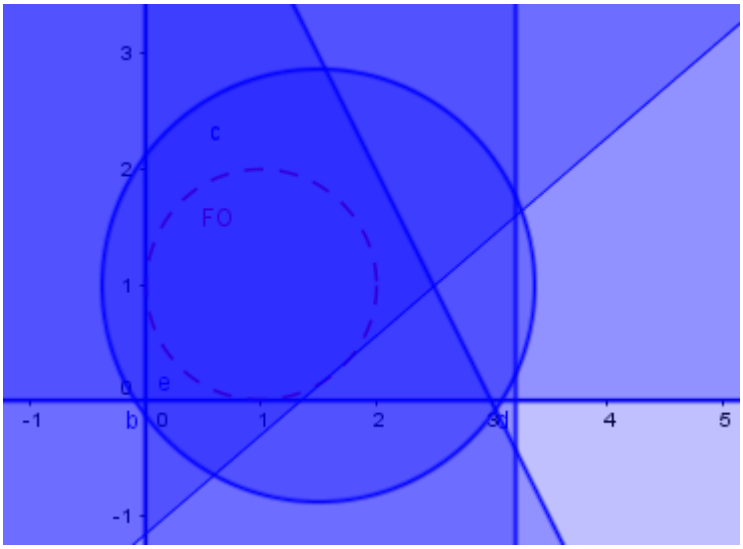


Figura 1: Conjunto factible

Podemos ver que los puntos que podrían llegar a ser óptimos, son los marcados en rojo en la figura 2. Podemos ver que el conjunto factibe es el polígono de los puntos A, B, C, D y E, unido al trozo de la circunferencia conformado entre los radios $\overline{GE}$ y $\overline{GA}$.

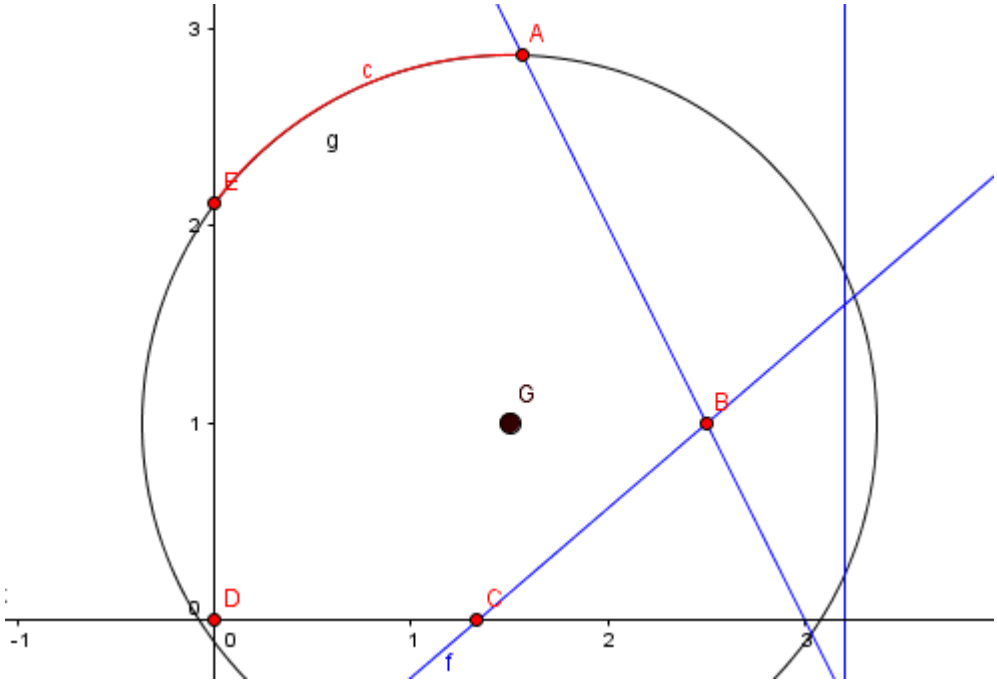


Figura 2: Puntos del poliedro

iii) Las curvas de nivel son circunferencias al rededor del centro $H = (\varepsilon, 1)$. Esto se debe a que

$$\mathrm{FO} = \varepsilon^2 + x(x - 2\varepsilon) + y(y - 2) + 1 = (x - \varepsilon)^2 + (y - 1)^2.$$

Al verlo de esa manera, es fácil ver que las curvas son circunferencias, como se ve en la figura 3, donde la curva de nivel es la de color rojo. En este caso, el circulo es al rededor del $(1, 1)$.

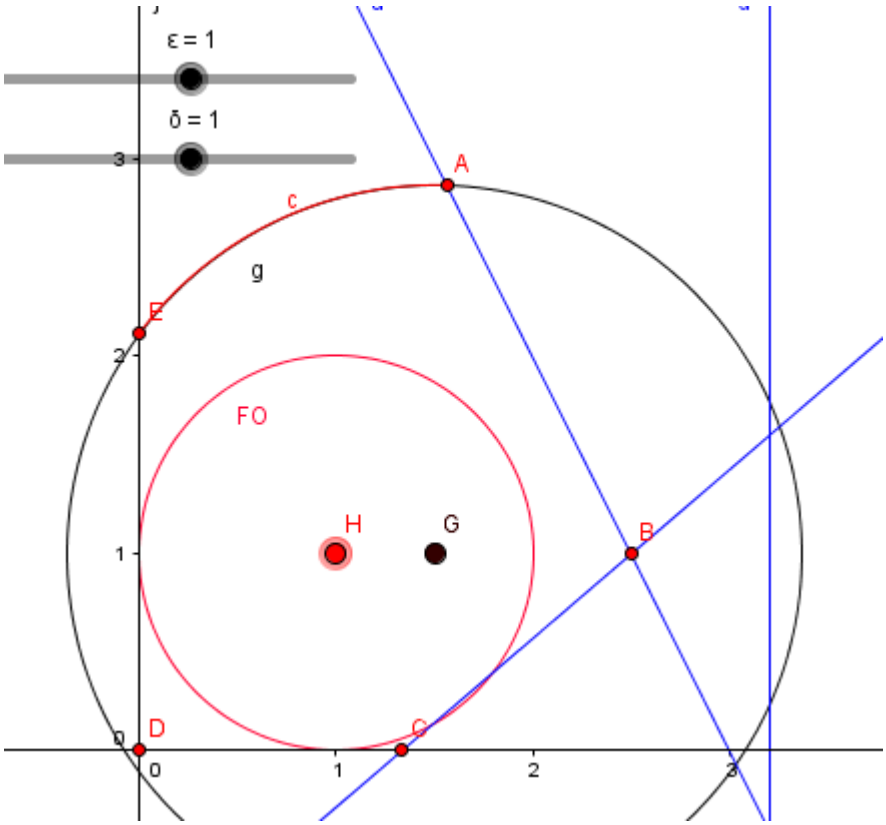


Figura 3: Curva de nivel FO= 1 ($\varepsilon = 1$)

iv) Para poder caracterizar el conjunto $S(\varepsilon)$ es necesario hacer un análisis más fino. Podemos ver que como la función objetivo nos da circunferencias al rededor de H, si no tuviésemos el trozo de circunferencia, bastaría con calcular el punto que genere una mayor distancia entre el centro y los puntos del poliedro.

Además, podemos ver que cuando el centro de la función objetivo H es igual a G, es decir, cuando $\varepsilon = 1,5$, tenemos que el conjunto queda $S(1,5) = \{(x,y) : (x-1,5)^2 + (y-1)^2 = 3,5, 0 \leq x \leq 1,57 \quad , \quad 2,12 \leq y \leq 2,87\}$. Cuando tomamos otro ε, tenemos 2 casos:

1) Si $\varepsilon > 1,5$, tenemos que si tomamos una curva de nivel igual a la distancia entre algún valor del arco y H, tendremos que podremos hacer crecer este arco, al menos hasta llegar a la curva de nivel de valor igual a la distancia entre E y H.
2) Si $\varepsilon < 1,5$, tenemos lo mismo, pero al menos sabemos que la curva de nivel de A con H es mayor a la que pasa por cualquier punto en el arco.

Por lo tanto, podemos ahora hacer como si no tuviésemos ese trozo de circunferencia.

Por el argumento anterior, podemos escribir el conjunto de solución para $\varepsilon \neq 1,5$ como

$$S(\varepsilon) = \{x \in \{A,B,C,D,E\} : d(x,(\varepsilon,1)) = \min_{y \in \{A,B,C,D,E\}} d(y,,(\varepsilon,1))\},$$

lo que es fácil de calcular, ya que podemos calcular explícitamente para cada ε cual es la solución.

b) Antes de responder las preguntas, podemos graficar este poliedro para ver su forma. El poliedro queda como se ve en la figura 4.

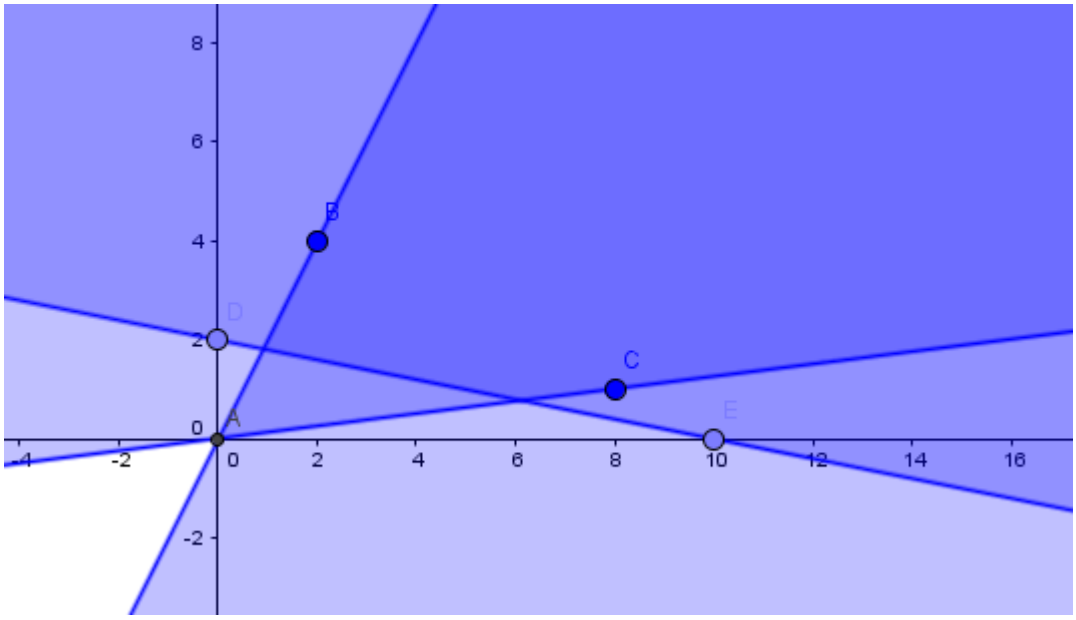


Figura 4: Conjunto factible

i) Para que el problema tenga infinitas soluciones, basta con que la función objetivo decrezca en una dirección ortogonal a una de las rectas de conjunto factible. Es decir, si a y b cumplen con alguna de las siguientes condiciones:

1)
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
con algún $\alpha > 0$

2)
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
con algún $\alpha > 0$

3)
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$
con algún $\alpha > 0$

con algún $\alpha > 0$

ii) Si el alumno utilizó el enunciado con "para que sea infactible", la respuesta es que no existe combinación, ya que la factibilidad depende de las restricciones y no de la función objetivo. Por otro lado, para que no tenga solución, es necesario que la función decrezca en las direcciones donde el conjunto factible no es acotado. Es decir, si a y b cumplen con:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$
con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

iii) Para que haya solución única, basta con tomas un a y b que no cumplan las condiciones anteriores.

c) *i*) Si usamos
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ si } x \in (0, 1] \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$
y D el intervalo $[0, 1]$. Este ejemplo es para un problema de maximización, para uno de minimización se puede usar $-f(x)$. La idea es que mientras mas me acerco a 0, la función objetivo se hace mas grande, pero nunca llego a un máximo.

ii) El problema 3*b*) con $a = 1$ y $b = 2$.

iii) Con $f(x) = \frac{1}{x}$ y D el intervalo $(0, 1]$. En este intervalo, f es continua. Pero no tiene solución óptima.

Problema 4. (15 puntos)

d) (5 puntos) Una empresa MAERSC que vende containers, produce K tipos distintos. En la construcción de los productos debe usar planchas de acero. Dentro de la empresa se cuenta con un taller que puede fabricar estas planchas y con otro taller en el que fabrican los productos. Al gerente le gustaría planificar en un horizonte de 12 meses. En el mes actual, la empresa cuenta con un stock de I_0 m^2 de planchas de acero y no cuentan con producto finalizado.

Hoy en día, la empresa pasa por una crisis, ya que como muchas empresas en Chile, ha tenido que disminuir su personal, es decir, que se encuentra escaso en cuanto a personal. Por este motivo, la empresa cuenta con pocas horas hombre de operario, que puede asignar indistintamente a cualquiera de los dos talleres; una unidad de producto i requiere de a_i horas hombre para su fabricación y de b_i m^2 de acero para $i = 1, 2, ..., K$. Fabricar un metro cuadrado de acero requiere de a horas hombre de operario (asuma que la materia prima necesaria para la producción de las planchas es ilimitada). MAERSC dispondrá de A_t horas-hombre durante el mes t con $t = 1, 2, ..., 12$. Las planchas de acero generadas por la empresa en el mes t, estarán disponibles para ser usadas en el mes $t + 1$ en adelante. La demanda en el mes t del producto i es conocida y vale d_{it} y el precio de venta es p_{it} con $i = 1, 2, ..., K$ y $t = 1, 2, ..., 12$. Los productos pueden ser usados para satisfacer la demanda, en el mismo mes en el que son fabricados, pero también pueden guardarse en inventario para satisfacer la demanda de periodos futuros.

Desarrolle un modelo que permita encontrar el plan óptimo de producción que permita maximizar las utilidades netas de la empresa.

b) (4 puntos) Reemplace las siguientes restricciones por alguna formulación que cumpla un modelo lineal entero mixto.

i) (2 puntos) $y = \text{mín}\{x_1, ..., x_n\}$, donde $0 \leq x_i \leq u$ para todo $i = 1, .., n$.

ii) (2 puntos) $x \in X \setminus \{w\}$, donde $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ es acotado, y $w \in X$ es un vector fijo dado.
HINT: Tome en cuenta que si $x \neq w$ entonces existe al menos una coordenada i donde $x_i \geq w_i + 1$ ó $x_i \leq w_i - 1$.

c) (3 puntos) Demuestre que si $f_1, ..., f_n$ son funciones convexas, entonces $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), ..., f_n(x)\}$ también es convexa.

d) (3 puntos) Demuestre que si f y g son funciones convexas, entonces $h(x) = f(x) + g(x)$ también es convexa.

Solución Problema 4.

a) ◇ **Variables de decisión:**

I_t : Inventario de planchas de acero al final del periodo t (en metros cuadrados) ; $t = 0, 1, 2, ..., 12$.

I_0 : Corresponde al inventario de planchas al final del periodo 0 (o al principio, depende de como lo modelen).

$I'_{i,t}$: Inventario de producto i al final del periodo t (en metros cuadrados) ; $t = 1, 2, ..., 12$.

x_t : Producción de planchas de acero en periodo t (en metros cuadrados) ; $t = 1, 2, ..., 12$.

y_t : Cantidad de planchas de acero utilizadas en periodo t; $t = 1, 2, ..., 12$.

$z_{i,t}$: Cantidad de producto tipo i producidos en periodo t; $t = 1, 2, ..., 12$.

$v_{i,t}$: Cantidad de producto tipo i vendido en periodo t; $t = 1, 2, ..., 12$.

◇ **Función Objetivo**

La función objetivo de este problema, será maximizar las ventas, para maximizar las utilidades.

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{12} p_{i,t} v_{i,t}$$

◇ **Restricciones**

Las planchas de acero que la empresa fabrica durante un mes, están disponibles para ser usadas en la fabricación de los productos desde el mes siguiente en adelante.

$$y_t \leq I_{t-1} \quad \forall t = 1, .., 12.$$

El inventario de acero debe tener continuidad entre un periodo y otro. El inventario al final de un periodo más lo que se produce en este periodo, menos lo que se utiliza, es igual a lo que quedará al final de éste.

$$I_{t-1} + x_t - y_t = I_t \quad \forall t = 1, .., 12.$$

La sumatoria de las horas necesarias para cada producto, por la cantidad que se produce, debe ser menor o igual que el máximo de horas disponibles en cada periodo.

$$a x_t + \sum_{i=1}^{k} a_i z_{i,t} \leq A_t \quad \forall t = 1, .., 12.$$

El total utilizado de acero debe ser igual a la sumatoria de cada producto, por lo que se necesita para fabricarlo.

$$\sum_{i=1}^{k} b_i z_{i,t} = y_t \quad \forall t = 1, .., 12.$$

Debe haber continuidad en el inventario de cada producto i de un periodo a otro. El inventario del periodo anterior más lo que se produce en el periodo, menos lo que se vende, debe ser igual al inventario al final de este.

$$I'_{i,t-1} + z_{i,t} - v_{i,t} = I'_{i,t} \quad \forall t = 1, .., 12 \;\; \forall i = 1, .., k.$$

Por último, se deben cumplir restricciones de no negatividad para todas las variables.

$$I'_{i,t} \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12 \;\; \forall i = 1, .., k \qquad I_t \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12$$
$$z'_{i,t} \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12 \;\; \forall i = 1, .., k \qquad x_t \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12$$
$$d_{i,t} \geq v_{i,t} \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12 \;\; \forall i = 1, .., k \qquad y_t \geq 0 \quad \forall t = 1, .., 12$$

b) *i)* $y = \text{mín}\{x_1, ..., x_n\}$, donde $0 \leq x_i \leq u$ para todo $i = 1, .., n$. Se puede reemplazar por:

$$y \leq x_i \qquad \forall i = 1, .., n$$
$$y \geq x_i - u(1 - z_i) \qquad \forall i = 1, .., n \sum_{i=1}^{n} z_i \geq 1$$
$$0 \geq x_i \geq u \qquad \forall i = 1, .., n$$
$$z_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, .., n.$$

ii) $x \in X \setminus \{w\}$, donde $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ es acotado, y $w \in X$ es vector fijo dado. Esto se puede reemplazar por:

$$Ax \geq b$$
$$x_i \geq w_i + 1 - M(1 - y_i) \qquad \forall i = 1, .., n$$
$$x_i \leq w_i - 1 + M(1 - z_i) \qquad \forall i = 1, .., n$$
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) \geq 1$$
$$y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, .., n$$
$$z_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, .., n.$$

c) Como las f_i con i de 1 a n son convexas, para cualquier x e y en el dominio tenemos que:

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y) \quad \forall i = 1, .., n \;\; \forall \lambda \in [0,1]. \tag{7}$$

Además, sabemos que

$$\text{máx}\{a+b\} \leq \text{máx}\{a\} + \text{máx}\{b\} \tag{8}$$

Luego, sea x e y en el dominio de f y sea $\lambda \in [0,1]$ cualquiera, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max_i \{f_i(\lambda x + (1-\lambda)y)\} \\ &\overbrace{\leq}^{(7)} \max_i \{\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\} \\ &\overbrace{\leq}^{(8)} \max_i \{\lambda f_i(x)\} + \max_i \{(1-\lambda) f_i(y)\} \\ &\leq \lambda \max_i \{f_i(x)\} + (1-\lambda) \max_i \{f_i(y)\} \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

d) Sea x e y puntos del dominio de f y g, como f y g son convexas, tenemos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{9}$$
$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y), \tag{10}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$ Por demostrar, $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$ Sea $\lambda \in [0,1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \\ &\leq \lambda (f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(y) + g(y)) \\ &\leq \lambda (h(x)) + (1-\lambda)(h(y)) \end{aligned}$$