PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2024 - 2
Profesores: C. Balbontín - R. Cuadrado - M. Klapp
H. Larraín - G. Pérez

Examen

Duración: 140 minutos.

Instrucciones

- **Identificarse:** Escribir nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja. Además, escribir número de lista en cada hoja. La falta de esta información será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- Durante la prueba debe **poseer una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También debe firmar la lista de asistencia a la prueba.
- Al finalizar la prueba: cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Examen" y **entregar la prueba física** al ayudante. El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, ya que se corregirá sobre el documento escaneado. Sin embargo, si el equipo docente no recibe el respaldo físico de la prueba, entonces podría asignarle nota mínima.
- La prueba es estrictamente individual. Otra forma de abordarla es una falta a la ética y será evaluada con nota mínima en la prueba.
- Escribir respuestas en la prueba después del tiempo de término se penaliza con nota mínima en la pregunta en cuestión o, incluso, en toda la prueba.
- Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS. El uso de un dispositivo en otra circunstancia se considera una falta a la ética y se penaliza con nota mínima en la prueba.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

Pregunta 1 (10 puntos):

El dueño de una fábrica le solicita ayuda para planificar su producción. Actualmente, se planifica mediante la recomendación del siguiente modelo de optimización:

$$
\begin{aligned}
\min_{x\geq 0, y\geq 0} \quad & \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T} c_{i,t}x_{i,t} + \sum_{t=1}^{T-1} h_{i,t}y_{i,t}\right) \\
\text{s.a.} \quad & y_{i,t} + d_{i,t} = y_{i,t-1} + x_{i,t}, \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall t \in \{1,...,T\} \\
& \sum_{i=1}^{n} v_i y_{i,t} \leq V, \quad \forall t \in \{1,...,T-1\} \\
& y_{i,0} = 0, \quad y_{i,T} = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n\}
\end{aligned}
$$

Como puede ver, en el modelo se planifica la fabricación de n productos diferentes sobre un horizonte de planificación de T días. Se debe satisfacer la demanda $d_{i,t}$ [Kg] por producto $i \in \{1,...,n\}$ en cada día $t \in \{1,...,T\}$, para lo que necesita decidir cuántos kgs producir de cada producto cada día y cuántos kgs almacenar de cada producto de un día para otro. Los costos de producción y de almacenaje de cada producto en cada periodo del horizonte son $c_{i,t}$ [\$/Kg] y $h_{i,t}$ [\$/Kg], respectivamente. Note que el costo de almacenaje se paga por la cantidad de producto almacenado entre t y $t+1$. Además, existe una sola bodega con capacidad de V [m^3]. El volumen utilizado por 1 Kg de producto $i \in \{1,...,n\}$ es v_i [m^3].

Conversando con el dueño de la fábrica, le plantea que no está contento con el modelo por tres razones. Agregue las modificaciones necesarias al modelo para evitar los siguientes problemas mencionados por el dueño de la fábrica:

(a) (5 puntos) El modelo actual no considera que se paga un costo fijo $k_{i,t}$ [\$] si es que se produce cualquier cantidad positiva del producto i en el período t, además del costo unitario $c_{i,t}$.

(b) (5 puntos) Sea $T_V \subset \{1,...,T\}$ el conjunto de días viernes dentro del horizonte de planificación. Por acuerdo con el sindicato, debe escogerse un día viernes libre en el horizonte y no se puede planificar producción ese día. Esto no está considerado en el modelo actual.

Solución:

(a) Debemos primero definir la variable binaria $w_{i,t} \in \{0,1\}$ que toma valor 1 si se produce i en día t. Luego, modificamos el objetivo a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T} c_{i,t}x_{i,t} + \sum_{t=1}^{T-1} h_{i,t}y_{i,t}\right) + \sum_{t=1}^{T} k_{i,t}w_{i,t},$$

e incorporamos la restricción lógica $x_{i,t} \leq M \cdot w_{i,t}, \forall t \in \{1,...,T\}, i \in \{1,...,n\}$, donde M es un número suficientemente grande.

(b) Definimos la variable binaria $f_t \in \{0,1\}$ que indica si el día $t \in \{1,...,T\}$ es libre. Luego, imponemos un día libre

$$\sum_{t \in T_V} f_t \geq 1,$$

y anulamos la producción cuando esto ocurre

$$x_{i,t} \leq M \cdot (1 - f_t), \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall t \in \{1,...,T\}.$$

La última restricción también se puede escribir como suma, o usando w_{ij} en lugar de x_{ij}. Es decir, la última restricción también se puede plantear como cualquiera de estas tres:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} \leq M \cdot (1 - f_t), \quad , \forall t \in \{1,...,T\},$$

$$w_{i,t} \leq M \cdot (1 - f_t), \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall t \in \{1,...,T\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} \leq M \cdot (1 - f_t), \quad , \forall t \in \{1,...,T\}.$$

Nota de corrección:

a) 2 por la variable, 1 por la f.o., 2 por la restricción.

b) 2 por la variable, 1 por imponer días y 2 para limitar producción

Pregunta 2 (20 puntos):

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2\geq 0} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 20 \quad (1) \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \quad (2) \end{aligned}$$

(a) (8 puntos) Considere la solución que activa las restricciones (1) y (2). Certifique que es óptima utilizando la condición de optimalidad del algoritmo simplex.

Solución: Para garantizar la optimalidad, debemos calcular estandarizar el problema y calcular sus costos reducidos:

$$\begin{aligned} \min_{x\geq 0} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \end{aligned}$$

Simplex B $= (x_1, x_2)$, N $= (x_3, x_4)$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}, c_B^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \overline{A}_N = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}, c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 44/7 \\ 24/7 \end{pmatrix}$$

$$z_B = -160/7, r_N^T = \begin{pmatrix} 4/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Como los costos reducidos de ambas variables fuera de base son positivas, indica que estamos en un óptimo, y el valor óptimo es igual a $z_B = -160/7$.

(b) (6 puntos) ¿En qué rango de valores podría estar el valor del costo de x_1 (actualmente igual a -2) para que la solución anterior se mantenga óptima?

Solución: No cambia la factibilidad, sólo cambia la optimalidad, por lo que tenemos que revisar los costos reducidos. Escribamos el costo de x_1 (variable básica) como δ:

$$\begin{aligned} {r_{N'}}^T &= c_N^T - \left({c_{B'}}^T \overline{A}_N\right) \geq 0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/7\delta + 6/7 & -4/7\delta + 3/7 \end{pmatrix} \geq 0 \\ &\rightarrow 1/7\delta + 6/7 \geq 0 \quad \rightarrow \delta \geq -6 \\ &\rightarrow -4/7\delta + 3/7 \geq 0 \quad \rightarrow \delta \leq -3/4 = -0.75 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $-6 \leq \delta \leq -0.75$. Es decir, el costo de x_1 podría decrecer en 4 unidades (hasta -6) o crecer en 1.25 unidades (hasta -0.75).

(c) (6 puntos) Imagine que ahora se agrega una restricción que impone que x_1 y x_2 deben ser números enteros. Genere un corte de Gomory, es decir, una desigualdad válida para soluciones factibles enteras que corte la solución óptima fraccionaria anterior.

Solución: En este caso, si escribimos el problema en formato estándar, las restricciones nos quedan de la forma:

$$\begin{aligned} & x_B + \overline{A}_N x_N = \overline{b} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44/7 \\ 24/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Acá podríamos agregar dos tipos de restricciones, una asociada a x_1 y otra asociada a x_2. **Basta con que agreguen una de las dos para cortar este vértice**. Asociado a x_1 tendríamos:

$$\begin{aligned} & x_1 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 = \frac{44}{7} \\ & (x_1 - 1x_3 + 0x_4) + \left(\frac{6}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4\right) = 6 + \frac{2}{7} \\ & \rightarrow \frac{2}{7} - \frac{6}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 \leq 0 \quad \rightarrow 2 \leq 6x_3 + 4x_4 \end{aligned}$$

Asociado a x_2 tendríamos:

$$x_2 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = \frac{24}{7}$$
$$(x_2 + 0x_3 - 1x_4) + \left(\frac{2}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4\right) = 3 + \frac{3}{7}$$
$$\rightarrow \frac{3}{7} - \frac{2}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 \leq 0 \quad \rightarrow 3 \leq 2x_3 + 6x_4$$

Nota de corrección:

a) 2 ptos por estandarizar, 2 ptos por base correcta, 2 ptos por desarrollo, 2 ptos por CR y condición de optimalidad

b) 1 pto por mencionar que no cambia factibilidad, 1 punto por plantear bien condición, 2 ptos límite superior, 2 ptos límite inferior.

c) 2 ptos por identificar una restricción fraccionaria, 2 ptos por desarrollo, 2 ptos resultado

Pregunta 3 (10 puntos):

La alcaldesa de Viña del Mar le ha pedido ayuda para planificar el siguiente festival de la canción. Específicamente usted debe programar la presentación de artistas en cada uno de los T días. Cada día $t \in \{1, \ldots, T\}$ está subdividido en K módulos de 30 minutos. Todos los módulos deben ser agendados con artistas. Además, debe programar al menos tres artistas diferentes por día.

El conjunto de todos los artistas que puede invitar es J y cada artista $j \in J$ cobra un costo fijo de $\$c_j$ pesos por presentarse, más un variable igual a $\$b_j$ por módulo sobre el escenario. Naturalmente, un artista solo puede presentarse a lo más una vez durante todo el festival y, si su presentación se agenda por mas de un módulo, debe ser en módulos consecutivos del mismo día. Además, se estiman ventas de $\$v_j$ durante cada módulo $k \in \{1, \ldots, K\}$ si es que se presenta el artista j en un día cualquiera del festival.

Formule un problema de programación lineal entera que ayude a determinar la programación de artistas que maximice las utilidades generadas por el festival.

Solución:

Existen muchos modelos correctos del problema, pero normalmente hay dos formas.

Forma 1: Con una variable que asigna toda la presentación de cada artista.

- Variables:

- x_{t,j,k_1,k_2} : binaria. Si en día $t \in \{1, ..., T\}$ se programa al artista $j \in J$ desde el inicio del módulo $k_1 \in \{1, ..., K\}$ hasta el final del $k_2 \in \{k_1, \ldots, K\}$.

◇ Objetivo:

$$\text{máx} \qquad \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{k'=k}^{K} \{(v_j - b_j) \cdot (k' - k + 1) - c_j\} \cdot x_{t,j,k,k'}$$

◇ Restricciones:

(a) Cada artista a lo más una vez:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k_1=1}^{K} \sum_{k_2=k_1}^{K} x_{t,j,k_1,k_2} \leq 1, \qquad \forall j \in J$$

(b) Un artista comienza cada día.

$$1 = \sum_{j \in J} \sum_{k'=1}^{K} x_{t,j,1,k'}, \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(c) En cada módulo $k : 1 < k < K$: un artista debe comenzar en k si es que otro termina otro termina en $k - 1$.

$$\sum_{k'=1}^{k-1} \sum_{j \in J} x_{t,j,k',k-1} = \sum_{j \in J} \sum_{k'=1}^{K} x_{t,j,k,k'}, \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, k \in \{2, \ldots, K-1\}$$

(d) Minimo 3 artistas por día:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{k'=k}^{K} x_{t,j,k,k'} \geq 3, \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(e) Naturaleza binaria:

$$x \text{ es un vector binario.}$$

Forma 2: Con dos variables: una que escoge si se presenta y otra que determina en qué momento se está presentando.

◇ Variables:

- x_{jt} : binaria. Si el artista $j \in J$ se presenta en día $t \in \{1, ..., T\}$

- y_{jtk} : binaria. Si el artista $j \in J$ ocupa el módulo $k \in \{1, ..., K\}$ del día $t \in \{1, ..., T\}$

◇ Objetivo:

$$\text{máx} \qquad \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} (v_j - b_j) y_{jtk} - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} c_j x_{jt}$$

◇ Restricciones:

(a) Cada artista a lo más una vez:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} \leq 1, \qquad \forall j \in J$$

(b) Restricción lógica:

$$\sum_{k=1}^{K} y_{jtk} \leq K x_{jt}, \qquad \forall j \in J, t \in \{1, ..., T\}$$

(c) No tocar en módulos no consecutivos:

$$y_{jtk} + y_{jtk'} - 1 \leq y_{j,t,k+1} \qquad \forall j \in J, t \in \{1, ..., T\}, k, k' \in \{1, \ldots, K-2\} : k' - k \geq 2$$

(d) Un artista por módulo:

$$\sum_{j \in J} y_{jtk} = 1, \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, k \in \{1, ..., K\}$$

(e) Mínimo 3 por día:

$$\sum_{j \in J} x_{jt} \geq 3, \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(f) Naturaleza binaria:

$$x, y \text{ son vectores binarios.}$$

Nota de corrección:

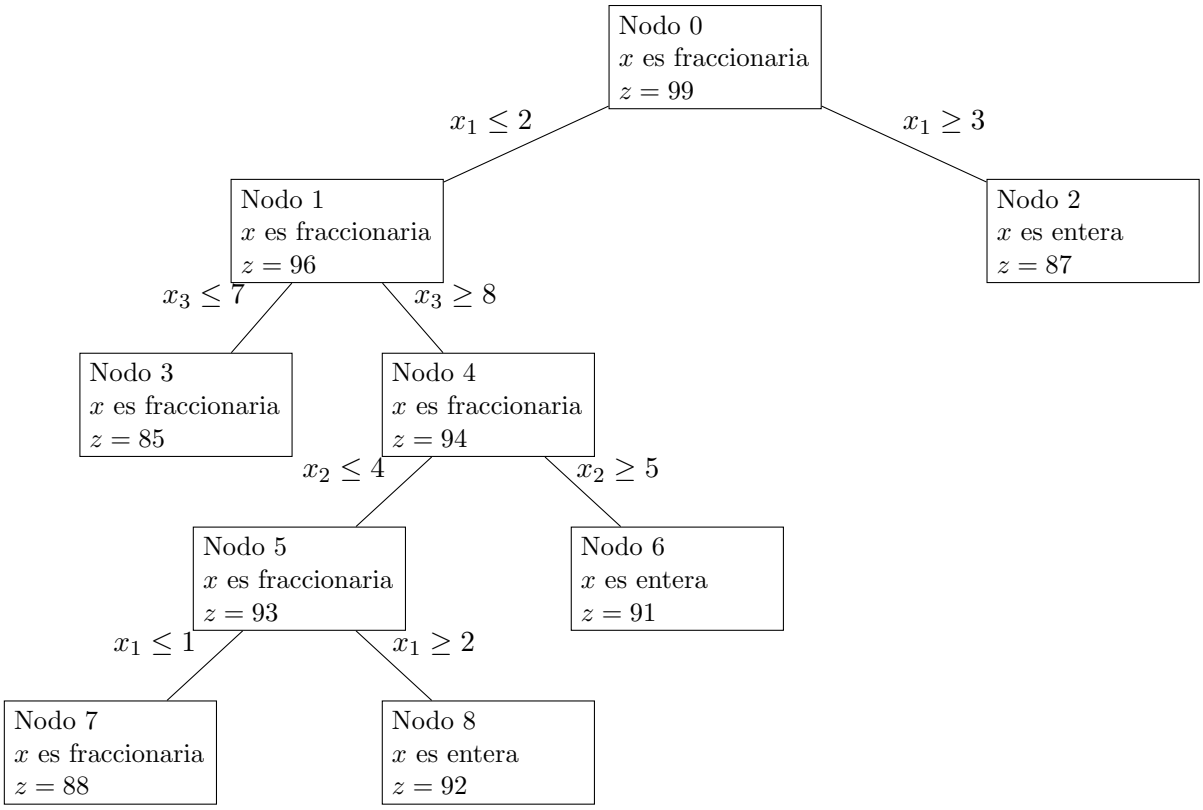
◇ 2 pts por variables. Máximo 1 pt si falta o hay un error en la naturaleza de variables, o si las variables no permiten contabilizar el día o módulo en que presenta cada artista.

◇ 2 pts por función objetivo. 1 pt si hay errores menores pero considera ingreso y ambos costos. 0 pts si falta algún costo o ingreso, o errores graves como no linealidad.

- ◇ 3 pts por restricciones de asignación de artistas: cada artista presenta máximo 1 vez, y mínimo 3 artistas por día. Máximo 2 pts si falta una o por errores menores. Máximo 1 pt si hay errores graves.
- ◇ 3 pts por restricciones de lógica de asignación de módulos. Forma 1: b, c. Forma 2: b, c, d. Máximo 2 pts si hay errores menores. Máximo 1 punto si hay errores graves. Asignar 3 pts si está todo correcto por pauta o equivalente.

Pregunta 4 (10 puntos):

A continuación, se presenta un árbol de Branch & Bound obtenido al resolver a optimalidad un problema de optimización lineal entera con variables $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$. El nombre de cada nodo indica su orden de exploración. Es decir, comenzó resolviendo la relajación lineal del Nodo 0, luego la del Nodo 1, y así sucesivamente. En cada nodo se indica si su solución óptima relajada es entera o fraccionaria y, además, se detalla su valor óptimo relajado (z).



Responda las siguientes preguntas a partir de la información qué aparece en el árbol:

(a) (2p) ¿Está maximizando o minimizando el objetivo del problema? Justifique.

Solución: Maximizando dado que el valor óptimo de las relajaciones lineales no crece a medida que se avanza en el árbol.

(b) (1p) ¿Se utilizó la estrategia *Breadth First Search* o *Depth First Search*? **Solución:** BFS.

(c) (2p) ¿Cuánto fue el valor de la mejor cota inmediatamente después de haber resuelto la relajación lineal del problema asociado al Nodo 4? **Solución:** 94

(d) (2p) ¿Por qué no se ramifica en el Nodo 3?

Solución: Porque el valor óptimo relajado (85) es peor que el incumbente (87). No hay opción de encontrar una mejor solución entera hacia abajo.

(e) (2p) ¿Cuánto es el valor óptimo del problema entero original? **Solución:** 92 (encontrado en el Nodo 8).

(f) (1p) ¿Qué valor toma la variable x_1 en el óptimo del problema? **Solución:** Al analizar las restricciones que se van agregando, vemos que $x_1 = 2$.

Nota de corrección:

a) 1 pto por respuesta, 1 pto por justificación
b) 1 pto si responde correctamente, 0 pts si no
c) 1 pto si responde correctamente, 0 pts si no
d) 2 pts justificación completa, 1 pt justificación incompleta, 0 pts incorrecto
e) 1 pto si responde correctamente, 0 pts si no
f) 1 pto si responde correctamente, 0 pts si no

Pregunta 5 (10 puntos):

Responda independientemente cada pregunta:

(a) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización no lineal irrestricta:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (1113 - x_1)^2 + (x_2 - x_1^4)^2$$

Identifique su solución óptima a través de condiciones necesarias de primer orden.

Solución:

La CN es que:

$$(-2 \cdot (1113 - x_1) + 2(x_2 - x_1^2) \cdot (-4x_1^3), 2(x_2 - x_1^4)) = 0$$

Luego, se debe cumplir que:

$$x_2 = x_1^4$$

y

$$x_1 = 1113$$

. Reemplazando $(x_1, x_2) = (1113, 1113^4)$ es la única solución óptima posible.

(b) (7 puntos) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^3} \quad & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) (2p) Muestre que admite solución óptima.
Solución: Si existe. Por BW: F.O. continua, solución factible factible (origen) y dominio compacto (toda variable mayor o igual a cero y menor que 18).

(ii) (3p) Escriba las condiciones KKT que debe cumplir todo mínimo local.
Solución:
Nota: Hay muchisimas formas equivalentes de condiciones KKT. Esta es una.
Se lleva el problema a minimización con restricciones de $\leq$:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^3} \quad & -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18, \\ & -x_1 \leq 0, \\ & -x_2 \leq 0, \\ & -x_3 \leq 0. \end{aligned}$$

Luego se debe cumplir que existe un (x_1, x_2, x_3) factible y multiplicadores $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ tal que:

$$(x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2) = \mu_0(1,2,3) + \mu_1(-1,0,0) + \mu_2(0,-1,0) + \mu_3(0,0,-1)$$

y que

$$x_1\mu_1 = x_2\mu_2 = x_3\mu_3 = (18 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)\mu_0 = 0$$

.

(iii) (2p) Identifique intuitivamente cuáles restricciones deben estar activas en su solución óptima, obtenga este punto y verifique que cumple las condiciones KKT.

Solución: Si una variable es nula, entonces el objetivo es nulo y eso es claramente subóptimo. Por ejemplo, $x = (1, 1, 1)$ es factible y posee un objetivo superior a cero. Luego, $x_i > 0$ para todo $i \in \{1, ..., 3\}$ en el óptimo y por complementariedad de holgura, se debe dar $\mu_i = 0$ para todo $i \in \{1, ..., 3\}$.

Más aún, la restricción $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18$ debe estar activa en el óptimo, pues de lo contrario es imposible que el gradiente sea nulo (CN si no se activan restricciones).

Luego, se debe encontrar $\mu_0 \geq 0$ y x factible tal que

$$(x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2) = \mu_0(1, 2, 3)$$

y que

$$(18 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)\mu_0 = 0$$

.

De la ecuación vectorial se despeja μ_0 se debe cumplir que:

$$x_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3/2$$

y

$$x_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2/3$$

Luego. $x_2 = x_1/2$ y $x_3 = x_1/3$.

Reemplazando en la restricción: $x_1 + 2 \cdot x_1/2 + 3 \cdot x_1/3 = 3x_1 = 18$. Luego: $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 2$. Además $\mu_0 = x_2 \cdot x_3 = 6$. Por lo que se cumplen las condiciones KKT.

Nota de corrección:

a) 1 pto por plantear CN (-2...). 1 pto por plantear x_2 y x_1. 1 pto por solución (x_1, x_2)

b) i) 2 pts por plantear TBW, -1 por errores menores

ii) 3 pts por plantear KKT, -1 por errores menores o si no explicita que μ_i deber ser ≥ 0 , -2 puntos errores mayores

iii) 1 pto por planteamiento (decir que restricción esta activa), 1 pto por llegar al punto correcto