**Pauta I2 Optimización Sección 2, Profesor: Mathias Klapp**

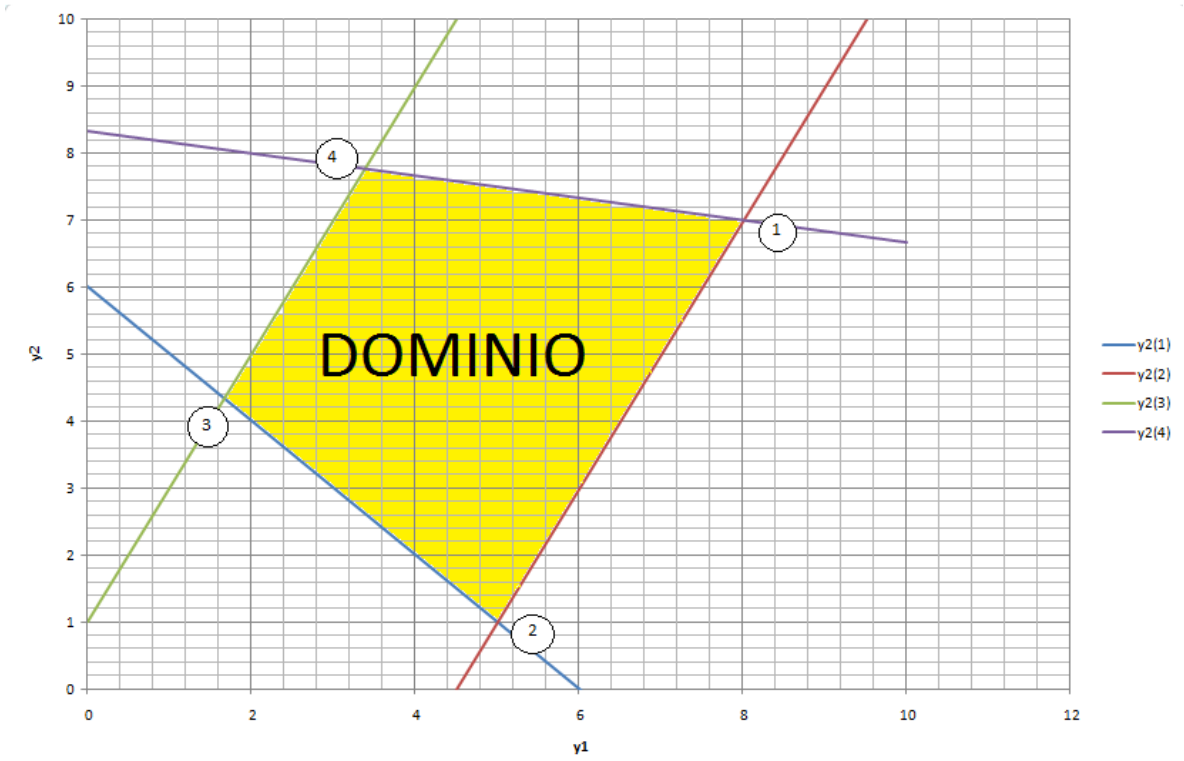
**Pregunta 1**

i) Llevando el problema a su forma DUAL

$$Max\ 2y_1 + 6y_2 \quad (1\ pto)$$
$$s.a.$$
$$-y_1 - y_2 \leq -6 \quad (1\ pto)$$
$$2y_1 - y_2 \leq 9 \quad (1\ pto)$$
$$-2y_1 + y_2 \leq 1 \quad (1\ pto)$$
$$y_1 + 6y_2 \leq 50 \quad (1\ pto)$$

$$y_1, y_2 \geq 0 \quad (1\ pto)$$

Graficando el dominio $(3\ ptos)$




ii) Una cota inferior seria cualquier solución FACTIBLE del dual $(2{,}5\ ptos)$.

Por ejemplo (4,4) , es decir

$v = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 32$ , luego

$v \ast\geq 32$ $(2{,}5\ ptos)$.

iii) Gráficamente notamos que el óptimo del problema dual es (8,7) $(2\ ptos)$.

Reemplazando la solución obtenida en las restricciones, obtenemos las holguras:

$$-8-\ 7+h1\ \leq -6 \rightarrow h1 = 9\ (0{,}25\ ptos).$$
$$2{\cdot}8{-}7{+}h2\ \leq 9 \rightarrow h2 = 0\ (0{,}25\ ptos).$$
$$-2\cdot 8+\ 7+h3\ \leq 1 \rightarrow h3 = 10(0{,}25\ ptos).$$
$$8{+}6{\cdot}7{+}h4 \leq 50 \rightarrow h4 = 0(0{,}25\ ptos).$$

$$v* = 2\cdot 8+6\cdot 7 = 58$$

Por propiedades del sistema PRIMAL-DUAL, sabemos que

Los costos reducidos del PRIMAL son las holguras del DUAL, i.e.

$$c_{R1} = 9, c_{R2} = 0, c_{R3} = 10, c_{R4} = 0\ (1\ ptos).$$

Por otro lado, las costos reducidos de las holguras del PRIMAL, son las variables del DUAL, i.e.

$$c_{RH1} = 8, c_{RH2} = 7(1\ pto).$$

Por lo tanto las variables fuera de base son todas aquellas con $c_R > 0$, i.e.

$$x_1 = 0, x_2 = X2, x_3 = 0, x_4 = X4\ (0{,}5\ pto)$$

Además

$$E_1 = 0, E_2 = 0(0{,}5\ pto)$$

Por lo que las dos restricciones están activas

Reemplazando los valores en las restricciones del PRIMAL, tenemos $(1\ pto)$

$$-0+2\cdot X2-2\cdot 0+X4 = 2$$
$$-0-X2+0+6\cdot X4 = 6$$

Resolviendo

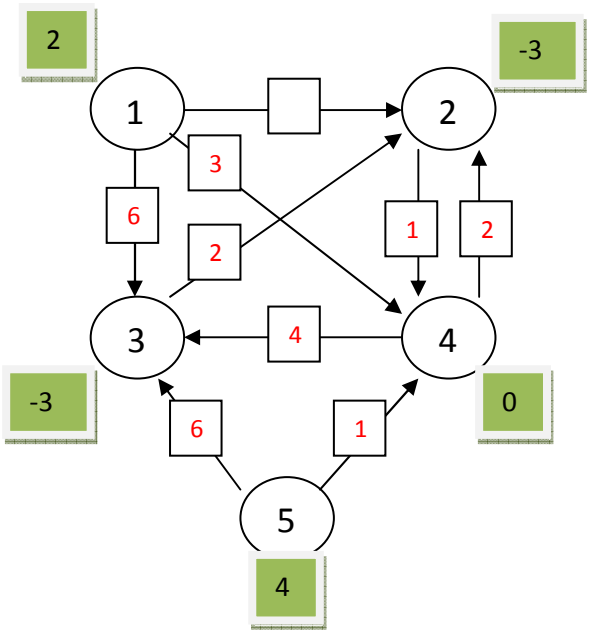
$$X2 = \frac{6}{13} = 0{,}46153;\ X4 = \frac{14}{13} = 1{,}07692\ (2\ ptos).$$

Reemplazando en la función objetivo

$$v* = -6\cdot 0+9\cdot 0{,}46153+0+50\cdot 1{,}07692 = 58\ (1\ pto).$$

# Pregunta 2.

**i)** El grafo asociado al PFMC es el siguiente:



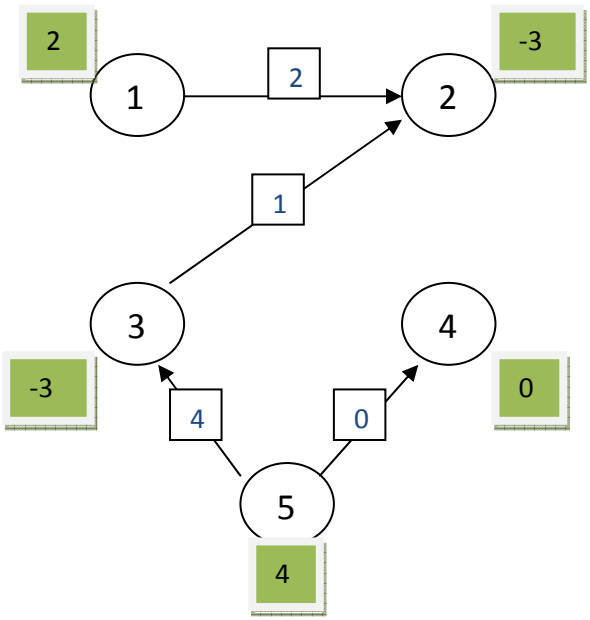

Los costos están indicados en rojo, mientras que las ofertas y demandas en los cuadrados verdes. Estos últimos son negativos sin representan demandas y positivos si representan ofertas.

Puntaje:

- Por dibujar el grafo con los nodos y arcos, 3 puntos
- Por agregarle a lo anterior los costos, 1 punto
- Por agregarle a lo anterior las demandas y ofertas, 1 punto.

Nota: Para esta parte, son muchos los grafos posibles, y no debe ser necesariamente igual al expuesto anteriormente.

**ii)** El grafo asociado a esta base inicial factible es el siguiente:




Los valores azules corresponden a los valores de las variables en la base.

A continuación calculamos los potenciales. Los costos reducidos de las variables básicas son 0, luego:

$\pi_2 - \pi_2 = c_{12} = 5$

$\pi_3 - \pi_2 = c_{23} = 2$

$\pi_5 - \pi_3 = c_{53} = 6$

$\pi_5 - \pi_4 = c_{54} = 1$

Haciendo $\pi_5 = 0$

$\pi_1 = -3$

$\pi_2 = -8$

$\pi_3 = -6$

$\pi_4 = -1$

Estamos en el óptimo?

$r_{43} = c_{43} - \pi_4 + \pi_3 = 4 + 1 - 6 = -1 < 0$

Luego no estamos en el óptimo.

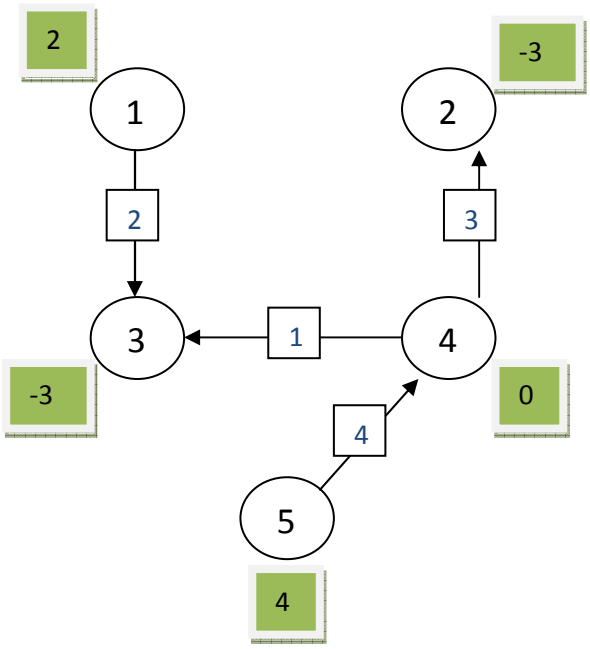
El valor de la función objetivo es $\sum c_{ij} * X_{ij} = 5 * 2 + 2 * 1 + 6 * 4 + 1 * 0 = 36$

La característica especial de esta base es que es una base **degenerada.**

Puntaje:

- Por dibujar el grafo con los arcos indicados, 1 puntos
- Por calcular los valores de las variables básicas, 1 punto
- Por calcular el valor de la función objetivo, 1 punto
- Por calcular los potenciales, 1 punto
- Por **nombrar** la base como degenerada, 1 punto.

**iii)** Luego de iterar usando el método SIMPLEX, se llega al siguiente grafo:




Calculamos los potenciales, usando los costos reducidos de las variables básicas:

$\pi_1 - \pi_3 = 6$

$\pi_4 - \pi_2 = 2$

$\pi_4 - \pi_3 = 3$

$\pi_5 - \pi_4 = 1$

Haciendo $\pi_5 = 0$

$\pi_1 = 1$

$\pi_2 = -3$

$\pi_3 = -5$

$\pi_4 = -1$

Estamos en el óptimo?

$r_{12} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$

$r_{14} = 3 - 1 - 1 = 1 > 0$

$r_{24} = 1 + 3 - 1 = 3 > 0$

$r_{32} = 2 + 5 - 3 = 4 > 0$

$r_{53} = 6 - 0 - 5 = 1 > 0$

Como todos los costos reducidos son mayores a 0, estamos en el óptimo.

El valor de la función objetivo en el óptimo es $\sum c_{ij} * X_{ij} = 26$

Puntaje:

- Por un claro manejo del método SIMPLEX, involucrando potenciales, costos reducidos, valores de la Función Objetivo en las iteraciones, etc. 7 puntos.
- Por llegar al grafo asociado a la solución óptima, 4 puntos.
- Por encontrar los potenciales en el óptimo, 1 puntos
- Por demostrar que la solución es óptima, 2 puntos
- Por encontrar el valor óptimo, 1 punto.

Notas:

- Para esta parte, no se enfocará la corrección en si cada paso del SIMPLEX está correcto, sino que se revisará si el alumno sabe o no utilizar este método.
- No era necesario comenzar el SIMPLEX desde la base factible de la parte ii). Se podía comenzar desde cualquier otra, o incluso encontrar el óptimo "al ojo", y luego demostrar, mediante SIMPLEX, que era el óptimo.

# Bonus.

# iv)

Analizamos el costo reducido de una variable no básica:

$r_{53} = 6 - 0 - 5 = 1$

Luego, para que siga manteniéndose fuera de la base, $\Delta C_{53} > -1$

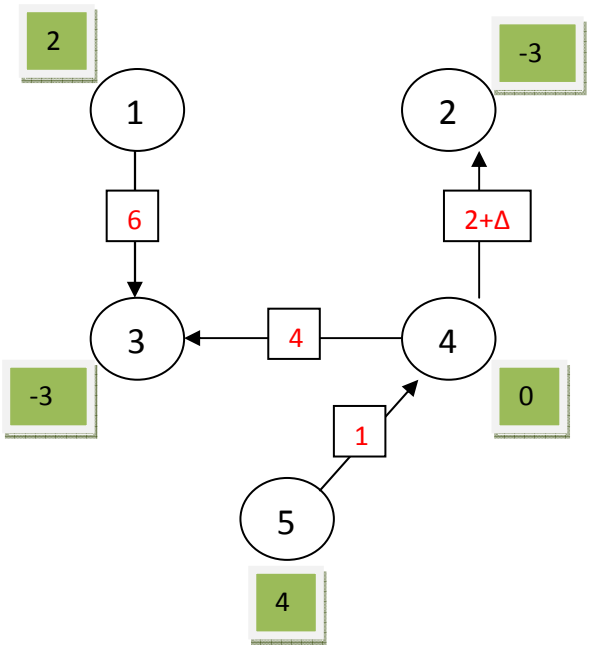
Puntaje:

* Por buscar el costo reducido de la variable en cuestión, 2 puntos

* Por encontrar el rango, 3 puntos.

## v)

Analizamos ahora los costos reducidos de las variables básicas. El grafo con los costos asociado sería.




Calculamos los potenciales, usando los costos reducidos de las variables básicas:

$\pi_1 - \pi_3 = 6$

$\pi_4 - \pi_2 = 2$

$\pi_4 - \pi_3 = 3$

$\pi_5 - \pi_4 = 1$

Haciendo $\pi_5 = 0$

$\pi_1 = 1$

$\pi_2 = -3 - \Delta$

$\pi_3 = -5$

$\pi_4 = -1$

Luego, vemos los costos reducidos que son afectados por $\pi_2$

$r_{12} = 5 - 1 - -3 - \Delta = 3 + \Delta$

$r_{24} = 1 - (-3 - \Delta) - 1 = 1 - \Delta$

$r_{32} = 2 + 5 + ( -3 - \Delta) = 4 - \Delta$

Finalmente, para mantener la estructura del árbol básico en el óptimo,

$-3 < \Delta < 1$

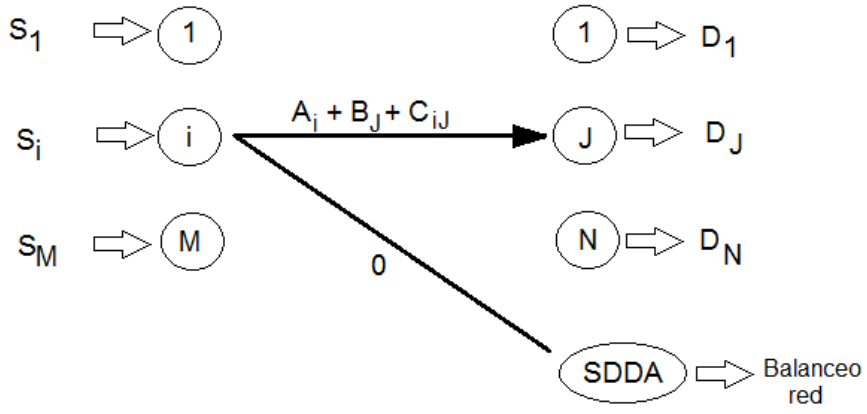
Puntaje:

- Por dibujar el gráfico considerando los costos, 1 punto.
- Por encontrar los costos reducidos, 1 punto
- Por encontrar el rango, 3 puntos.

**<u>Pregunta 3</u>**

i)
Se definen las variables:
$X_{IJ}$: toneladas sacadas de la cantera "i" para nivelar la sección "j" de la carretera.
$X_{I,SDDA}$: toneladas no usadas de la cantera "i".

Lo anterior se puede modelar como un problema de oferta y demanda.




Donde el balanceo de la red equivale a la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{M} S_i - \sum_{J=1}^{N} D_J$$

El modelo del problema se puede plantear como:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{M}\sum_{J=1}^{N}(A_i B_J C_{iJ})X_{iJ}$$

$$s.a. \quad \left(\sum_{J=1}^{N} X_{iJ}\right) + X_{i,SDDA} = S_i \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_{iJ} = D_j \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_{i,SDDA} = \sum_{i=1}^{M} S_i - \sum_{J=1}^{N} D_J \quad \forall j = 1, \dots, N; \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$X_{i,SDDA} \geq 0 \quad X_{ij} \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, N; \quad \forall i = 1, \dots, M$$

Notas:
La tercera condición es redundante (puede no ir), ya que está incluida en las dos primeras.

**Puntaje:**

- **5 puntos por la red**
- **10 puntos por el modelo (2 puntos por las variables creadas para representar el flujo, 2 por la función objetivo y 6 por las restricciones).**

ii)

Al problema anterior se añade el costo por arco $E_{iJ}$, pero sólo si éste se utiliza por lo que creamos una variable binaria:

$$Y_{iJ} = \begin{cases} 1 & si\ se\ uiliza\ el\ arco \\ 0 & si\ no\ se\ uiliza\ el\ arco \end{cases}$$

Entonces el problema sólo cambia su formulación, y las condiciones siguen siendo las mismas, más la cota de transporte y las limitaciones de conjunto.

$$Min \quad \sum_{i=1}^{M}\sum_{J=1}^{N}([A_i B_J C_{iJ}]X_{iJ} + Y_{iJ}E_{iJ})$$

$$s.a. \quad \left(\sum_{J=1}^{N} X_{iJ}\right) + X_{i,SDDA} = S_i \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_{iJ} = D_j \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_{i,SDDA} = \sum_{i=1}^{M} S_i - \sum_{J=1}^{N} D_J \quad \forall j = 1, \dots, N; \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$X_{iJ} \leq Y_{iJ} S_i$$

$$X_{i,SDDA} \geq 0 \quad X_{ij} \geq 0 \quad Y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall j = 1, \dots, N; \quad \forall i = 1, \dots, M$$

**Puntaje:**

- **1 punto por la variable binaria**
- **2 puntos por la función objetivo**
- **2 puntos por las restricciones adicionales**

## Pregunta 4

(i)

Max $x_1 + x_2$

s.a

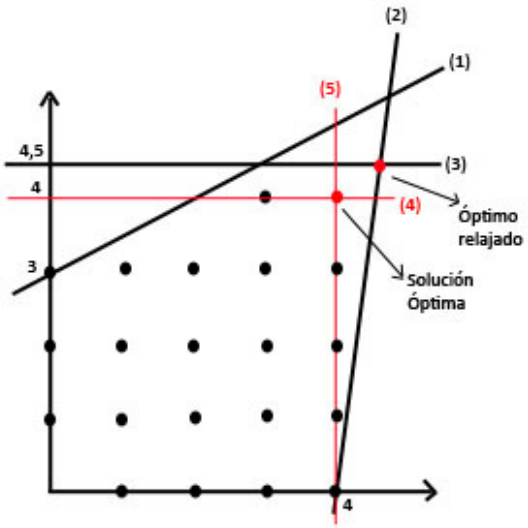
(1) $-x_1 + 2x_2 \leq 6$

(2) $7x_1 - x_2 \leq 28$

(3) $2x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \in Z^+$

Podemos ver esta situación en el siguiente gráfico:




Vemos que la solución óptima es fraccionaria, por lo que se pueden agregar dos planos cortantes para así llegar al óptimo entero y poder resolver el problema de la forma que el amigo quiere.

Luego, las restricciones a agregar son:

(4) $x_1 \leq 4$

(5) $x_2 \leq 4$

Con esto, no se pierden soluciones factibles y se deja al problema con vértices enteros.

Así el problema queda de la siguiente forma:

Max $x_1 + x_2$

s.a

(1) $-x_1 + 2x_2 \leq 6$

(2) $7x_1 - x_2 \leq 28$

(3) $2x_2 \leq 9$

(4) $x_1 \leq 4$

(5) $x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \in Z^+$

Asignación de puntaje:
3 puntos por dibujar bien el gráfico y el dominio.
4 puntos por dibujar bien el gráfico y agregar sólo una restricción.
5 puntos por dibujar bien el gráfico y poner restricciones de más.
6 puntos por dibujar bien el gráfico y agregar sólo las dos restricciones y no más.

(ii)

1. Falso, ya que al minimizar el óptimo entero debe estar sobre o igual al óptimo relajado (el relajado tiene mayor dominio, es decir, da una mejor o igual solución al entero). Luego la relación correcta sería $Z \geq ZR$.
2. Falso, una solución factible puede ser mayor o igual a la solución óptima. Luego la relación debe ser $I \geq Z$.
3. Falso, el dominio del problema es un subconjunto del dominio de la relajación lineal de problema, no al revés. Luego la relación es $D \subseteq DR$.
4. Falso, basta con que el vértice óptimo del DR sea un entero.
5. Verdadero, se debe terminar con ese nodo ya que no entregará mejores soluciones, porque los siguientes valores enteros sabemos que no serán mejores a VR, y por ende no serán mejores a I.
6. Falso, hay que podar ese nodo ya que no dará mejores soluciones hacia abajo, porque los V que vendrán serán peores al VR y por ende no serían mejores a I.
7. Falso, para un "piso" o "nivel" del B&B, hay sólo un VR que entregará una cota al problema, que será el mejor VR de tal nivel.
8. Falso, VR se consigue gracias a un mayor dominio, DR, por lo que sí puede ser menor a Z.

Cada afirmación tiene 3 puntos, luego para cada una la asignación de puntaje será:
3 puntos por acertar a la afirmación y justificarla debidamente.
2 puntos por dar una justificación muy breve.
0 puntos por decir "verdadero" o "falso" pero no justificar.