PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: R. Cuadrado - S. Encina - F. Palomino
J.T. Marquinez - A. Cataldo - J. González

Examen

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) **(10 puntos)** Indique si cada una de estas afirmaciones es Verdadera o Falsa. Justifique claramente su respuesta.

(i) **(2 puntos)** Al resolver un problema de ruta más corta sobre una red con costos c_{ij}, y luego resolverlo sobre la misma red aumentando el costo de todos los arcos en un valor constante igual c, se obtiene exactamente la misma ruta óptima.
Solución: Falso: Un contraejemplo sencillo sería la existencia de 2 caminos desde el inicio al fin, el cual el primero sea directo con un solo arco a costo 10, y el segundo con 10 arcos a costo 0.5 cada uno. Luego al aumentar en una constante, por ejemplo en 1, el costo de cada arco, el camino directo pasaría a ser la ruta mas corta.

(ii) **(2 puntos)** Para escribir el gradiente de la función objetivo como combinación lineal de los gradientes de las restricciones activas en el punto óptimo, es necesario que se cumpla alguna condición de regularidad en el punto.
Solución: Falso: Las existencia de condiciones de regularidad garantiza que se pueda escribir el óptimo como combinación lineal de los gradientes de las restricciones activas, pero no corresponde a una condición necesaria para el punto.

(iii) **(2 puntos)** Para que la solución de un problema de optimización corresponda a un punto interior del dominio, necesariamente todos sus multiplicadores de Lagrange deben ser igual a cero.
Solución: Verdadero: De lo contrario, al corresponder a un punto interior, existiría una dirección factible que fuese una proyección del negativo del gradiente en la cual se pudiera mejorar el valor de la función objetivo.

(iv) **(2 puntos)** En un problema de programación lineal, todos los puntos extremos cumplen con las condiciones de KKT.
Solución: Falso: Los puntos extremos que no corresponden a las soluciones óptimas no cumplen las condiciones de KKT.

(v) **(2 puntos)** Sin importar el valor de P, el siguiente problema siempre posee un máximo mientras que $c_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2c_1 x_1 + 7c_1 x_2 = P \end{aligned}$$

Solución: Verdadero. Demostraremos esto mediante las condiciones de primer y segundo orden. Primero, transformemos el problema como un problema sin restricciones que solo dependa de x_2

$$\begin{aligned} 2c_1x_1 + 7c_1x_2 = P &\Rightarrow x_1 = (P - 7c_1x_2)/2c_1 \\ \text{mín} &\ (Px_2 - 7c_1x_2^2)/2c_1 \\ \Rightarrow \tfrac{df}{dx_2} = &\ P/2c_1 - 14c_1x_2/2c_1 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = &\ \tfrac{P}{14c_1} \\ \Rightarrow \tfrac{df^2}{dx_2} = &\ -7 \end{aligned}$$

Luego para que el problema posea máximo, se requiere que $c_1 \neq 0$

(b) **(3 puntos)** Demuestre que la condición de optimalidad de simplex, donde $\bar{c_r} \geq 0$ son equivalentes a tener las condiciones de KKT $\nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$.

Solución: La forma estándar de simplex es:

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

considerando variables básicas y no básicas, se tiene:

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & c_B^T x_B + c_R^T x_R & \\ \text{s.a.} & Bx_B + Rx_R & = b \\ & x_B, x_R & \geq 0 \end{array}$$

de donde se tiene que: $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$, que reemplazado en el modelo anterior queda:

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & c_B^T \left(B^{-1}b - B^{-1}Rx_R\right) + c_R^T x_R & \\ \text{s.a.} & x_R & \geq 0 \end{array}$$

que se puede reescribir como:

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & c_B^T B^{-1}b + \left(c_R^T - c_B^T B^{-1}R\right) x_R & \\ \text{s.a.} & -x_R & \leq 0 \end{array}$$

y construyendo el Lagrangeano se tiene:

$$\mathcal{L} = c_B^T B^{-1}b + \left(c_R^T - c_B^T B^{-1}R\right) x_R + \lambda \left(-x_R\right)$$

y aplicando condiciones de optimalidad de primer orden, se tiene:

$$\left(c_R^T - c_B^T B^{-1}R\right) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = c_R^T - c_B^T B^{-1}R$$

(c) **(3 puntos)** Considere un problema lineal de la forma

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & c^T x & \\ s.a. & \alpha_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Suponga que se ha resuelto este problema hasta encontrar una solución óptima x^* y una correspondiente solución dual óptima π^*. Suponga que la restricción 1 se cumple con igualdad en el óptimo, es decir, $\alpha_1^T x^* = b_1$. Ahora queremos incrementar la disponibilidad del recurso representado por el lado derecho desde b_1 a $b_1 + \Delta$. Explique con claridad bajo qué condiciones es posible asegurar que el cambio que habrá en el valor óptimo es igual a $\pi_1^* \times \Delta$.

Solución: Las condiciones son que no exista degenerancia y por lo tanto la solución π_1 sea única, y que además el valor Δ esté dentro de los límites de sensibilidad que garantizan la validez de la base.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) **(8 puntos)** Se viene el invierno y, con ello, las subidas de peso. Sin embargo, usted quiere cuidar "la línea" durante este semestre haciendo una dieta especial para así lograr su meta: "un verano sin polera". Investigando en internet se enteró de una dieta en la que se exige la ingesta de al menos 8 unidades de fibra y 4 unidades de proteína al día. Usted, creyendo en esta dieta, ha considerado el consumo de solo los siguientes tres productos: jamón de pavo (x_1), legumbres (x_2) y verduras (x_3). Sin embargo, para hacer rendir su dinero, se planteó el objetivo de que esta meta le salga al menor costo posible, por lo que hizo el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrll} \text{mín} & 10x_1 + 15x_2 + 33x_3 & & \\ \text{s.a.} & x_2 + 3x_3 & \geq 8 & (1) \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \geq 4 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 & \end{array}$$

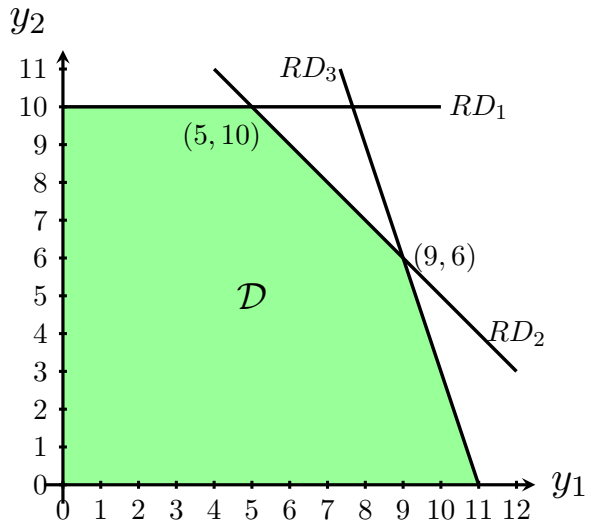
Donde x_i representa las unidades del producto i que según la dieta se deben consumir durante un día cualquiera, la restricción (1) garantiza que la dieta aportará al menos 8 unidades de fibra cada día, y la restricción (2) garantiza que la dieta aportará al menos 4 unidades de fibra cada día.

(i) **(2 puntos)** Grafique el problema dual de (P), al que llamaremos (D) (se sugiere que sea de gran tamaño, pues será usado en (iii)).

Solución: El problema dual es

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & 8y_1 + 4y_2 & \\ \text{s.a.} & y_2 & \leq 10 \\ & y_1 + y_2 & \leq 15 \\ & 3y_1 + y_2 & \leq 33 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Gráficamente queda así:



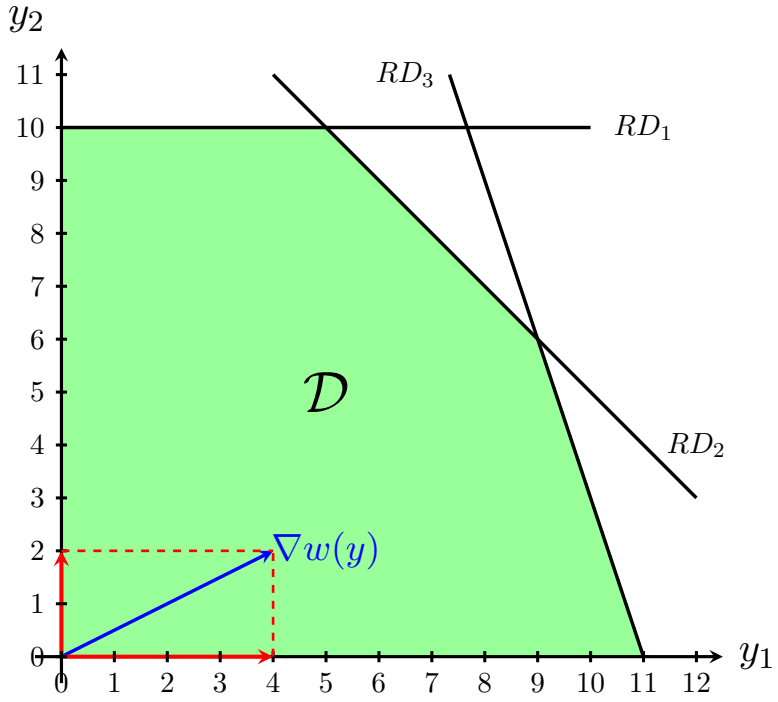
(ii) **(2 puntos)** Interprete el problema dual en palabras, dando un ejemplo de qué podrían significar las variables, las restricciones y la función objetivo.

Solución: Puede ser una persona que le vende batidos listos de fibra y proteína, y que intenta maximizar sus ingresos. Así, y_1 e y_2 corresponden a los precios a los que vende una unidad de batido de fibra y proteína, respectivamente. Las restricciones indican que

a usted le debe ser más conveniente comprar los batidos que los productos respectivos, según cuánto aporta cada uno.

(iii) **(2 puntos)** (Esta pregunta debe **responderla solamente usando el gráfico** construido en (i)) Indique si el punto $(0,0)$ es óptimo para (D). De no serlo, justifique ilustrando en el gráfico qué variable debería entrar a la base al ejecutar el algoritmo Simplex desde ese punto. Ahora bien, en caso que el punto $(0,0)$ sea óptimo, justifique ilustrando en el gráfico el criterio de optimalidad en ese punto e indique la cantidad de productos que debe comprar diariamente para seguir la dieta.

Solución: Se puede apreciar gráficamente que el punto (0,0) no es óptimo, porque ambos movimientos posibles sobre restricciones permitirían lograr curvas de nivel de mayor valor. Así, dado que la proyección que apunta a la derecha es mayor, la variable y_1 es la que entraría a la base.



(iv) **(2 puntos)** Usando ahora **solamente conceptos de dualidad**, indique si el punto $(9,6)$ es óptimo para (D) y, de serlo, indique la cantidad de productos que debe comprar diariamente, el costo asociado y si es óptimo vivir una vida vegetariana.

Solución: Usando Teorema de Holguras Complementarias, como $y_1, y_2 > 0$, entonces ambas restricciones primales deben ser activas. Además, para el punto en análisis, la primera restricción dual se encuentra inactiva, lo que dice que $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a que $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 2, 2)$.

Esta solución es factible primal, y al ser ambas soluciones factibles, se puede asegurar que es solución óptima. Esto significa que, para su dieta, debe comprar 2 unidades de legumbres y 2 unidades de verduras, a costo \$96. Dado que no consume jamón de pavo, sí es óptimo hacer una vida vegetariana.

(b) **(6 puntos)** Una compañía de automóviles quiere producir un nuevo auto en su línea de producción. Este nuevo auto puede producirse en dos modelos: GT y Coupé. Los modelos GT y Coupé le rentarán a la compañía una utilidad de 5 y 4 unidades monetarias, respectivamente. El gerente de marketing sostiene que la demanda total por estos dos modelos es de 5 unidades por día (total por ambos). El gerente de recursos humanos afirma que se cuenta con 45 horas hombre por día para dedicar a esta nueva línea productiva, y se ha estimado que se requieren 10 horas hombre por día para producir una unidad del modelo GT y 6 horas hombre por día para producir una unidad del modelo Coupé.

Basándose en la información anterior,

(i) **(2 puntos)** Formule el modelo de programación entera que debe resolver el gerente de producción para maximizar la utilidad de la empresa.
Solución: El modelo queda:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 5x_1 + 4x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 & \leq 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 & \leq 45 \\ & x_1, x_2 & \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

donde x_1 representa las unidades del modelo GT y x_2 representa las unidades del modelo Coupé, que serán fabricadas. La primera restricción es la que garantiza que no se fabricará más unidades que las que se venden cada día, mientras que la segunda restricción es la que garantiza que no se usarán más horas hombres en la producción que las disponibles. La función objetivo busca maximizar la utilidad de la empresa.

(ii) **(4 puntos)** Usted sabe que la solución óptima de la relajación lineal del problema modelado en (i) es producir 15/4 unidades del modelo GT y 5/4 unidades del modelo Coupé. Basándose en esta información, construya dos Cortes de Gomory.
Solución: La forma estándar del problema queda:

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & -5x_1 - 4x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + z_1 & = 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 + z_2 & = 45 \\ & x_1, x_2 & \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

Dado que $x_1, x_2 \neq 0$, implica que tendremos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/4 \\ 5/2 & -1/4 \end{bmatrix} = \bar{R}$$

Generando con esto los siguiente cortes:

$$\left(\frac{-3}{2} - (-2)\right) z_1 + \left(\frac{1}{4} - 0\right) z_2 \geq \left(\frac{15}{4} - 3\right)$$
$$\left(\frac{5}{2} - \frac{4}{2}\right) z_1 + \left(\frac{-1}{4} - (-1)\right) z_2 \geq \left(\frac{5}{4} - 1\right)$$

Y dado que

$$z_1 = 5 - x_1 - x_2$$
$$z_2 = 45 - 10x_1 - 6x_2$$

Los Cortes de Gomory con las variables del sistema quedarán de la siguiente manera:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$8x_1 + 5x_2 \leq 36$$

Pregunta 3 (14 puntos)

(a) **(8 puntos)** La Universidad debe planificar el requerimiento de papel para el próximo semestre en cada uno de los 4 campus ubicados en Santiago. En las condiciones actuales, usted sabe que al campus Lo Contador le sobraron 8 toneladas de papel, en Casa Central se requieren 4 toneladas de papel, en Campus Oriente se requieren 6 toneladas de papel y en San Joaquín, se requiere 16 toneladas de papel. Por lo tanto, se quiere distribuir el papel del campus Lo Contador en los otros tres campus de manera de satisfacer la demanda. Sin embargo, como no es suficiente el excedente de Lo Contador, la Universidad pedirá a una fábrica el resto del papel.

En las siguientes tablas se muestran las distintas rutas que existen desde la fábrica hacia los campus, y entre los campus, detallando el costo por tonelada transportada.

Ruta	M$/ton
Fábrica → Casa Central	9
Fábrica → Lo Contador	13
Fábrica → Campus Oriente	10

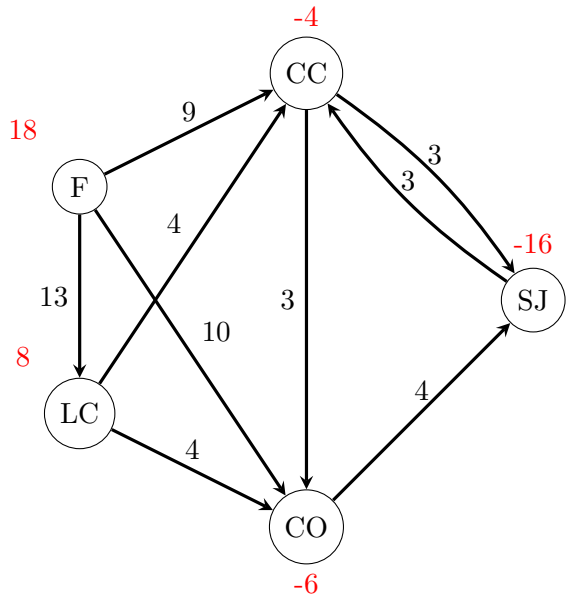
Ruta	M$/ton
Lo Contador → Casa Central	4
Lo Contador → Campus Oriente	4
Casa Central → Campus Oriente	3
Casa Central → San Joaquín	3
Campus Oriente → San Joaquín	4
San Joaquín → Casa Central	3

Actualmente, se tiene planificado que se ocupen las rutas de la Fábrica hacia Casa Central, de Lo Contador hacia Campus Oriente, de Casa Central a San Joaquín y de Lo Contador a San Joaquín.

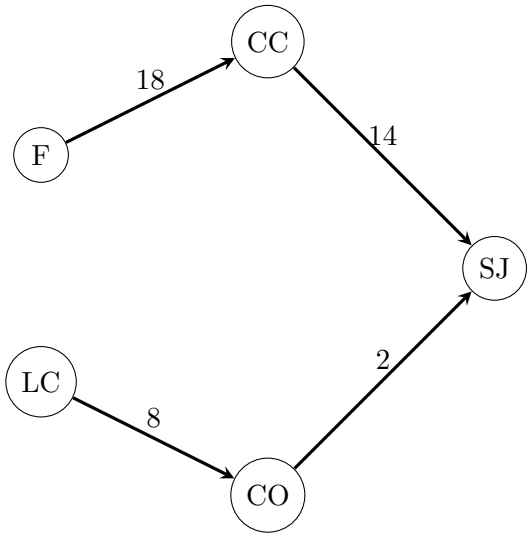
Como saben que usted está haciendo el curso de Optimización, le piden ayuda para responder las siguientes preguntas.

(i) **(3 puntos)** ¿Cómo transportar el papel de modo de satisfacer la demanda a mínimo costo? Justifique su respuesta utilizando un algoritmo adecuado para ello.

Solución: El problema puede ser modelado mediante la siguiente red:



Sobre los arcos se muestra el costo unitario, mientras que sobre cada nodo se muestra en rojo la oferta asociada (demanda si es negativo). Se resuelve este problema mediante simplex especializado en redes. La base inicial es:



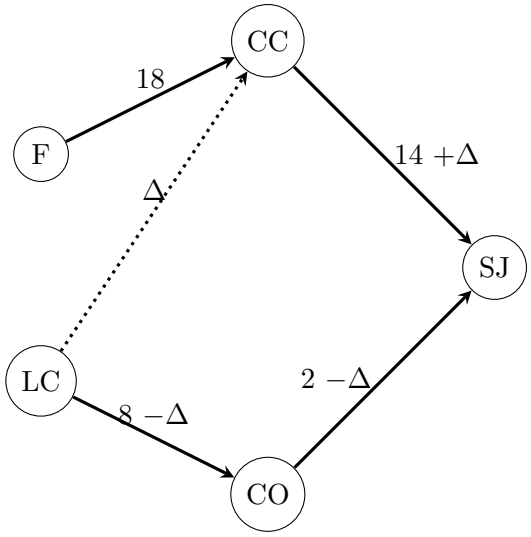
Por lo tanto, comprobamos si estamos en el óptimo. Para esto, usamos los costos reducidos para calcular π:

$$\bar{c}_{F,CC} = c_{F,CC} - \pi_F + \pi_{CC} = 0$$
$$\bar{c}_{CC,SJ} = c_{CC,SJ} - \pi_{CC} + \pi_{SJ} = 0$$
$$\bar{c}_{LC,CO} = c_{LC,CO} - \pi_{LC} + \pi_{CO} = 0$$
$$\bar{c}_{CO,SJ} = c_{CO,SJ} - \pi_{CO} + \pi_{SJ} = 0$$

Haciendo $\pi_{CC} = 0$, obtenemos $\pi_F = 9, \pi_{LC} = 5, \pi_{CO} = 1, \pi_{SJ} = -3$. Con esto, vemos los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{F,LC} = c_{F,LC} - \pi_F + \pi_{LC} = 9 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{F,CO} = c_{F,CO} - \pi_F + \pi_{CO} = 2 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{LC,CC} = c_{LC,CC} - \pi_{LC} + \pi_{CC} = -1 \not\geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{CC,CO} = c_{CC,CO} - \pi_{CC} + \pi_{CO} = 4 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{SJ,CC} = c_{SJ,CC} - \pi_{SJ} + \pi_{CC} = 6 \geq 0 \quad (l)$$

Por lo tanto, no estamos en el óptimo. El arco (LC, CC) ingresa a la base. Para ver cuál arco sale, vemos el siguiente ciclo:



Así, el arco (CO, SJ) sale de la base. Tenemos que ver si la nueva base es óptima.

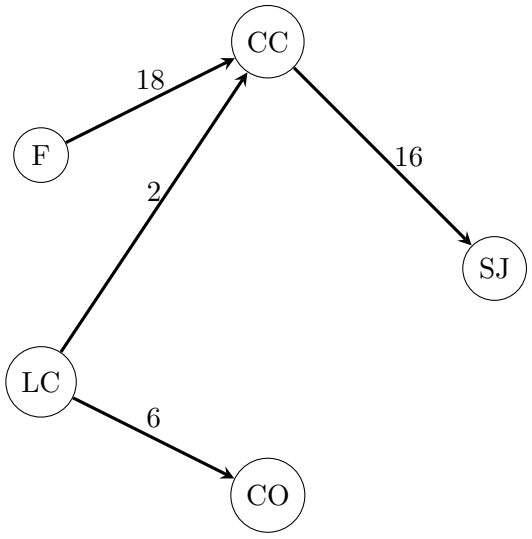
Calculamos el vector π:

$$\bar{c}_{F,CC} = c_{F,CC} - \pi_F + \pi_{CC} = 0$$
$$\bar{c}_{CC,SJ} = c_{CC,SJ} - \pi_{CC} + \pi_{SJ} = 0$$
$$\bar{c}_{LC,CO} = c_{LC,CO} - \pi_{LC} + \pi_{CO} = 0$$
$$\bar{c}_{LC,CC} = c_{CO,SJ} - \pi_{CO} + \pi_{SJ} = 0$$

Haciendo $\pi_{CC} = 0$, obtenemos $\pi_F = 9, \pi_{LC} = 4, \pi_{CO} = 0, \pi_{SJ} = -3$. Con esto, vemos los arcos no básicos:

$$\bar{c}_{F,LC} = c_{F,LC} - \pi_F + \pi_{LC} = 8 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{F,CO} = c_{F,CO} - \pi_F + \pi_{CO} = 1 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{CC,CO} = c_{CC,CO} - \pi_{CC} + \pi_{CO} = 3 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{SJ,CC} = c_{SJ,CC} - \pi_{SJ} + \pi_{CC} = 6 \geq 0 \quad (l)$$
$$\bar{c}_{CO,SJ} = c_{CO,SJ} - \pi_{CO} + \pi_{SJ} = 1 \geq 0 \quad (l)$$

Como todos los costos reducidos son positivos, llegamos a la solución óptima, única. Se muestra en el siguiente grafo:

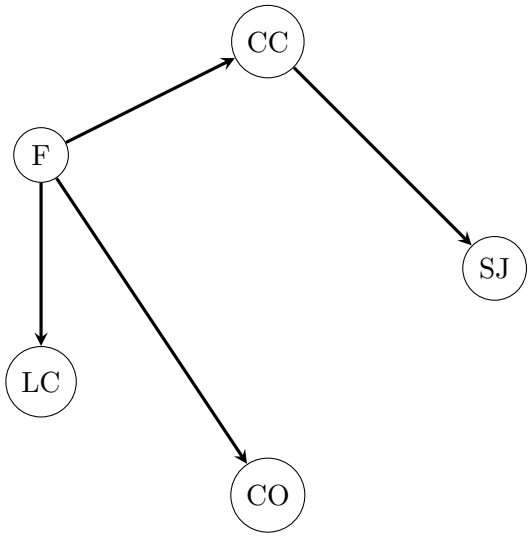


(ii) **(2 puntos)** ¿Cuál es la ruta óptima desde la fábrica hacia el resto de los campus? Justifique su respuesta utilizando un algoritmo adecuado para ello.

Solución: Se muestra la tabla de resolución de Dijkstra (se puede resolver iterativamente en el grafo también), en que • indica que ese nodo entra al conjunto de los nodos visitados:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
F	$(0,-)$•	-	-	-	-
LC	$(\infty,-)$	(13,F)	(13,F)	(13,F)	(13,F)•
CC	$(\infty,-)$	(9,F) •	-	-	-
CO	$(\infty,-)$	(10,F)	(10,F)•	-	-
SJ	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	(12,CC)	(12,CC)•	

El árbol de rutas mínimas en este caso es:



(iii) **(3 puntos)** ¿Cómo se compara el árbol de rutas óptimas de las partes (a) y (b)? Si tuviera que cambiar un parámetro del problema para que fueran iguales, ¿cuál sería ese parámetro? Justifique sus respuestas.

Solución: Vemos que ambos árboles comparten dos arcos (F $\rightarrow$ CC, CC $\rightarrow$ SJ), los cuales representan gran parte de la demanda que se está satisfaciendo desde la fábrica. Sin embargo, los otros dos arcos son distintos. Esta diferencia se produce porque en el problema de flujo a costo mínimo se utilizan dos nodos con ofertas, no uno como asume el algoritmo de Dijkstra.

Si cambiamos la oferta del nodo Lo Contador ($b_{LC} = 8$) y la transformamos en demanda ($b_{LC} < 0$) (y por ende aumentamos la oferta del nodo Fábrica), entonces solo habría un punto de oferta (la Fábrica). En ese caso, las soluciones coincidirían.

Pregunta 4 (16 puntos)

En la ciudad de Pitrufquén se ha abierto la inscripción de estudiantes para un nuevo colegio privado. Cerradas las inscripciones, se ha recibido la postulación de K estudiantes, los que han postulado a alguno de los N niveles educacionales que imparten en el colegio. Es así como en el parámetro binario R_{kn} se registra con un 1 si el estudiante k, con $k = 1, \ldots, K$ ha sido inscrito en el nivel educacional n, con $n \in 1, \ldots, N$.

La administración del colegio asignará a cada uno de los estudiantes inscritos a un único grupo, y estos grupos los compondrá de la siguiente manera. Cada grupo estará compuesto solo por estudiantes del mismo nivel; cada grupo será asignado a una única sala de clases todo el año escolar (entonces, esa sala de clases será usada solo por ese grupo durante todo el año escolar); y ningún grupo estará conformado por menos de α estudiantes. Sobre las salas de clases, el colegio cuenta con un conjunto S de salas de clases, y se sabe que la sala de clases s, para todo $s \in S$, puede recibir un grupo de a lo más Q_s estudiantes.

Sobre los ingresos y costos para este nuevo colegio: el colegio cobrará una matricula anual de P_n unidades monetarias a cada estudiante inscrito en el nivel n ($n = 1, \ldots, N$), hará un descuento de δ unidades monetarias a cada estudiante asignado a un grupo con más de W estudiantes (contándolo a él), y pagará β unidades monetarias por cada sala utilizada durante el año (costo de mantención y otros).

Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal –entera o mixta– que permita a la administración del colegio conformar los grupos de estudiantes de manera de maximizar el ingreso anual.

Solución: Esta toda la información en el enunciado para modelar lo solicitado, solamente falta que de los datos se considere el siguiente parámetro:

- $\diamond$ $[G :]$ cantidad de grupos que se pueden formar. Para esto, basta con ver que el mínimo de estudiantes por grupo es de α, por lo que la cantidad máxima de grupos posible $\lceil \frac{K}{\alpha} \rceil$ que definimos con G.

Variables:

x_{kn}^{gs} : $\begin{cases} 1, \text{ si el estudiante } k \text{ que es de nivel } n \text{ es asignado al grupo } g \text{ en la sala } s \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

y^{gs} : $\begin{cases} 1, \text{ si el grupo } g \text{ es asignado a la sala } s \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

w_{kn}^{gs} : $\begin{cases} 1, \text{ si el estudiante } k \text{ que es de nivel } n \text{ asignado al grupo } g \text{ en la sala } s \text{ tiene descuento} \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

Función objetivo: minimizar la cantidad total de días en que se juega

$$\max \sum_{n=1}^{N} \left(P_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{g=1}^{G} \sum_{s \in S} x_{kn}^{gs} \right) - \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \sum_{g=1}^{G} \sum_{s \in S} \delta w_{kn}^{gs} - \sum_{s \in S} \beta \left(\sum_{g=1}^{G} y^{gs} \right)$$

Restricciones:

R1) Cada estudiante es asignado exactamente a un grupo.

$$\sum_{s \in S} \sum_{g=1}^{G} x_{kn}^{gs} = 1 \quad \forall k = 1 \ldots, K; n = 1, \ldots, N : R_{kn} = 1.$$

R2) Cada grupo "creado" cabe en la sala que se le asigna.

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} x_{kn}^{gs} \leq Q_s y^{gs} \quad \forall g = 1, \ldots, G; s \in S.$$

R3) Cada sala es asignada a lo más a un grupo.

$$\sum_{g=1}^{G} y^{gs} \leq 1 \quad \forall s \in S.$$

R4) Cada grupo es asignado exactamente a una sala.

$$\sum_{s \in S} y^{gs} = 1 \quad \forall g = 1 \ldots, G.$$

R5) Garantizar que todos los grupos tienen estudiantes del mismo nivel.

$$x_{kn}^{gs} \leq 1 - x_{lm}^{gs} \quad \forall k, l = 1, \ldots, K : k \neq l; n, m = 1, \ldots, N : n \neq m; g = 1 \ldots, G; s \in S.$$

R6) Cantidad mínima de estudiantes en cada grupo formado.

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} x_{kn}^{gs} \geq \alpha y^{gs} \quad \forall g = 1 \ldots, G; s \in S.$$

R7) Relacionar variable w_{kn}^{gs} con variables x_{kn}^{gs}.

$$w_{kn}^{gs} \geq \frac{\left(\sum_{l=1}^{K}\sum_{m=1}^{N} x_{lm}^{gs} - W\right)}{M} \quad \forall k = 1,\ldots,K; n = 1,\ldots,N; g = 1\ldots,G; s \in S.$$

con $M \ggg 0$.

R8) Naturaleza variables.

$$\begin{array}{rll} x_{kn}^{gs} & \in \{0,1\} & \forall k = 1,\ldots,K; n = 1,\ldots,N; g = 1\ldots,G; s \in S. \\ y^{gs} & \in \{0,1\} & \forall g = 1\ldots,G; s \in S. \\ w_{kn}^{gs} & \in \{0,1\} & \forall k = 1,\ldots,K; n = 1,\ldots,N; g = 1\ldots,G; s \in S. \end{array}$$