Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingenieria Industrial y de Sistemas
ICS1113 - Optimización
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Matías Villafranca.
Ayudante coordinador de tareas: Benjamín Rojas.

Tarea 2 ICS1113 - 2do semestre 2025

Reglas:

1. El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la evaluación presencial posterior.

2. Si la entrega es en pareja, entonces solo un integrante debe subir la tarea en Canvas hasta el 21 /10/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.

3. No se asignará puntaje fraccionario en cada pregunta.

4. El formato de entrega es un archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de sus integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. Como archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto LaTeX o código de gurobi si corresponde. Se bonificará con 3 décimas en esta tarea a quienes utilicen LaTeX (y entreguen el .tex que lo verifique).

5. Se habilitará un foro en Canvas en donde se responderán dudas del enunciado.

Pregunta 1 [6 puntos]

Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de que sea verdadera, demuéstrelo. En caso de que sea falsa, refútelo con un contraejemplo.

1. **[1 punto]** Si P es un polítopo no vacío y $f(x)$ es estrictamente convexa, entonces $\min_{x \in P} f(x)$ alcanza su valor óptimo en un vértice de P.
2. **[1 punto]** Si P es un polítopo no vacío y $f(x)$ es estrictamente convexa, entonces $\max_{x \in P} f(x)$ alcanza su valor óptimo en un vértice de P.
3. **[1 punto]** Si $P^1, P^2, \ldots, P^k \subseteq \mathbb{R}^n$ son poliedros no vacíos, entonces $P = \bigcup_{i=1}^{k} P^i$ también es un poliedro.
4. **[1 punto]** Si $P^1, P^2, \ldots, P^k \subseteq \mathbb{R}^n$ son poliedros no vacíos, entonces $P = \bigcap_{i=1}^{k} P^i$ también es un poliedro.
5. **[1 punto]** Sea $P \subseteq \mathbb{Z}^n$ no unitario y no vacío. P no es un poliedro.
6. **[1 punto]** Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$, entonces el problema $\min\{c^\top x : Ax \leq b\}$ tiene a lo más n vértices óptimos.

Solución:

1. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Falsa. Un contraejemplo válido es $P = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ y $f(x) = (x - 0.5)^2$. Claramente, $\arg\min_{x \in P} f(x) = \{0.5\}$.
2. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Verdadera. Demostrémoslo por contradicción. Sea $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ el conjunto de los vértices de P. Supongamos que existe $x^\star \in P$ tal que $x^\star \notin V$ y que
$$f(x^\star) \geq f(x) \quad \forall x \in P.$$
Por representación de soluciones factibles en P, $x^\star$ se puede escribir como una combinación lineal convexa no trivial de los vértices. Es decir, existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^V_+$ tal que $\sum_{i \in V} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ para al menos dos elementos $i \in V$, y
$$x^\star = \sum_{i \in V} \lambda_i v_i.$$
Además, por convexidad estricta de $f(x)$, tenemos que
$$\sum_{i \in V} \lambda_i f(v_i) > f\left(\sum_{i \in V} \lambda_i v_i\right)$$
Juntando ambos argumentos, obtenemos
$$\max_{i \in V} f(v_i) \geq \sum_{i \in V} \lambda_i f(v_i) > f\left(\sum_{i \in V} \lambda_i v_i\right) = f(x^\star).$$

Lo cual genera una contradicción con nuestra suposición inicial. Luego, si $f(x)$ es estrictamente convexa, entonces $\max_{x \in P} f(x)$ al canza su valor óptimo solamente en vértices de P.

3. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Falsa. Un contraejemplo válido es $P^1 = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$ y $P^2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\} = [2,3]$. Luego, $P = P^1 \cup P^2 = [0,1] \cup [2,3]$. Ahora podemos tomar $x^1 = 1 \in P$ y $x^2 = 2 \in P$ y notar que para todo $\lambda \in (0,1)$ se cumple que $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \notin P$.

4. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Verdadera. Para todo $i = 1, 2, \ldots k$, P^i es un poliedro, por lo cual lo podemos escribir como $P^i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i\}$. Luego, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \leq b^1, A^2 x \leq b^2, \ldots, A^k x \leq b^k\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ también es un poliedro.

5. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Verdadera. Una manera fácil de demostrarlo es notando que todo poliedro es necesariamente convexo y que $P \subseteq \mathbb{Z}^n$ no es convexo.

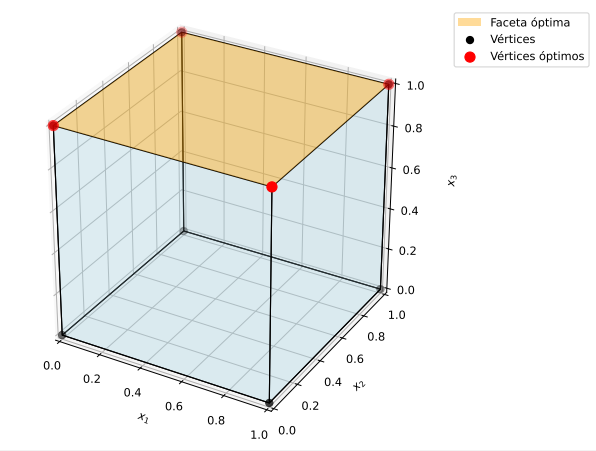
   Consideremos un poliedro $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ y seleccionemos dos puntos $x^1, x^2 \in Q$. Esto implica que $Ax^1 \leq b$ y $Ax^2 \leq b$. Ahora, Q es convexo si para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in Q$, lo cual es equivalente a $A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq b$. Como $\lambda \in [0,1]$, entonces $Ax^1 \leq b$ implica $A\lambda x^1 \leq \lambda b$ y $Ax^2 \leq b$ implica $A(1-\lambda)x^2 \leq (1-\lambda)b^2$. Luego, se desprende que $A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq b$. Demostramos que todo poliedro es convexo.

   Consideremos ahora $P \subseteq \mathbb{Z}^n$. Nos basta con encontrar algún P que no sea convexo para asegurar que P no es convexo en general. Consideremos $P = \{0,1\}$ y tomemos $x^1 = 0$, $x^2 = 1$. Con $\lambda = 1/2$, $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = 1/2 \notin P$. Demostramos que P no es convexo en general.

   Finalmente, como P no es convexo y todo poliedro es necesariamente convexo, entonces P no puede ser un poliedro.

   Otra forma de demostrarlo es argumentando formalmente y en detalle que $P \subseteq \mathbb{Z}^n$ no se puede escribir como $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

6. [1 punto si está completamente correcta, 0 puntos en caso contrario] Falso. Esto es cierto solo para $n \in \{1,2\}$. En $n \geq 3$ podemos generar una cara con $o > n$ vértices, tal que todos sus vértices sean óptimos. Un ejemplo sencillo es $\max\{x_3 : 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i \in \{1,2,3\}\}$. La región factible es el cubo unitario y los vértices $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$ son óptimos. De hecho, toda la faceta $\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i \in \{1,2,3\}\} \cap \{x_3 : x_3 = 1\}$ es óptima. Esto queda más claro en el siguiente gráfico



Pregunta 2 [6 puntos]

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 2x_2 && \text{(1a)}\\
\text{s.a.} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24, && \text{(1b)}\\
& 2x_1 - x_2 \leq 1, && \text{(1c)}\\
& x_1 + 2x_2 \geq 3, && \text{(1d)}\\
& x \geq 0. && \text{(1e)}
\end{aligned}$$

1. **[2 puntos]** Resuelva el problema por medio de fuerza bruta. Para esto, adjunte un gráfico sobre el plano cartesiano (x_1, x_2) que ilustre la región factible del modelo. Luego, reporte una tabla con todos los vértices de la región factible y sus valores objetivo (la tabla debe estar en LaTeX para adjudicarse las décimas extras). Dibuje la isocuanta óptima sobre su gráfico y responda lo siguiente:

   (a) ¿El conjunto de soluciones óptimas es unitario o múltiple? Entregue un argumento en base al gráfico y un argumento algebraico.

   (b) Si agrega la restricción $5x_1 - x_2 \leq 13$, ¿Cambia el valor óptimo?, ¿Cambia el conjunto de soluciones óptimas? Entregue un argumento en base al gráfico (sugerencia: adjunte un nuevo gráfico con la nueva restricción) y un argumento algebraico.

2. **[2 puntos]** Resuelva el problema por medio del método simplex. Para esto, siga de manera ordenada las siguientes indicaciones:

   (a) Escriba el modelo equivalente en forma estándar que tendría que resolver en la fase 2 del algoritmo simplex.

   (b) Considere la solución inicial factible $x = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ del problema original y resuelva la fase 2 del algoritmo simplex. Detalle su procedimiento. En cada iteración, muestre qué valores toman cada una de las variables originales y holguras (o excesos) de cada una de las restricciones originales.

   (c) Localize gráficamente cada vértice recorrido por el algoritmo simplex en el plano (x_1, x_2).

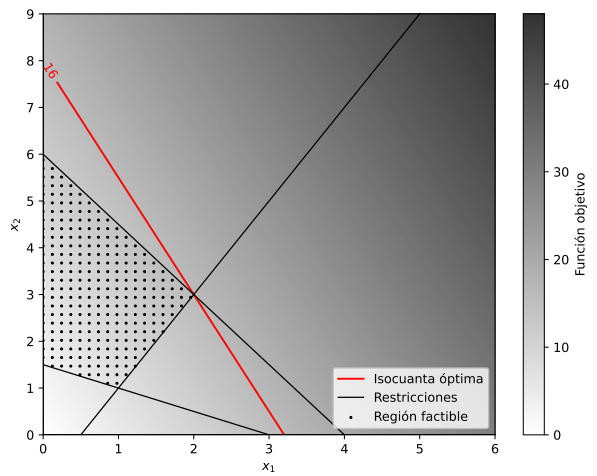
3. **[2 puntos]** Usted puede escribir un modelo equivalente a (1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\min \quad & -5x_1 - 2x_2 + r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + r_4 x_4 + r_5 x_5 && \text{(2a)}\\
\text{s.a.} \quad & \alpha_{11} x_1 + x_2 + \alpha_{13} x_3 = 6, && \text{(2b)}\\
& \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + x_4 = 7, && \text{(2c)}\\
& \alpha_{31} x_1 + \alpha_{33} x_3 + x_5 = 9, && \text{(2d)}\\
& x \geq 0, && \text{(2e)}
\end{aligned}$$

   ¿Qué valores tienen r y α?

Solución:

1. [2 puntos si está todo perfecto, 1 punto si hay algún error menor, 0 puntos si hay errores mayores.] El gráfico se muestra a continuación



Los vértices y sus valores son

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	6	12
2	**3**	**16**
1	1	7
0	3/2	3

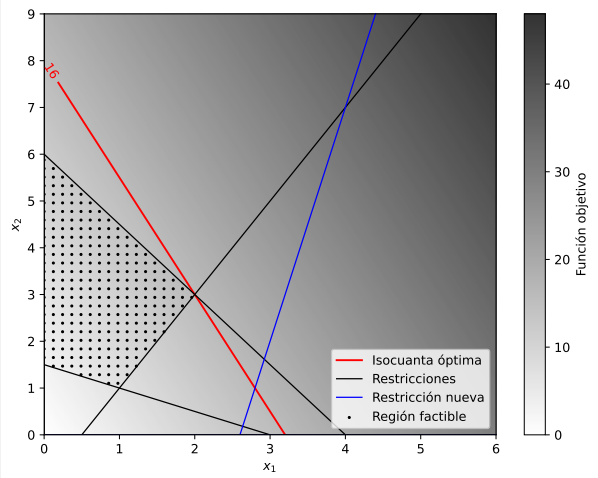
El óptimo es $f(x^\star) = 16$ con $x^\star = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.

A continuación se responde a las preguntas:

(a) En base al gráfico: la isocuanta óptima no es paralela a ninguna restricción, luego la solución óptima es única.

Algebraicamente: La misma idea. La función objetivo es $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$, y las restricciones activas en el óptimo son $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ y $2x_1 - x_2 \leq 1$. Claramente, no existe un $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, ni un $\beta \in \mathbb{R}_+$ tal que $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Más generalmente, solo existe un único vértice que está contenido en el cono generado por el gradiente de las restricciones activas.

(b) Gráficamente:



La solución claramente no cambia.

Algebraicamente: La restricción nueva es linealmente dependiente de las restricciones originales del problema. Dado

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 24 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_4 = 13,$$

podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lambda^\top A = a_4$$

y

$$\lambda^\top b = b_4.$$

En particular, $\lambda^\top = \begin{pmatrix} 9/14 & 41/35 & -6/5 \end{pmatrix}$ es válido, es decir, nuestra nueva restricción es linealmente dependiente de las restricciones activas del problema original. Luego, el vértice óptimo es degenerado.

2. [2 puntos si está todo perfecto, 1 punto si hay algún error menor, 0 puntos si hay errores mayores.] Se resuelve con simplex como sigue

   (a) El modelo de la fase 2 es

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - 2x_2 = f(x) \\ \text{s.a.} \quad & 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ & 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 = 3, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   Las variables x_3 y x_4 son de holgura, la variable x_5 es de exceso.

   (b) Como $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \end{pmatrix}$, inicializaremos fase 2 con $x = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 18 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Iteración 1.

   $B = \{x_3, x_4, x_2\}$, $D = \{x_1, x_5\}$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ c_D = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix},\ \bar{A}_D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},\ r_D^\top = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix},$$

En este caso $x = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 18 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$ (la solución con la cual inicializamos), y la función objetivo es $f(x) = -5x_1 - 2x_2 = -3$.

En la siguiente iteración entra x_1 y sale $\arg\min \left\{ \frac{18}{4}, \frac{5/2}{5/2}, \frac{3/2}{1/2} \right\} = \arg\min \{6, 1, 3\} = x_4$

Iteración 2.

$B = \{x_3, x_1, x_2\}$, $D = \{x_4, x_5\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix},\ c_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/5 & -14/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{A}_D = \begin{pmatrix} -8/5 & 14/5 \\ 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix},\ r_D^\top = \begin{pmatrix} 8/5 & -9/5 \end{pmatrix},$$

obtenemos $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $f(x) = -7$.

Entra x_5 a la base y sale $\arg\min \left\{ \frac{14}{14/5}, \cdot, \cdot \right\} = x_3$.

Iteración 3.

$B = \{x_5, x_1, x_2\}$, $D = \{x_4, x_3\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix},\ c_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

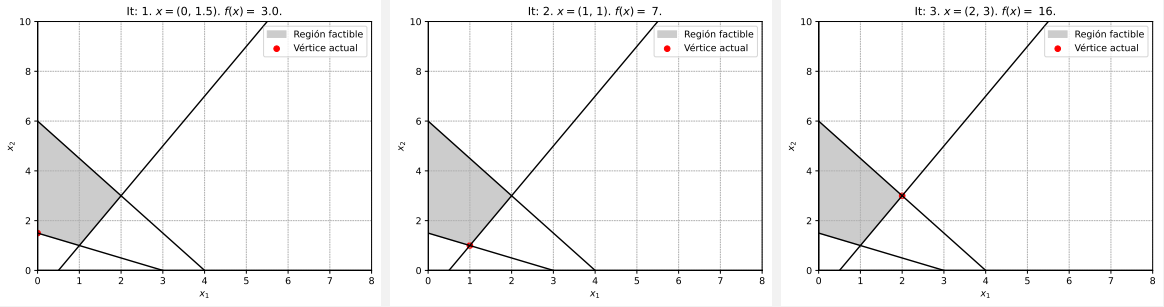
Ahora calculamos

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/14 & -8/14 & -1 \\ 1/14 & 4/14 & 0 \\ 2/14 & -6/14 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{A}_D = \begin{pmatrix} -8/14 & 5/14 \\ 4/14 & 1/14 \\ -6/14 & 2/14 \end{pmatrix},\ r_D^\top = \begin{pmatrix} 4/7 & 9/14 \end{pmatrix},$$

nuestras variables son $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $f(x) = -16$.

Como $r_D^\top > 0$, estamos en el vértice óptimo y es único.

(c) La secuencia de gráficos se muestra a continuación



3. [2 puntos si está todo perfecto, 1 punto si hay algún error menor, 0 puntos si hay errores mayores.]

El modelo (3) claramente nos sugiere usar $B = \{x_2, x_4, x_5\}$ y $D = \{x_1, x_3\}$. Además, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ es justamente el vértice que no visitamos usando simplex en el punto anterior.

Del problema original, obtenemos:

$A_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_D = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Del problema nuevo, tenemos:

$\bar{A}_D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, que es nuestra incógnita. Luego, calculamos

$\bar{A}_D = A_B^{-1} A_D = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/4 \\ 7/2 & 1/4 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$r_D^\top = c_D^\top - c_B^\top \bar{A}_D = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Con esto, llegamos a

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - 2x_2 - 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a.} \quad & \frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6, \\ & \frac{7}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 7, \\ & 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_5 = 9, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Pregunta 3 [6 puntos]

La P2 de la I1 de este año era la siguiente:

> Se le solicita ayuda para planificar decisiones de contratación de personal para un callcenter que funciona los 7 días de una semana representativa. En cada día $d \in \{1, \ldots, 7\}$, el trabajo se organiza en un sistema compuesto por tres turnos $t \in \{1, \ldots, 3\}$. Cada turno t establece una jornada de δ_t horas de trabajo y en el día d debe ser cubierto por al menos $q_{d,t}$ personas.
>
> La ley laboral establece que nadie puede trabajar más de un turno diario ni más de 6 días a la semana. A su vez, se ha acordado que nadie puede trabajar el turno $t = 3$ el día inmediatamente anterior al día que trabaja el turno $t = 2$. Asuma un esquema cíclico de trabajo, es decir, después del domingo comienza el lunes de la semana representativa.
>
> Suponga que usted dispone de N personas que podría contratar. Usted debe escoger cuántas de estas personas contratar y asignarle a cada una un esquema de turnos semanales, pero sujeto a las condiciones del tipo de contrato laboral que usted elija. Para ello, existen C diferentes tipos de contrato disponibles en el departamento legal de la empresa. Específicamente, el contrato tipo $c \in \{1, \ldots, C\}$ establece un pago fijo de α_c por las primeras B_c horas semanales trabajadas más un pago variable de β por cada hora extra trabajada sobre este límite, las cuales no pueden superar el 20% de B_c.
>
> Formule un modelo de programación lineal con variables mixtas que le ayude a planificar decisiones de contratación de personal requerido para cubrir sus requerimientos de trabajo a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos exigidos.

Se propone el siguiente modelo:

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{c=1}^{C} \alpha_c h^{\mathrm{B}}_{ic} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{c=1}^{C} \beta h^{\mathrm{E}}_{ic} \tag{3a}$$

s.a.

$$h^{\mathrm{B}}_{ic} = B_c x_{ic} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, c \in \{1, \ldots, C\}, \tag{3b}$$

$$h^{\mathrm{E}}_{ic} \leq 20\% \cdot B_c x_{ic} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, c \in \{1, \ldots, C\}, \tag{3c}$$

$$h^{\mathrm{B}}_{ic} + h^{\mathrm{E}}_{ic} \geq \sum_{d=1}^{7} \sum_{t=1}^{3} \delta_t z_{idtc} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, c \in \{1, \ldots, C\}, \tag{3d}$$

$$\sum_{c=1}^{C} x_{ic} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3e}$$

$$y_{idt} \leq \sum_{c=1}^{C} x_{ic} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, d \in \{1, \ldots, 7\}, t \in \{1, \ldots, 3\}, \tag{3f}$$

$$\sum_{t=1}^{3} y_{idt} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, d \in \{1, \ldots, 7\}, \tag{3g}$$

$$\sum_{d=1}^{7} \sum_{t=1}^{3} y_{idt} \leq 6 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3h}$$

$$y_{i,d-1,3} \leq 1 - y_{id2} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, d \in \{2, \ldots, 7\}, \tag{3i}$$

$$y_{i73} \leq 1 - y_{i12} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3j}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_{idt} \geq q_{dt} \quad \forall d \in \{1, \ldots, 7\}, t \in \{1, \ldots, 3\}, \tag{3k}$$

$$z_{idtc} \geq y_{idt} + x_{ic} - 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, d \in \{1, \ldots, 7\}, t \in \{1, \ldots, 3\}, c \in \{1, \ldots, C\}, \tag{3l}$$

$$x \in \{0, 1\}^{N \times C}, \tag{3m}$$

$$y \in \{0, 1\}^{N \times 7 \times 3}, \tag{3n}$$

$$z \in \{0, 1\}^{N \times 7 \times 3 \times C}, \tag{3o}$$

$$h^{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}_{+}^{N \times C}, \tag{3p}$$

$$h^{\mathrm{E}} \in \mathbb{R}_{+}^{N \times C}. \tag{3q}$$

Responda o realice lo siguiente, según corresponda:

1. **[2 puntos]** Indique claramente qué significa cada una de las variables de decisión, función objetivo y restricciones del modelo anterior.
2. **[4 puntos]** Programe el modelo en python/gurobi y use su implementación para resolver la instancia que se entrega en el archivo `P3.ipynb`. En su informe, entregue un resumen de la solución obtenida que incluya por lo menos la siguiente información:
   (a) El costo óptimo del problema.
   (b) Cantidad total de personal contratado y el desglose de personal contratado según tipo de contrato.
   (c) Cantidad total de horas base y extra contratadas.
   (d) La cantidad de personal contratado para cada par turno-día.
   (e) Los turnos de trabajo de la persona indexada como 6.
   (f) Los turnos de trabajo de la persona indexada como 90.

Solución.

1. [2 puntos si está todo perfecto, 1 punto si hay algún error menor en alguna variable, función objetivo o restricción, 0 puntos si hay errores mayores.] Las variables son las siguientes:

   h_{ic}^{B}: horas base que realiza la persona $i \in \{1, \ldots, N\}$ bajo el contrato $c \in \{1, \ldots, C\}$

   h_{ic}^{E}: horas extra que realiza la persona $i \in \{1, \ldots, N\}$ bajo el contrato $c \in \{1, \ldots, C\}$

   $x_{ic} \in \{0, 1\}$: $x_{ic} = 1$ si la persona $i \in \{1, \ldots, N\}$ se encontrará bajo el contrato $c \in \{1, \ldots, C\}$, $x_{ic} = 0$ en caso contrario.

   $y_{idt} \in \{0, 1\}$: $y_{idt} = 1$ si la persona $i \in \{1, \ldots, N\}$ trabajará el día $d \in \{1, \ldots, 7\}$ durante el turno $t\{1, \ldots, 3\}$, $y_{idt} = 0$ en caso contrario.

   $z_{idtc} \in \{0, 1\}$: $z_{idtc} = 1$ si la persona $i \in \{1, \ldots, N\}$ se encontrará bajo el contrato $c \in \{1, \ldots, C\}$ y además trabajará el día $d \in \{1, \ldots, 7\}$ durante el turno $t\{1, \ldots, 3\}$, $z_{idtc} = 0$ en caso contrario.

   La función objetivo (3a) minimiza el costo total de las horas contratadas. Las restricciones (3b) definen que las horas base que realizará la persona i serán 0 si no se contrata y serán B_c en caso de que se encuentre bajo el contrato c. Las restricciones (3c) indican que la cantidad de horas extra que realizará la persona i bajo el contrato c no pueden ser más que el 20% de B_c, en caso de que se contrate. Si no se contrata, serán 0. Las restricciones (3d) determinan que la suma de horas base y extra que trabaja la persona i bajo el contrato c sea lo suficiente para cubrir todos

los turnos que realiza. Las restricciones (3e) aseguran que cada persona puede tener a lo más un tipo de contrato. Las restricciones (3f) garantizan que una persona puede tomar turnos solo si está contratada. Las restricciones (3g) imponen que una persona solo puede trabajar un turno por día. Las restricciones (3h) establecen que una persona trabaje a lo más 6 días a la semana. Las restricciones (3i) y (3j) fuerzan a que si una persona toma el turno $t = 2$ en un día dado, entonces no puede haber tomado el turno $t = 3$ el día inmediatamente anterior. Las restricciones (3k) obligan a que el número de personas que trabajan el turno t del día d sea lo suficiente para cubrir el requerimiento de personal q_{dt}. Las restricciones (3l) relacionan las variables x, y y z. Se puede interpretar que estas restricciones se encargan de que la persona i trabajará el día d durante el turno t y bajo el contrato c solo si (i) trabaja el día d durante el turno t y (ii) está bajo contrato c. Las restricciones (3m)–(3q) establecen la naturaleza de las variables de decisión.

2. [4 puntos si está todo perfecto, 3 puntos si hay errores menores en el informe, 2 puntos si hay errores menores en la implementación, 1 punto si hay errores mayores en el informe, 0 puntos si hay errores mayores en la implementación.] Ver adjuntos con la implementación. El resumen de la respuesta es la siguiente

   (a) El costo óptimo es: $66.840

   (b) Se contratan 84 personas: 1 bajo el contrato 1, y 83 bajo el contrato 4.

   (c) El total de horas base contratadas es 3.330. El total de horas extra contratadas es 6.

   (d) La cantidad de personal por par turno-día es:

	Turno 1	Turno 2	Turno 3
Lunes	10	20	10
Martes	11	40	3
Miércoles	12	30	5
Jueves	11	34	2
Viernes	12	28	4
Sábado	11	22	8
Domingo	12	46	10

   Esto es exactamente el requerimiento q.

   (e) Lunes T1, jueves T3, sábado T3, domingo T1.

   (f) Martes T2, jueves T2, sábado T2 y domingo T2.