PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-1
Profesores: G. Angulo, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Solución Tarea 3

Fecha de entrega: Jueves 6 de mayo - 23:59:00

Problema 1.

a) Considere el siguiente problema problema lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ s.a & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo.

i. Suponga que existe un vector $x_0 > 0$, tal que $Ax_0 < b$. ¿Es x_0 un candidato a solución óptima del problema?

ii. Suponga que los puntos extremos del problema son $v_1, v_2, \ldots, v_k$. ¿Es cierto que el valor óptimo del problema es mín$\{c^T v_1, c^T v_2, \ldots, c^T v_k\}$?

b) Considere $P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$

i. Demuestre que si $\bar{x} \in P$ y existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $0 < \bar{x_i} < 1$, entonces $\bar{x}$ no es punto extremo (vértice) de P.

ii. Demuestre que si $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ (es decir, $\bar{x_i}$ puede valer 0 ó 1), entonces $\bar{x}$ es un punto extremo (vértice) de P

Solución Problema 1.

a) i. Del enunciado se desprende que x_0 es un punto factible ubicado al interior del poliedro. Como la función objetivo es lineal, uno puede moverse a partir de este punto en la direccion en que la función objetivo decrece (esto se respalda por el hecho de que c es un vector no nulo y la función es continua) sin salirse del poliedro. Como existe la posibilidad de mejorar el valor de la función objetivo a partir del punto actual, este punto no puede ser el óptimo.

ii. No es cierto, puesto que el problema podría ser no acotado. En este caso el problema no posee valor óptimo.

b) i. Sea un vector $x \in P$. Sea x_i una componente de x tal que $0 < x_i < 1$. Sean $x' = (x_1, x_1, ..., 0, ..., x_n)$ y $x'' = (x_1, x_1, ..., 1, ..., x_n)$ los vectores obtenidos al tomar x y cambiar su i-ésima componente por un 1 y un 0, respectivamente. Es claro que si $x \in P$, entonces $x', x'' \in P$. Luego, x puede ser expresado como:

$$x = (1 - x_i)x' + x_i x''$$

Como $0 < x_i < 1$ y $x' \neq x''$, podemos concluir que x es combinación convexa de dos puntos que pertenecen a P, por lo tanto x no puede ser un vértice de P.

ii. Supongamos que $x \in \{0, 1\}^n$ no es un vértice de P. Luego, existen x' y x'' distintos tales que x es combinación convexa de x' y x''. Es decir:

$$x = (1 - \lambda)x' + x'' \quad \lambda \in [0, 1]$$

Como $x' \neq x''$, debe existir alguna componente en ambos vectores tal que $x'_i \neq x''_i$. La condición de combinacón convexa implica que:

$$x_i = (1 - \lambda)x'_i + x''_i \quad \lambda \in [0, 1]$$

Como la variable x_i solo puede tomar valores 0 ó 1 analizaremos ambos casos. Si $x_i = 0$, la condición anterior implicaría que $x' = x'' = 0$, por lo que x_i no puede valer 0. Por otro lado, si $x_i = 1$, la condición implicaría que $x' = x'' = 1$. Luego, por contradicción, x no puede ser escrito como una combinación convexa de x' y x'' con $x' \neq x''$. Por lo tanto, x es un vértice de P.

Problema 2.

a) Considere el siguiente problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ s.a & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

La fórmula general de los costos reducidos es: $\bar{c^T} = c^T - c_B^T B^{-1} A$, donde B es la submatriz de variables básicas de A. Muestre formalmente que si j es el índice de una variable básica entonces $\bar{c_j} = 0$.

b) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & x + z & & \\ s.a & x + y + z & \leq & 5 \\ & x - z & \geq & -3 \\ & x - y - z & \leq & 1 \\ & x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

i. Escriba el problema en su forma estándar

ii. Resuelva el problema utilizando el algoritmo Simplex Fase II, comenzando en el origen. Indique una solución y su valor óptimo.
Está permitido el uso de software para calcular las matrices inversas que sean necesarias.

Solución Problema 2.

a) Los costos reducidos de las variables no básicas serían:

$$\bar{c_B^T} = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = c_B^T - c_B^T I = c_B^T - c_B^T = 0$$

b) i.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -x - z & & \\ s.a & x + y + z + h_1 & = & 5 \\ & x - z + h_2 & = & 3 \\ & x - y - z + h_3 & = & 1 \\ & x, y, z, h_1, h_2, h_3 & \geq & 0 \end{array}$$

ii. Comenzando por el origen se tiene que las variables básicas serán las variables de holgura y las no básicas serán las variables originales. Así, comenzamos con la primera iteración.

Iteración 1

$$x_B = (h_1, h_2, h_3), x_R = (x, y, z)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c_R^T} = c_R^T - c_B^T \bar{R} = (-1, 0, -1) - (0, 0, 0)\bar{R} = (-1, 0, -1)$$

Como hay costos reducidos menores a cero, no estamos en el óptimo. La variable x entra a la base. Utilizamos el criterio de salida:

$$\min_{a_ij>0}\left\{\frac{\bar{b_i}}{\bar{a_{ij}}}\right\} = \left\{\frac{5}{1}, \frac{3}{-1}, \frac{1}{1}\right\}$$

Por lo tanto, sale la variable h_3.

Iteración 2

$$x_B = (h_1, h_2, x), x_R = (h_3, y, z)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T \bar{R} = (0,0,-1) - (0,0,-1)\bar{R} = (1,-1,-2)$$

Como hay costos reducidos menores a cero, no estamos en el óptimo. La variable z entra a la base. Utilizamos el criterio de salida:

$$\min_{a_ij>0}\left\{\frac{\bar{b_i}}{\bar{a_{ij}}}\right\} = \left\{\frac{4}{2}, \frac{4}{0}, \frac{1}{-1}\right\}$$

Por lo tanto, sale la variable h_1.

Iteración 3

$$x_B = (z, h_2, x), x_R = (h_3, y, h_1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T \bar{R} = (0,0,0) - (-1,0,-1)\bar{R} = (0,1,1)$$

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero, estamos en el óptimo del problema. Así, el punto óptimo encontrado es $(x, y, z) = (3, 0, 2)$, con valor óptimo 5 (del problema de maximización).