PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 2
Profesores: : R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - S. Vásquez - F. Verástegui

Examen Final
Duración: 2 horas 40 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos)

Una asociación deportiva debe diseñar el calendario anual de competencias de sus torneos los que son disputados en un conjunto $T := \{1, \ldots, 52\}$ de fines de semana. Se debe organizar un torneo por cada categoría en el conjunto J y cada categoría se define en base a la edad de las personas participantes en la competencia. En particular, hay $|J| - 1$ categorías juveniles (por ejemplo, la sub-13, sub-15, sub-17, etc) y una adulta (la categoría $j = 1$). Las instituciones que participan de estos torneos se detallan en el conjunto I. Cada institución esta compuesta por K_i equipos, $i \in I$, teniendo a un equipo como máximo participando en cada categoría.

Para formar el calendario, cada institución ha indicado su disponibilidad. Específicamente, el parámetro binario D^i_{jt} indica si el equipo $j \in J$ de la institución $i \in I$ está disponible para disputar un encuentro el fin de semana $t \in T$. El parámetro binario C^i_j indica si la institución i está representada con un equipo en la categoría j. Además se solicita tener en cuenta lo siguiente:

- ◇ Cada torneo se compone de una serie de juegos uno contra uno.
- ◇ Por torneo, cada equipo debe jugar dos veces contra cada rival: de local y de visita.
- ◇ El torneo posee formato espejo, es decir todos los equipos juegan en una primera vuelta contra todos sus rivales, y una vez concluida esta vuelta, se disputa la segunda vuelta pero de manera inversa respecto de las localías. La primera vuelta debe finalizar antes de los primeros $|T|/2$ fines de semana.
- ◇ Un equipo no puede jugar más de un partido por fin de semana, pero perfectamente podría tener uno o más fin de semana libre.
- ◇ En cada fin de semana, todos los equipos juveniles de una misma institución deben jugar contra la misma institución rival en la misma condición de localía (si ambos están incritos en cada categoría).

No es necesario que todas los instituciones jueguen partidos los mismos fines de semana, por lo que una institución puede iniciar o finalizar antes la competencia que otra.

(a) (10 pts) Formule un modelo de programación lineal entera que le permita calendarizar todos los juegos de cada torneo organizado por la asociación deportiva de forma tal que se termine lo antes posible la temporada.

Solución:

Parametros Auxiliares:

$n_j := \sum_{i \in I} C^i_j$ Número de equipos incritos por categoría j.

M: Parámetro auxiliar, número entero grande.

VARIABLES:

x_{jt}^{ir}: Variable binaria con valor 1 si el equipo de la institución i juega de local contra el equipo de la institución r, en la categoría j el fin de semana t, 0 en otro caso.

y_t^{ir}: Variable binaria con valor 1 si en alguna categoría un equipo de la institución i juega de local contra la institución r el fin de semana t.

z_t: Variable binaria con valor 1 si se agenda un juego el fin de semana t, 0 en otro caso.

α: Variable auxiliar para determinar la fecha de término del torneo.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\min \alpha$$

R1) Por categoría, cada institución disputa a lo más un partido cada fin de semana:

$$\sum_{r \in I} (x_{jt}^{ir} + x_{jt}^{ri}) \leq D_{jt}^{i} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T.$$

R2) Se debe jugar de local contra toda institución inscritas por categoría:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt}^{ir} = 1 \quad \forall i, r \in I : i \neq r, j \in J : C_j^i \cdot C_j^r = 1.$$

R3) Jugar contra todos los equipos en la primera vuelta por categoría.

$$\sum_{t=1}^{T/2} \sum_{r \in I} (x_{jt}^{ir} + x_{jt}^{ri}) = n_j - 1 \quad \forall i \in I, j \in J.$$

R4) Si juego en las menores, juego con todas las categorías (si es posible)

$$\sum_{j \in J \setminus \{1\}} x_{jt}^{ir} \leq (|J| - 1) \cdot y_t^{ir} \quad \forall i \in I, r \in I, t \in T.$$

$$y_t^{ir} \leq x_{jt}^{ir} \quad \forall i, r \in I : i \neq r, j \in J \setminus \{1\}, t \in T \wedge C_j^i \cdot C_j^r = 1.$$

R5) Calcular duración torneo

$$\sum_{i \in I} \sum_{r \in I} \sum_{j \in J} x_{jt}^{ir} \leq M \cdot z_t$$

$$t \cdot z_t \leq \alpha \quad \forall t \in T$$

R6) Naturaleza de variables

$$x_{jt}^{ir} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, r \in I, j \in J, t \in T.$$

$$y_t^{ir} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, r \in I, t \in T.$$

$$z_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T.$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+$$

(b) (5 pts) Suponga que ahora el objetivo cambia y que se solicita que se priorice en la medida de lo posible que los equipos adultos y juveniles de las instituciones se enfrenten entre sí el

mismo fin de semana, considerando solo las categorías donde ambas instituciones coincidan. Modifique su formulación anterior para maximizar la cantidad de ocurrencias en las que se puede lograr dicha situación, respetando las restricciones ya planteadas.

Solución: VARIABLES:

β_t^{ir}: Variable binaria con valor 1 si los equipos adultos y juveniles de las instituciones i y r se enfrentan el fin de semana t, 0 en otro caso.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{(i,r) \in I \times I : r \neq i} \beta_t^{ir}$$

R7) Detectar cuando las categorías adultos y juveniles se enfrentan

$$\beta_t^{ir} \leq x_{1t}^{ir}, \quad \forall i, r \in I : i \neq r, t \in T.$$

$$\beta_t^{ir} \leq y_t^{ir}, \quad \forall i, r \in I : i \neq r, t \in T.$$

R8) Naturaleza Variables

$$\beta_t^{ir} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, r \in I, t \in T.$$

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte 1 (11 puntos)

Considere el siguiente modelo de optimización lineal con variables continuas:

$$\begin{aligned} (\text{P}) \quad z(\alpha) := \text{mín} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_2 + x_3 \geq \alpha \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro desconocido y $z(\alpha)$ es su valor óptimo como función de α.

(a) (2 pts) Formule el problema dual de (P) y llámelo (D).

Solución:

$$\begin{aligned} (\text{D}) \quad \text{máx} \quad & 2y_1 + \alpha y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 \leq 2 \\ & y_1 + y_2 \leq 3 \\ & y_2 \leq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) (2 pts) Determine (como usted estime conveniente) todos los vértices de (D). Luego identifique para qué rango de valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es óptimo cada vértice encontrado.

Solución: Los vértices del dominio de (D) son (0, 0), (2, 0), (2, 1) y (0, 3).

- $(0, 0)$ nunca será solución óptima.
- $(2, 0)$ será solución óptima para $\alpha \leq 0$
- $(2, 1)$ será solución óptima para $0 \leq \alpha \leq 2$
- $(0, 3)$ será solución óptima para $\alpha \geq 2$

(c) (3 pts) Determine explícitamente la función valor óptimo $z(\alpha)$ en función de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: Por dualidad fuerte y sabiendo que el óptimo se da en un vértice de (D) para cada valor de α, se obtiene que:

$$z(\alpha) = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha \leq 0 \\ 4 + \alpha & \text{si } 0 < \alpha \leq 2 \\ 3 \cdot \alpha & \text{si } \alpha > 2 \end{cases}$$

(d) (2 pts) Obtenga la solución óptima de (P) para cada valor entero de $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Solución: Utilizando el teorema de holguras complementarias, se obtiene que

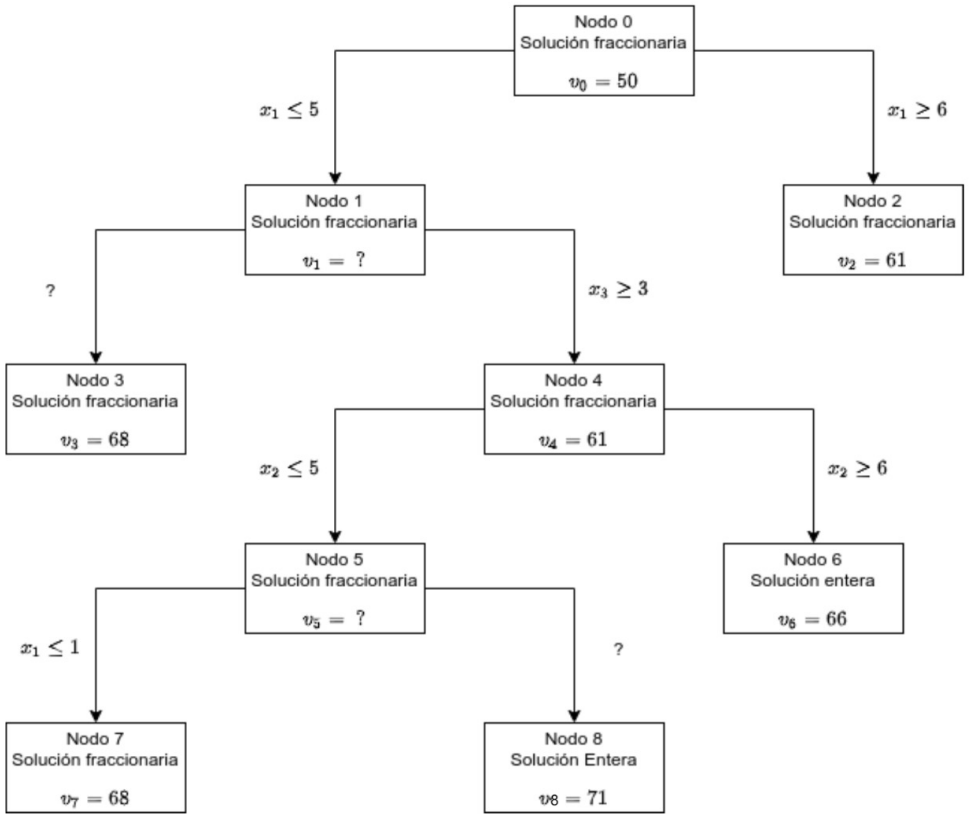
Si $\alpha \in \{0, -1, -2, -3, ...\}$, $(2, 0, 0)$ es solución primal óptima.
Si $\alpha = 1$, $(1, 1, 0)$ es solución primal óptima.
Si $\alpha = \{2, 3, ...\}$, $(0, \alpha, 0)$ es solución primal óptima.

(e) (2 pts) Las soluciones óptimas de (P) y de (D) se dan en vértices enteros. ¿Es casualidad?

Solución: No es casualidad. La matriz de coeficientes de las restricciones es TU y el lado derecho es un vector con entradas enteras en ambos problemas si $\alpha \in \mathbb{Z}$. Luego, cada vértice será integral.

Parte 2 (9 puntos)

Considere un problema lineal de variables enteras. Al resolverlo parcialmente mediante Branch & Bound, se obtiene el siguiente árbol de nodos con relajaciones continuas resueltas:



donde cada nodo indica la naturaleza de la solución óptima al problema continuo asociado y el valor óptimo v. Responda a cada una de las siguientes preguntas:

(a) (1pto) ¿Está maximizando o minimizando? ¿Por qué?

Solución: Claramente se está minimizando, pues las relajaciones suben de valor al agregar más restricciones.

(b) (1pto) ¿Cuáles son las restricciones faltantes que son agregadas al producir los nodos 3 y 8?

Solución: $x_3 \leq 2$ y $x_1 \geq 2$.

(c) (1pto) Con la información disponible: ¿Qué rango de valores puede tomar v_1?

Solución: $50 \leq v_1 \leq 61$.

(d) (1pto) Suponga que ha resuelto los nodos en el siguiente orden: 0–1–2–3–4–6. ¿Qué rango de valores pudo haber tomado v_5?

Solución: $61 \leq v_5 < 66$.

(e) (1pto) Suponga que ha resuelto los nodos en el siguiente orden: 0–1–2–3–4–5. ¿Qué rango de valores pudo haber tomado v_5?

Solución: $61 \leq v_5 \leq 68$.

(f) (1pto) ¿Qué valor posee el incumbente?

Solución: 66.

(g) (1pto) ¿Cuál es la mayor diferencia absoluta que podría tener el valor objetivo del incumbente con respecto al valor óptimo?

Solución: 5=66-61.

(h) (1pto) ¿Cuál es el gap de optimalidad actual?

Solución: $\frac{5}{66} \cdot 100\,\%$.

(i) (1pto) ¿Qué nodos (no explorados hacia abajo todavía) pueden ser podados del árbol sin perder una solución óptima? ¿Por qué?

Solución: Los nodos 3 y 7 por optimalidad (peores que 66) y los nodos 6 y 8 por integralidad.

Pregunta 3 (11 puntos)

Usted está a cargo de la distribución diaria de unidades de un producto desde una sola fábrica y hacia un centro de distribución (CD) y diferentes ciudades en donde se consume. Para transportar las unidades de producto a cada cuidad, usted puede contratar a un transportista que puede hacerlo directamente desde la fábrica, o bien transportarlo al CD y desde ahí enviar a las ciudades. La siguiente tabla detalla el costo unitario de transporte desde un punto hasta otro:

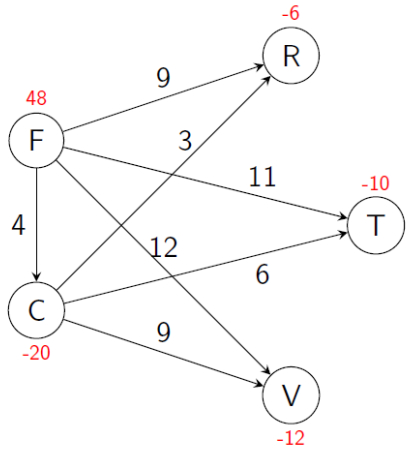
Camino	$ por unidad
Fábrica $\longrightarrow$ CD	4
Fábrica $\longrightarrow$ Rancagua	9
Fábrica $\longrightarrow$ Talca	11
Fábrica $\longrightarrow$ Valdivia	12
CD $\longrightarrow$ Rancagua	3
CD $\longrightarrow$ Talca	6
CD $\longrightarrow$ Valdivia	9

La siguiente tabla detalla la información diaria de demanda:

Lugar	unidades
CD	20
Rancagua	6
Talca	10
Valdivia	12

(a) (2pts) Dibuje un grafo apropiado que modele este problema como uno de flujo a costo mínimo. Indique sus nodos, arcos, ofertas netas y costos asociados.

Solución: Una red que modela la situación es la siguiente:



(b) (4pts) Utilizando el algoritmo simplex en redes, encuentre una solución óptima del problema. Utilice como solución inicial factible aquella en donde se transporta toda la demanda a las ciudades vía el CD.

Solución: Los arcos básicos son (F,C), (C,R), (C,T), (C,V). Realizamos los cálculos corres-

pondientes:

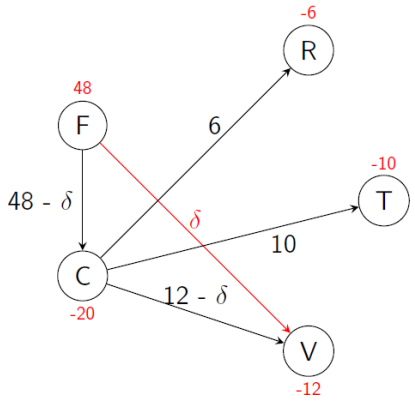
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{FC} &= c_{FC} - \pi_F + \pi_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_F - \pi_C = 4 \\
\bar{c}_{CR} &= c_{CR} - \pi_C + \pi_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_C - \pi_R = 3 \\
\bar{c}_{CT} &= c_{CT} - \pi_C + \pi_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_C - \pi_T = 6 \\
\bar{c}_{CV} &= c_{CV} - \pi_C + \pi_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_C - \pi_V = 9
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_C = 0$, obtenemos $\pi_F = 4, \pi_C = 0, \pi_R = -3, \pi_T = -6, \pi_V = -9$.

Calculamos los costos reducidos no básicos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{FR} &= c_{FR} - \pi_F + \pi_R \quad \Rightarrow \quad 9 - 4 + -3 = 2 \\
\bar{c}_{FT} &= c_{FT} - \pi_F + \pi_T \quad \Rightarrow \quad 11 - 4 + -6 = 1 \\
\bar{c}_{FV} &= c_{FV} - \pi_F + \pi_V \quad \Rightarrow \quad 12 - 4 + -9 = -1
\end{aligned}$$

No estamos en el óptimo. Debe ingresar el arco (F,V). La siguiente imagen nos muestra que el arco que debe salir es el arco (C,V).



Volvemos a calcular los π. Se tiene lo siguiente:

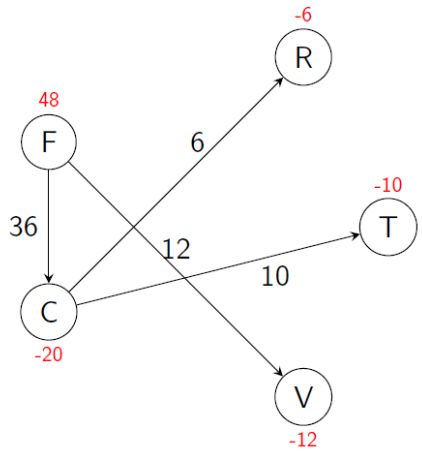
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{FC} &= c_{FC} - \pi_F + \pi_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_F - \pi_C = 4 \\
\bar{c}_{CR} &= c_{CR} - \pi_C + \pi_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_C - \pi_R = 3 \\
\bar{c}_{CT} &= c_{CT} - \pi_C + \pi_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_C - \pi_T = 6 \\
\bar{c}_{FV} &= c_{FV} - \pi_F + \pi_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_F - \pi_V = 12
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_C = 0$, obtenemos $\pi_F = 4, \pi_C = 0, \pi_R = -3, \pi_T = -6, \pi_V = -8$.

Calculamos los costos reducidos no básicos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{FR} &= c_{FR} - \pi_F + \pi_R \quad \Rightarrow \quad 9 - 4 + -3 = 2 \\
\bar{c}_{FT} &= c_{FT} - \pi_F + \pi_T \quad \Rightarrow \quad 11 - 4 + -6 = 1 \\
\bar{c}_{CV} &= c_{CV} - \pi_C + \pi_V \quad \Rightarrow \quad 9 - 0 + -8 = 1
\end{aligned}$$

Estamos en la solución óptima. Los flujos básicos son:



(c) (5pts) Suponga ahora que el costo unitario de transporte desde el CD hasta Rancagua aumenta en 3 unidades. Verifique mediante condiciones apropiadas de optimalidad si la solución calculada en (b) sigue siendo óptima. Si no lo es, muestre cuál sería la nueva solución óptima del problema.

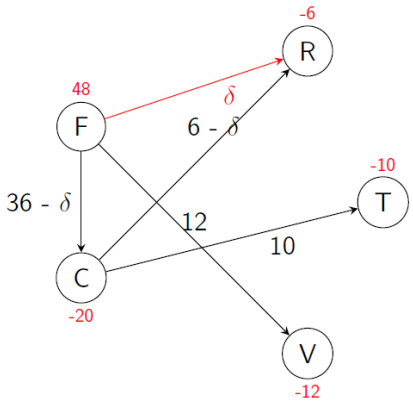
Solución:

El valor que está cambiando corresponde a uno de los costos básicos. Sin embargo, no es necesario calcular todo de nuevo. Si observamos, al cambiar el costo c_{CR} la única variable π que cambiará es π_R. Por lo tanto, solo basta ver qué ocurre con el costo reducido del arco (F,R).

$$\bar{c}_{CR} = c_{CR} - \pi_C + \pi_R = 0 \Rightarrow \pi_R = -6$$

$$\bar{c}_{FR} = c_{FR} - \pi_F + \pi_R \Rightarrow 9 - 4 + -6 = -1$$

La solución óptima cambia. La siguiente imagen indica que el arco (C,R) sale de la base.



Volvemos a calcular los π. Se tiene lo siguiente:

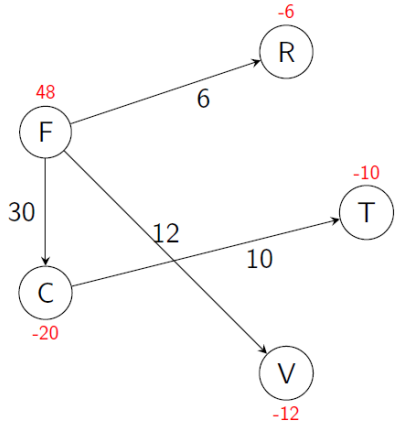
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{FC} = c_{FC} - \pi_F + \pi_C = 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_F - \pi_C = 4 \\
\bar{c}_{FR} = c_{FR} - \pi_F + \pi_R = 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_F - \pi_R = 9 \\
\bar{c}_{CT} = c_{CT} - \pi_C + \pi_T = 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_C - \pi_T = 6 \\
\bar{c}_{FV} = c_{FV} - \pi_F + \pi_V = 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_F - \pi_V = 12
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_C = 0$, obtenemos $\pi_F = 4, \pi_C = 0, \pi_R = -5, \pi_T = -6, \pi_V = -8$.

Calculamos los costos reducidos no básicos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{CR} &= c_{CR} - \pi_C + \pi_R \quad \Rightarrow \quad 6 - 0 + -5 = 1 \\
\bar{c}_{FT} &= c_{FT} - \pi_F + \pi_T \quad \Rightarrow \quad 11 - 4 + -6 = 1 \\
\bar{c}_{CV} &= c_{CV} - \pi_C + \pi_V \quad \Rightarrow \quad 9 - 0 + -8 = 1
\end{aligned}$$

Estamos en la solución óptima. Los flujos básicos son:



Pregunta 4 (14 puntos)

Parte 1 (8 puntos)

(a) (4 pts) Considere el siguiente problema de optimización no lineal restricto:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{aligned}$$

Formule sus condiciones de optimalidad y encuentre su(s) solución(es) y valor óptimo.
Solución: El problema es convexo y cumple con condiciones de regularidad, por lo que todo punto KKT debiese ser óptimo. La función de Lagrange del problema corresponde a:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2\,x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2\,x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2\,x_3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_4} &= 2\,x_4 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\lambda} &= 1 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

El único punto KKT es: $x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ con $\lambda = \frac{1}{2}$. Su valor óptimo es $\frac{1}{4}$.

(b) (4 pts) Considere el siguiente problema de optimización no lineal con una restricción de igualdad y otra de desigualdad:

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_4 \leq k \end{aligned}$$

Formule sus condiciones de optimalidad y encuentre su(s) solución(es) y valor óptimo si $k < 1/4$.
Solución: El problema sigue siendo convexo y cumple con condiciones de regularidad, por lo que todo punto KKT debiese ser óptimo.

Incorporamos un multiplicador estrictamente no negativo para la restricción de desigualdad incluida, con lo que tenemos la siguiente función:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + \mu(x_4 - k)$$

Las condiciones de KKT en este caso corresponden a:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\,x_1 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2\,x_2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\,x_3 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = 2\,x_4 - \lambda + \mu = 0$$
$$\frac{\partial L}{\lambda} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\mu} = x_4 - k \leq 0$$
$$\mu \cdot \frac{\partial L}{\mu} = \mu(x_4 - k) = 0$$

además $\mu \geq 0$.

Si $k < \frac{1}{4}$, el óptimo del problema en (b) deja de ser factible, por lo que la segunda restricción debe estar activa. Luego, $x_4 = k$ y esto implica que $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1-k}{3}$. Es decir, el valor óptimo será $\frac{(1-k)^2}{3} + k^2$.

Parte 2 (6 puntos)

Suponga una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa. En general, es muy complejo maximizar $f(x)$ con x perteneciente a un dominio convexo $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Lo anterior se debe a que el problema resultante máx$\{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$ no es convexo y, por lo tanto, se pierden condiciones de optimalidad a nivel global. Sin embargo, hay veces en las que algo se puede hacer.

(a) (4 puntos) Considere que $\mathbb{D}$ es un polítopo no vacío. Demuestre que toda solución óptima de máx$\{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$ se da en un vértice de $\mathbb{D}$.

Solución: Supongamos por contracción que esto no es verdad y que existe una solución óptima x' al interior de $\mathbb{D}$. Si ese es el caso, existe $h \neq 0$ tal que $x' \pm h \in \mathbb{D}$ (todo punto interior puede ser expresado como punto medio de dos puntos factibles diferentes). Además $f(x' \pm h) \leq f(x')$ por optimalidad de x'.

Como la función es estrictamente convexa se cumple que:

$$f(x') < \frac{1}{2}f(x' + h) + \frac{1}{2}f(x' - h) \leq \frac{1}{2}f(x') + \frac{1}{2}f(x') = f(x'),$$

lo que es una contradicción. Luego x' no puede ser solución óptima.

(b) (2 puntos) Encuentre una solución óptima para el siguiente problema no lineal y no convexo:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \textbf{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) \cdot x_i \leq 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Solución: Los vértices de este dominio son el origen 0 y cada uno de los n puntos de la forma $\frac{1}{n-i+1} \cdot e_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, donde e_i es un vector canónico de $\mathbb{R}^n$ con un 1 en la componente i.

Claramente, la solución óptima se encuentra en $x^* = e_n$ con valor óptimo $v^* = 1$